

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вопросы к экзамену

Летняя сессия 2021–2022

1. Простейшая задача вариационного исчисления: постановка задачи, определения локального и глобального экстремума. Необходимое условие локального экстремума (уравнение Эйлера). Случаи понижения порядка в уравнении Эйлера.
2. Постановка (физическая и аналитическая) и решение задачи о брахистохроне.
3. Постановка (физическая и аналитическая) и решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади.
4. Вариационная задача с несколькими неизвестными функциями. Необходимое условие локального экстремума.
5. Вариационная задача с высшими производными. Необходимое условие локального экстремума.
6. Изопериметрическая задача. Необходимое условие локального экстремума. Решение классической изопериметрической задачи.
7. Вариационная задача на условный экстремум. Необходимое условие локального экстремума. Решение задачи о геодезических на сфере.
8. Линейные однородные системы малых колебаний. Неотрицательность собственных чисел системы малых колебаний. Базис из векторов нормальных колебаний. Решение однородной системы малых колебаний.
9. Линейные неоднородные системы малых колебаний. Ортогональность векторов нормальных колебаний. Решение неоднородной системы малых колебаний.
10. Непрерывная зависимость решений от параметров и начальных данных.
11. Дифференцируемость решений по параметрам и начальным данным.
12. Периодические решения линейных систем. Критерий периодичности решения в терминах совпадения значений решения в двух точках. Критерий существования единственного периодического решения в терминах ФМР. Критерий существования единственного периодического решения в терминах собственных чисел матрицы однородной системы.
13. Периодические решения линейных уравнений высокого порядка. Критерий периодичности решения в терминах совпадения значений решения и его производных в двух точках. Критерий существования единственного периодического решения в терминах ФМР. Критерий существования единственного периодического решения в терминах корней характеристического уравнения.
14. Нахождение периодических решений с помощью рядов Фурье. Связь коэффициентов Фурье для решения и правой части. Нерезонансный случай. Резонансный случай.
15. Метод малого параметра для нахождения периодических решений нелинейных систем. Критерий периодичности решения в терминах совпадения значений решения в двух точках. Существование единственного периодического решения системы с малым параметром.

16. !!! Определение устойчивости по Ляпунову. Определение асимптотической устойчивости. Геометрическая интерпретация этих определений. Сведение задачи об устойчивости произвольного решения к задаче об устойчивости нулевого решения.

17. Устойчивость решений линейных систем. Теорема об устойчивости нулевого решения линейной системы (связь с ограниченностью решений). Теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы (связь со стремлением решений к нулю).

18. Устойчивость нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами (зависимость от собственных чисел матрицы коэффициентов).

19. Определение функции Ляпунова. Теоремы об устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости, неустойчивости в терминах функции Ляпунова. Теорема Четаева о неустойчивости.

20. Матричное уравнение Ляпунова $HA + A^*H = -C$. Условие для асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы в терминах существования решения матричного уравнения Ляпунова. Оценка Крейна.

21. Матричное уравнение Ляпунова $HA + A^*H = -C$. Условие для существования решения матричного уравнения Ляпунова в терминах собственных чисел матрицы A . Интегральное представление решения матричного уравнения Ляпунова.

22. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению. Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению. Устойчивость положений равновесия.

23. Фазовые траектории автономных систем. Свойства решений автономных систем. Теорема о пересечении фазовых траекторий. Три типа фазовых траекторий.

24. Фазовые портреты линейных систем второго порядка (седло, узел, вырожденный узел, дикритический узел, центр, фокус).

25. Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Связь первых интегралов с решениями линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка.

26. Теорема о числе функционально независимых первых интегралов.

27. Задача Коши для линейных однородных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши на гиперплоскости.

28. Задача Коши для линейных однородных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши на поверхности.