ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
Зимняя сессия 2020–2021 учебного года
(версия от 04.01.2021)

1. Дифференциальные уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$. Определение решения дифференциального уравнения, определение непродолжаемого решения. Постановка задачи Коши. Формулировки теорем Пеано и Пикара. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения, определение интегральной кривой. Поле направлений, изоклины.

2. Уравнения с разделяющимися переменными, уравнения вида $y' = f(\alpha x+\beta y+\gamma)$.

3. Уравнения с однородной правой частью $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, уравнения вида $y' = f\left(\frac{\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1}{\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2}\right)$.

4. Линейные уравнения первого порядка. Принцип суперпозиции. Пространство решений однородного уравнения. Связь общего решения однородного уравнения с общим решением неоднородного уравнения. Метод вариации произвольной постоянной.

5. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати.

6. Уравнения в симметричной форме. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

7. Формулировка теоремы Пикара для уравнений первого порядка. Доказательство (первая часть): эквивалентность задачи Коши и интегрального уравнения.

8. Формулировка теоремы Пикара для уравнений первого порядка. Доказательство (вторая часть): локальное существование решения.

9. Формулировка теоремы Пикара для уравнений первого порядка. Доказательство (третья часть): локальная единственность решения.

10. Формулировка теоремы Пикара для уравнений первого порядка. Доказательство (четвертая часть): существование и единственность непродолжаемого решения, определенного на открытом интервале.

11. Уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$. Теорема о покидании компакта. Теорема о поведении непродолжаемых решений в полосе.

12. Нормальные системы $Y' = F(x, Y)$. Определение решения системы, определение непродолжаемого решения. Постановка задачи Коши. Формулировки теорем Пеано и Пикара для систем.

13. Нормальные системы $Y' = F(x, Y)$. Теорема о покидании компакта для систем. Теорема о поведении непродолжаемых решений в полосе. Теорема Уинтнера.

14. Линейные системы. Теорема Пикара для линейных систем. Принцип суперпозиции. Связь общего решения однородной системы с общим решением неоднородной системы.

15. Определения линейной зависимости и независимости вектор-функций на интервале. Теорема о линейной зависимости решений линейной однородной системы. Эквивалентность линейной независимости в точке и на интервале для решений линейной однородной системы.

16. Матрица Вронского. Формула Остроградского – Лиувилля для систем (вывод формулы для случая $n = 2$).

17. Линейные однородные системы. Размерность пространства решений. Определения ФСР, ФМР. Общее решение линейной однородной системы.

18. Фундаментальные матрицы и их свойства: невырожденность ФМР, дифференциальное уравнение для ФМР, связь между двумя ФМР.

19. Линейные неоднородные системы. Метод вариации произвольных постоянных.

20. Решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами $Y' = AY$. Матричная экспонента.

21. Уравнения высокого порядка. Определение решения уравнения высокого порядка, определение непродолжаемого решения. Постановка задачи Коши. Сведение уравнения высокого порядка к системе. Связь решений уравнения и соответствующей системы. Формулировки теорем Пеано и Пикара для уравнений высокого порядка.

22. Линейные уравнения высокого порядка. Сведение уравнения к системе. Теория линейных уравнений высокого порядка как следствие теории линейных систем: пространство решений однородного уравнения, определения ФСР, ФМР, формула Остроградского – Лиувилля, связь общего решения однородного уравнения с общим решением неоднородного уравнения, метод вариации произвольной постоянной.

23. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Формула сдвига.

24. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о виде решений, соответствующих корню характеристического полинома кратности k.

25. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о кратности корня характеристического полинома.

26. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Построение ФСР.

27. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольной постоянной. Частное решение в случае неоднородности в виде квазиполинома. Метод комплексных амплитуд.

28. Линейные уравнения Эйлера.

29. Постановка краевой задачи. Условие однозначной разрешимости. Условия, при которых краевая задача имеет бесконечно много решений, не имеет решений.

30. Постановка краевой задачи. Эквивалентные условия однозначной разрешимости краевой задачи.

31. Постановка краевой задачи. Сведение задачи (α, β, f) к задаче $(0, 0, \widetilde{f})$.

32. Постановка краевой задачи. Решение задачи $(0, 0, f)$ в случае однозначной разрешимости.

33. Функция Грина краевой задачи, три ее свойства.

34. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Сведение к краевой задаче для уравнения, не содержащего первую производную.

35. Задача Штурма – Лиувилля. Размерность пространства собственных функций, соответствующих одному собственному значению.

36. Задача Штурма – Лиувилля. Ортогональность с весом собственных функций.

37. Задача Штурма – Лиувилля. Вещественность собственных значений.

38. Задача Штурма – Лиувилля. Существование вещественной собственной функции, соответствующей вещественному собственному значению.

39. Задача Штурма – Лиувилля. Теорема об односторонней ограниченности множества собственных значений (доказательство для случая $y(a) = y(b) = 0$).

40. Задача Штурма – Лиувилля. Количество собственных значений, их расположение. Теорема Стеклова: разложение дважды непрерывно дифференцируемых функций по собственным функциям.

41. Нелинейные дифференциальные уравнения высокого порядка. Методы понижения порядка.