ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

(от 12.06.2018)

Примечание. Подразумевается, если не оговорено противное, что теорему из билета нужно рассказывать с доказательством, если оно было разобрано на лекциях или если оно было оставлено в качестве упражнения.

1. Простейшая задача вариационного исчисления: постановка задачи, определение локального и глобального экстремума.

2. Необходимое условие локального экстремума в простейшей задаче (уравнение Эйлера, с доказательством).

3. Три случая понижения порядка в уравнении Эйлера.

4. Постановка (физическая и аналитическая) и решение задачи о брахистохроне.

5. Постановка (геометрическая и аналитическая) и решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади.

6. Вариационная задача с несколькими неизвестными функциями, необходимое условие локального экстремума.

7. Вариационная задача с высшими производными, необходимое условие локального экстремума.

8. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными, необходимое условие локального экстремума.

9. Простейшая изопериметрическая задача, необходимое условие локального экстремума; постановка и решение классической изопериметрической задачи (задача Дидоны).

10. Малые колебания систем $MX'' + KX = 0$: нахождения решения, ортогональность векторов нормальных колебаний (доказательство).

11. Вынужденные колебания: система $MX'' + KX = F(t)$. Нахождение решения.

12. Периодические решения системы дифференциальных уравнений (с доказательствами): система n уравнений, линейные системы, линейные системы с постоянными коэффициентами.

13. Периодические решения дифференциального уравнения высокого порядка: разрешённые относительно старшей производной, линейные, линейные с постоянными коэффициентами.

14. Нахождение периодических решений с помощью рядов Фурье: нерезонансный и резонансный случаи (с доказательствами).

15. Гладкость решений дифференциального уравнения в зависимости от гладкости правой части.

16. Теорема о непрерывной зависимости решений системы от начальных данных, теорема о непрерывной зависимости решений системы от параметров.

17. Теорема о дифференцируемости решений по параметрам. Теорема о дифференцируемости решений в целом (по начальным данным и параметрам).

18. Метод малого параметра для отыскания периодических решений. Теорема о существовании периодических решений при малом параметре (с доказательством).

19. Система $\dot{Y} = F(t, Y)$. Определение устойчивости по Ляпунову, неустойчивости, асимптотической устойчивости. Геометрическая интерпретация этих определений.

20. Сведение задачи об устойчивости любого решения к исследованию устойчивости нулевого решения.

21. Устойчивость решений линейных систем $\dot{Y} = A(t)Y + B(t)$: теорема об устойчивости нулевого решения линейной системы (связь с ограниченностью решений, с доказательством), теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы (связь со стремлением решений к нулю, с доказательством).

22. Устойчивость решений линейных систем с постоянными коэффициентами $\dot{Y} = AY$ (зависимость от собственных значений матрицы A).

23. Устойчивость решений автономных систем: идея метода функций Ляпунова, теорема Ляпунова об устойчивости (с доказательством), теорема об асимптотической устойчивости в терминах функции Ляпунова, теорема о неустойчивости, теорема Четаева.

24. Теорема о существовании функции Ляпунова для линейных систем с постоянными коэффициентами (с доказательством).

25. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению (с доказательством).

26. Теорема об устойчивости положений равновесия автономных систем по первому приближению.

27. Основное свойство решений автономных систем. Фазовое пространство, траектории. Теорема о пересечении траекторий автономных систем. Три типа фазовых траекторий автономных систем.

28. Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о связи первых интегралов и решений уравнения с частными производными (с доказательством). Теорема о числе функционально независимых первых интегралов. Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.

29. Постановка задачи Коши для уравнения в частных производных. Теорема об однозначной разрешимости задачи Коши на плоскости.

30. Теорема об однозначной разрешимости задачи Коши на гиперповерхности.