ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
Зимняя сессия
(версия от 28.12.2018)

Примечание: подразумевается, если не оговорено противное, что теорему из билета нужно рассказывать с доказательством, если оно было разобрано на лекциях.

1. Определение решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, определение непродолжаемого решения. Постановка задачи Коши. Формулировки теорем Пеано и Пикара. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения, определение интегральной кривой. Поле направлений, изоклины.

2. Уравнения с разделяющимися переменными, уравнения вида $y' = f(\alpha x+\beta y+\gamma)$, однородные уравнения. Примеры.

3. Линейные уравнения первого порядка. Принцип суперпозиции. Пространство решений однородного уравнения. Связь общего решения однородного уравнения с общим решением неоднородного уравнения. Метод вариации произвольной постоянной.

4. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати. Примеры.

5. Уравнения в симметричной форме. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Примеры.

6. Формулировка теоремы Пикара для уравнений первого порядка. Доказательство (первая часть): эквивалентность задачи Коши и интегрального уравнения, единственность решения.

7. Формулировка теоремы Пикара для уравнений первого порядка. Доказательство (вторая часть): существование локального решения.

8. Методы понижения порядка дифференциальных уравнений $G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$: а) G — однородная, б) G не зависит от x (автономное уравнение), в) уравнение Эйлера, г) G — обобщённо-однородная. Доказательство для случая $n = 2$.

9. Нормальные системы $Y' = F(x, Y)$. Определение решения, постановка задачи Коши. Формулировки теорем Пеано и Пикара для систем. Теорема о покидании компакта для систем. Теорема о поведении непродолжаемых решений в полосе. Теорема Уинтнера.

10. Линейные системы. Теорема Пикара для линейных систем (с доказательством). Принцип суперпозиции. Связь общего решения однородной системы с общим решением неоднородной системы.

11. Линейные однородные системы. Размерность пространства решений. Определения ФСР, ФМР. Общее решение линейной однородной системы.

12. Фундаментальные матрицы и их свойства: невырожденность ФМР, дифференциальное уравнение для ФМР, связь между двумя ФМР.

13. Матрица Вронского. Формула Остроградского – Лиувилля для систем (вывод формулы для случая $n = 2$). Эквивалентность линейной независимости в точке и на интервале для решений линейной однородной системы.

14. Линейные неоднородные системы. Метод вариации произвольной постоянной.

15. Решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами $Y' = AY$. Матричная экспонента.

16. Сведение уравнения высокого порядка к системе. Связь решений уравнения и соответствующей системы. Теорема Пикара для уравнений высокого порядка. Теория линейных уравнений высокого порядка как следствие теории линейных систем: пространство решений однородного уравнения, определения ФСР, ФМР, формула Остроградского – Лиувилля, связь общего решения однородного уравнения с общим решением неоднородного уравнения, метод вариации произвольной постоянной.

17. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Формула сдвига.

18. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о виде решений, соответствующих корню характеристического полинома кратности k.

19. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о кратности корня характеристического полинома.

20. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Построение ФСР.

21. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольной постоянной. Частное решение в случае неоднородности в виде квазиполинома. Метод комплексных амплитуд. Примеры.

22. Линейные уравнения Эйлера. Примеры.

23. Постановка краевой задачи. Условие однозначной разрешимости (с доказательством). Условия, при которых краевая задача имеет бесконечно много решений, не имеет решений.

24. Постановка краевой задачи. Решение задачи в случае неоднозначной разрешимости.

25. Постановка краевой задачи. Сведение задачи (α, β, f) к задаче $(0, 0, \widetilde{f})$.

26. Постановка краевой задачи. Решение задачи $(0, 0, f)$ в случае однозначной разрешимости. Функция Грина, четыре ее свойства.

27. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Сведение к краевой задаче для уравнения, не содержащего первую производную.

28. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Размерность пространства собственных функций, соответствующих одному собственному значению. Существование действительной собственной функции, соответствующей действительному собственному значению.

29. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Ортогональность с весом собственных функций. Вещественность собственных значений.

30. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Теорема об односторонней ограниченности множества собственных значений (доказательство для случая $y(a) = y(b) = 0$).

31. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Количество собственных значений, их расположение (без доказательства). Теорема Стеклова: разложение дважды непрерывно дифференцируемых функций по собственным функциям (без доказательства).