ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

(от 06.06.2020)

Примечание. Подразумевается, если не оговорено противное, что теорему из билета нужно написать с доказательством, если оно было разобрано на лекциях или если оно было оставлено в качестве упражнения.

1. Простейшая задача вариационного исчисления: постановка задачи, определение локального и глобального экстремума.

2. Необходимое условие локального экстремума в простейшей вариационной задаче (уравнение Эйлера, с доказательством).

3. Три случая понижения порядка в уравнении Эйлера (с доказательством).

4. Постановка (физическая и аналитическая) и решение задачи о брахистохроне.

5. Вариационная задача с несколькими неизвестными функциями, необходимое условие локального экстремума.

6. Вариационная задача с высшими производными, необходимое условие локального экстремума.

7. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными, необходимое условие локального экстремума.

8. Простейшая изопериметрическая задача, необходимое условие локального экстремума; постановка и решение классической изопериметрической задачи (задача Дидоны).

9. Достаточные условия локального экстремума для простейшей вариационной задачи.

10. Малые колебания систем: $MX'' + KX = 0$: нахождение решений, ортогональность векторов нормальных колебаний (с доказательством).

11. Вынужденные колебания систем: $MX'' + KX = F(t)$. Нахождение решений.

12. Периодические решения систем дифференциальных уравнений (с доказательствами): системы из n уравнений, линейные системы с переменными коэффициентами, линейные системы с постоянными коэффициентами.

13. Периодические решения дифференциальных уравнений высокого порядка (с доказательствами): уравнения, разрешённые относительно старшей производной, линейные уравнения с переменными коэффициентами, линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

14. Нахождение периодических решений с помощью рядов Фурье: нерезонансный и резонансный случаи (с доказательствами).

15. Гладкость решений дифференциального уравнения в зависимости от гладкости правой части.

16. Теорема о непрерывной зависимости решений системы от начальных данных, теорема о непрерывной зависимости решений системы от параметров.

17. Теорема о дифференцируемости решений по начальным данным и параметрам.

18. Метод малого параметра для отыскания периодических решений. Теорема о существовании периодических решений при малом параметре (с доказательством).

19. Система $\dot{Y} = F(t, Y)$. Определение устойчивости по Ляпунову, неустойчивости, асимптотической устойчивости. Геометрическая интерпретация этих определений.

20. Сведение задачи об устойчивости произвольного решения к исследованию устойчивости нулевого решения. Связь устойчивости решений системы $\dot{Y} = A(t)Y + B(t)$ с устойчивостью нулевого решения системы $\dot{Y} = A(t)Y$.

21. Устойчивость решений линейных систем $\dot{Y} = A(t)Y$: теорема об устойчивости нулевого решения линейной системы (связь с ограниченностью решений, с доказательством), теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы (связь со стремлением решений к нулю, с доказательством).

22. Устойчивость решений линейных систем с постоянными коэффициентами $\dot{Y} = AY$ (зависимость от собственных значений матрицы A).

23. Устойчивость решений автономных систем: идея метода функций Ляпунова, теорема Ляпунова об устойчивости (с доказательством), теорема об асимптотической устойчивости в терминах функции Ляпунова, теорема о неустойчивости, теорема Четаева.

24. Теорема о существовании функции Ляпунова для линейных систем с постоянными коэффициентами (с доказательством).

25. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению (с доказательством).

26. Теорема об устойчивости положений равновесия автономных систем по первому приближению.

27. Основное свойство решений автономных систем. Фазовое пространство, траектории. Теорема о пересечении траекторий автономных систем (с доказательством). Три типа фазовых траекторий автономных систем.

28. Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о связи первых интегралов и решений уравнения с частными производными (с доказательством). Теорема о числе функционально независимых первых интегралов. Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.

29. Постановка задачи Коши для уравнения в частных производных. Теорема об однозначной разрешимости задачи Коши на плоскости (с доказательством).

30. Характеристики уравнения в частных производных. Теорема о постоянстве решения вдоль характеристик (с доказательством).

31. Теорема об однозначной разрешимости задачи Коши на поверхности (с доказательством).

32. Квазилинейные уравнения в частных производных. Теорема о решении квазилинейного уравнения (с доказательством). Задача Коши для квазилинейного уравнения.