ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вопросы к экзамену

Зимняя сессия 2021–2022

1. Определение решения дифференциального уравнения $y' = f(t, y)$, определение непродолжаемого решения. Постановка задачи Коши. Формулировки теорем Пеано и Пикара. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения, определение интегральной кривой. Поле направлений, изоклины.

2. Уравнения с разделяющимися переменными, уравнения вида $y' = \varphi(\alpha t + \beta y + \gamma)$, уравнения с однородной правой частью $y' = \varphi(\frac{y}{t})$, уравнения вида $y' = \varphi(\frac{\alpha_1 t + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 t + \beta_2 y + \gamma_2})$.

3. Линейные уравнения первого порядка. Принцип суперпозиции. Связь общего решения однородного уравнения с общим решением неоднородного уравнения. Метод вариации произвольной постоянной. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати.

4. Уравнения в симметричной форме. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

5. Формулировка теоремы Пикара для уравнений первого порядка. Доказательство: эквивалентность задачи Коши и интегрального уравнения (лемма 1), корректность определения последовательности Пикара (лемма 2).

6. Формулировка теоремы Пикара для уравнений первого порядка. Доказательство: оценка на модуль разности элементов последовательности Пикара (лемма 3), равномерная сходимость последовательности Пикара (лемма 4).

7. Формулировка теоремы Пикара для уравнений первого порядка. Доказательство: локальная единственность решения (лемма 5), глобальная единственность решения (лемма 6).

8. Формулировка теоремы Пикара для уравнений первого порядка. Доказательство: глобальная единственность решения (лемма 6), непродолжаемое решение определено на открытом интервале (лемма 7).

9. Линейные однородные системы. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения.

10. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Формула решения задачи Коши в виде степенного ряда (с доказательством). Матричная экспонента. Свойства матричной экспоненты: задача Коши для e^{tA}, условие для выполнения равенства $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$, невырожденность e^{tA}.

11. Жорданова форма матрицы.

12. Вычисление матричной экспоненты с помощью жордановой формы матрицы. Решение линейных однородных систем $\frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y}$ с использованием жорданова базиса матрицы A.

13. Линейная зависимость/независимость вектор-функций. Связь линейной зависимости в точке и на интервале для решений линейной однородной системы. Формула Остроградского – Лиувилля для систем (вывод формулы для случая $n = 2$).

14. Размерность пространства решений линейной однородной системы. Общая формула решения линейной однородной системы. Определения ФСР, ФМР.

15. Линейные однородные системы. Определения ФСР, ФМР. Свойства ФМР: невырожденность ФМР, задача Коши для ФМР, связь между двумя ФМР.

16. Линейные неоднородные системы. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения. Метод вариации произвольной постоянной. Связь общего решения однородной системы с общим решением неоднородной системы.

17. Линейные уравнения высокого порядка. Сведение уравнений к системе. Теорема о связи между решением системы и решением соответствующего уравнения.

18. Теория линейных уравнений высокого порядка как следствие теории линейных систем: теорема существования и единственности решения задачи Коши, размерность пространства решений линейного однородного уравнения, определения ФСР, ФМР, формула Остроградского – Лиувилля, связь общего решения однородного уравнения с общим решением неоднородного уравнения.

19. Линейные однородные уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Разложение дифференциального оператора высокого порядка в суперпозицию элементарных дифференциальных операторов. Формула сдвига.

20. Линейные однородные уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о виде ФСР для линейного однородного уравнения.

21. Линейные неоднородные уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами. Нахождение частного решения в случае специальной правой части (квазиполинома). Нахождение частного решения с помощью метода вариации произвольной постоянной.

22. Линейные уравнения Эйлера.

23. Краевые задачи на отрезке для линейных систем. Теорема об однозначной разрешимости краевой задачи. Решение краевой задачи в случае однозначной разрешимости.

24. Краевые задачи на отрезке для линейных систем. Матрица Грина. Три ее свойства. Существование и единственность матрицы Грина, удовлетворяющей трем свойствам.

25. Краевые задачи на отрезке для уравнений высокого порядка. Теорема об однозначной разрешимости краевой задачи. Решение краевой задачи в случае однозначной разрешимости. Функция Грина, три ее свойства. Существование и единственность функции Грина, удовлетворяющей трем свойствам. Пример: краевые задачи на отрезке для уравнений второго порядка.

26. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевой задачи. Сведение к краевой задаче для уравнения, не содержащего первую производную. Размерность пространства собственных функций, соответствующих одному собственному значению.

27. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевой задачи. Ортогональность собственных функций. Вещественность собственных значений. Счетность собственных значений (без доказательства). Теорема В.А. Стеклова (без доказательства).

28. Нелинейные системы. Определение решения. Постановка задачи Коши. Формулировка теоремы Пикара для систем. Нелинейные уравнения высокого порядка,

постановка задачи Коши, теорема Пикара. Сведение уравнений высокого порядка к системе.

29. Методы понижения порядка нелинейных дифференциальных уравнений (решение задач).