МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

В. Г. Сербо, В. С. Черкасский

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Электронный учебник

Новосибирск
2013

Аннотация.Факультативный спецкурс «Дополнительные главы аналитической механики» является естественным дополнением к обязательному курсу «Аналитическая механика», который читается на физическом факультете НГУ. Есть много интересных задач и полезных методов их решения, которые не входят в обязательный курс не потому, что они второстепенные или не интересные, а просто по недостатку времени. Часть таких вопросов, представляющая общефизический интерес, естественным образом и вошла в данный спецкурс. Отметим две особенности этого спецкурса.

1. Набор вопросов в данном пособии концентрируется вокруг двух главных проблем — задача Кеплера и гармонический осциллятор с различными возмущениями в виде дополнительных электрических или магнитных полей. Эти две задачи являются центральными на первом этапе освоения квантовой механики, поэтому так важно хорошо освоить их уже в рамках классической механики.
2. В большинстве рассматриваемых задач полученные решения иллюстрировались с помощью компьютерных демонстраций. Использование пакета Mathematica позволяло представить в реальном времени движение частицы в сложном наборе силовых полей при различных начальных условиях. Эти демонстрации являются важной неотъемлемой частью спецкурса, они вызывают живой интерес студентов и нередко проясняют существо дела быстрее и нагляднее, чем многословное описание.

Разработанный по мотивам этих лекций электронный учебник снабжён динамическими интерактивными иллюстраций, которые помогают студенту самостоятельно экспериментировать с параметрами задачи и наблюдать возникающие при этом эффекты. Динамические иллюстрации реализованы с помощью бесплатного приложения CDF Player, разработанного корпорацией Wolfram Research Inc., которое позволяет визуализировать решения задач, построенные с помощью коммерческого пакета *Mathematica* той же корпорации, без использования самого пакета. Гиперссылки на разработанные интерактивные модели внедрены непосредственно в данный PDF файл, который представляет собой корневой модуль учебного пособия. Для его просмотра мы рекомендуем использовать бесплатно распространяемую программу Adobe Reader. Существуют также другие свободно распространяемые вьюеры PDF файлов, например FoxitReader. Кроме того, необходимо загрузить и установить на компьютере бесплатную программу для проигрывания CDF-файлов CDFPlayer.

Электронный учебник разработан в рамках реализации Программы развития НИУ НГУ на 2009-2018годы.

Оглавление

Предисловие

Данное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций по спецкурсу *Дополнительные главы аналитической механики* на физическом факультете Новосибирского государственного университета. Этот факультативный спецкурс является естественным дополнением к обязательному курсу *Аналитическая механика*, для которого основными пособиями являются «Лекции по аналитической механике» Коткина, Сербо и Черных [1] и «Сборник задач по классической механике» Коткина и Сербо [2]. Оба курса читались в течение весеннего семестра 2-го курса параллельно со второй частью электродинамики и перед курсом квантовой механики.

Аналитическая механика читается в НГУ как первая часть курса теоретической физики, это в полной мере относится и к спецкурсу. Есть много интересных задач и полезных методов их решения, которые не входят в обязательный курс не потому, что они второстепенные или не интересные, а просто по недостатку времени. Часть таких вопросов, представляющая общефизический интерес, естественным образом и вошла в спецкурс, тематика которого видна из оглавления. При этом некоторые из этих задач были позаимствованы из указанных выше пособий [1], [2]. Отметим две особенности этого спецкурса.

(i) Набор вопросов в данном пособии концентрируется вокруг двух главных проблем — задача Кеплера и гармонический осциллятор с различными возмущениями в виде дополнительных электрических или магнитных полей. Эти две задачи являются центральными на первом этапе освоения квантовой механики, поэтому так важно хорошо освоить их уже в рамках классической механики.

(ii) В большинстве рассматриваемых задач полученные решения иллюстрировались с помощью компьютерных демонстраций. Использование пакета Mathematica позволяло представить в реальном времени движение частицы в сложном наборе силовых полей при различных начальных условиях. Эти демонстрации являются важной неотъемлемой частью спецкурса, они вызывают живой интерес студентов и нередко проясняют существо дела быстрее и нагляднее, чем многословное описание.

§1. Задача Кеплера

Цель этого раздела — напомнить хорошо известные факты относительно движения частицы в кулоновском поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r},$$

где $\alpha = G m_{\text{С}} m_{\text{З}}$ для движения Земли в гравитационном поле Солнца или $\alpha = e^2$ для движения электрона в электрическом поле протона (атом водорода).

1.1. Радиальное движение

Для изучения движения частицы удобно воспользоваться законами сохранения энергии E и момента импульса $\mathbf{M}$:

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + U(r) = \text{const}\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{M} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{const}\,. \tag{2}$$

Из уравнения (2) следует, что орбита находится в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{M}$, пусть это будет xy-плоскость. Таким образом, наличие сохраняющегося момента импульса позволяет свести трёхмерную задачу к двумерной. Вводя полярные координаты r и φ в плоскости движения (рис. 1), получаем

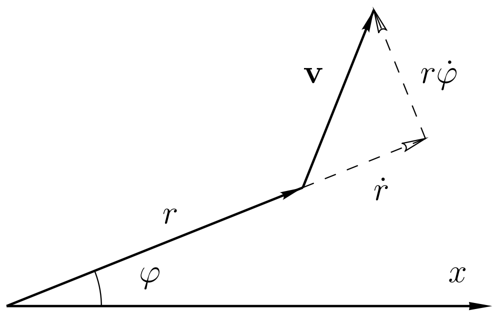

Рис. 1.
Компоненты скорости в полярных координатах

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (r\dot{\varphi})^2 + U(r)\,, \tag{3}$$

$$\mathbf{M} = (0, 0, M), \quad M = m r^2 \dot{\varphi}\,. \tag{4}$$

Используя (4), исключим $\dot{\varphi}$ из (3)

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{эф}}(r); \quad U_{\text{эф}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}\,. \tag{5}$$

В итоге, радиальное движение сведено к одномерному движению в эффективном поле $U_{\text{эф}}(r)$ с центробежным барьером $M^2/(2mr^2)$.

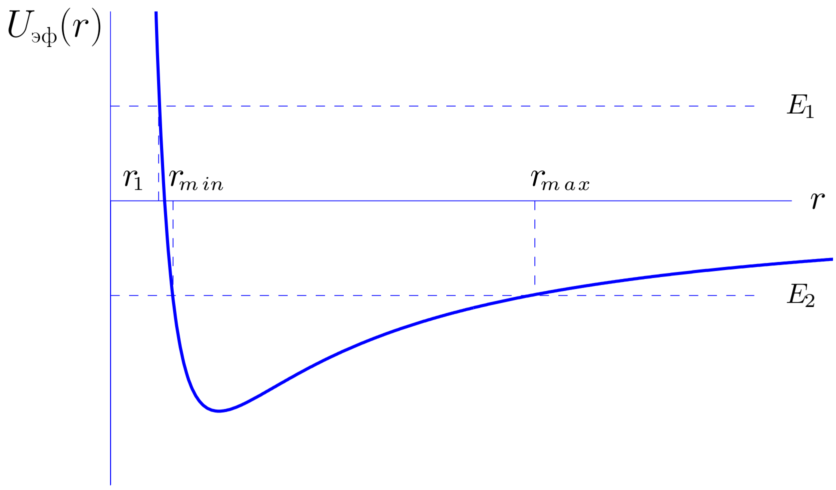

Рис. 2.
Эффективная потенциальная энергия $U_{эф}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$

В нашем случае

$$U_{эф}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}\,, \tag{6}$$

и мы можем увидеть из рис. 2 следующее:

если $E_1 \geqslant 0$, то частица, приходящая из бесконечности, будет отражена потенциальным барьером $U_{эф}(r)$ в точке r_1 и снова уйдёт на бесконечность (инфинитное движение):

$$r_1 \leqslant r \leqslant \infty \quad \text{при} \quad E_1 \geqslant 0\,; \tag{7}$$

если $E_2 < 0$, то частица испытывает радиальные колебания в области (финитное движение)

$$r_{\min} \leqslant r \leqslant r_{\max} \quad \text{при} \quad E_2 < 0\,. \tag{8}$$

1.2. Траектории движения

Рассмотрим более детально траекторию частицы. Вид траектории можно найти из (4) и (5). Действительно, из (5) получаем

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{эф}(r)]} \quad \text{для} \quad \dot{r} \gtrless 0\,,$$

или

$$dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dr}{\sqrt{E - U_{эф}(r)}}\,. \tag{9}$$

Отсюда следует, что

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{E - U_{эф}(r)}} + t_0.$$

Используя (4) в форме

$$dt = \frac{mr^2}{M}d\varphi\,, \tag{10}$$

исключим dt из (9) и найдём уравнение траектории:

$$\varphi = \pm\frac{M}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{E-U_{\text{эф}}(r)}}+\varphi_0\,. \tag{11}$$

В случае кулоновского поля

$$\varphi = \pm\int\frac{M}{r^2}\,\frac{dr}{\sqrt{2mE+\dfrac{2m\alpha}{r}-\dfrac{M^2}{r^2}}}+\mathrm{const}\,. \tag{12}$$

Если ввести так называемый *параметр орбиты*

$$p=\frac{M^2}{m\alpha} \tag{13}$$

и новую безразмерную переменную

$$u=\frac{p}{r}\,,$$

то получим

$$\varphi=\mp\int\frac{du}{\sqrt{e^2-(u-1)^2}}+\mathrm{const}\,,$$

где величина

$$e=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \tag{14}$$

называется *эксцентриситетом.*

Интегрирование выполняется элементарно

$$\varphi=\pm\arccos\frac{u-1}{e}+\mathrm{const}$$

или

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\varphi-\mathrm{const})}\,. \tag{15}$$

Мы видим, что $r=r_{\min}$ при $\varphi=\mathrm{const}$. Выбирая $\mathrm{const}=0$, имеем $r=r_{\min}$ при $\varphi=0$ (для движения планеты эта точка называется *перигелием*). В результате получаем уравнение траектории в виде

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}\,. \tag{16}$$

Это известные кривые, соответствующие коническим сечениям:
гипербола для $e>1$ (при $E>0$),
парабола для $e=1$ (при $E=0$),
эллипс для $e<1$ (при $E<0$),
окружность для $e=0$ (при $E=-m\alpha^2/(2M^2)$).

Отметим, наконец, что параметр p из (13) равен значению радиуса при $\varphi=\pi/2$:

$$p=\frac{M^2}{m\alpha}=r\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)\,.$$

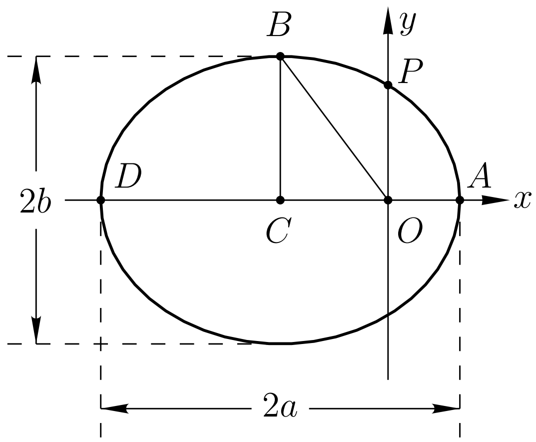

Рис. 3.
Элементы эллиптической траектории. Запустить модель траектории.

1.3. Эллиптические орбиты

Рассмотрим более подробно важный случай $E < 0$. В этом случае траектория — эллипс с центром C, фокусом O, большой полуосью $a = CA = (1/2)\,DA$, малой полуосью $b = CB$ и параметром траектории $p = OP$ (рис. 3).

Нетрудно показать, что главная полуось зависит только от энергии (но не от момента импульса):

$$a = \frac{1}{2}\,(OA + DO) = \frac{1}{2}\,(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}\right) = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}\,.$$

По определению эксцентриситета малая полуось b связана с большой полуосью a соотношением

$$b = \sqrt{1-e^2}\;a\,,$$

из которого следует, что b зависит не только от энергии, но и от момента импульса:

$$b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}\,. \tag{17}$$

Наконец, выпишем полезные соотношения:

$$r_{\min} = (1-e)\,a, \quad r_{\max} = (1+e)\,a, \quad p = (1-e^2)\,a\,, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\,, \tag{18}$$

где T — период обращения.

§2. Дополнительный интеграл движения в задаче Кеплера

В кулоновском поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}\,,$$

кроме энергии E и момента импульса $\mathbf{M}$, имеется дополнительный интеграл движения

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{M} - \alpha\,\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{const} \tag{19}$$

(так называемый *вектор Лапласа–Рунге–Ленца*). Докажем это, используя уравнение движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3}\,.$$

Полная производная по времени от вектора $\mathbf{A}$ равна

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{M} + \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{M}} - \alpha\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\,\frac{1}{r}\right) =$$

$$-\frac{\alpha}{mr^3}\mathbf{r} \times \mathbf{M} - \alpha\,\mathbf{v}\,\frac{1}{r} + \mathbf{r}\frac{d(1/r)}{dt})\,. \tag{20}$$

Используя уравнение

$$\mathbf{r} \times \mathbf{M} = m\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = m\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{v}) - m\mathbf{v}r^2$$

и соотношение

$$\frac{d(1/r)}{dt} = -\frac{1}{r^2}\,\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot{\mathbf{r}}\mathbf{r}}{r}\,,$$

получим

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0\,. \tag{21}$$

Чтобы выяснять значение вектора $\mathbf{A}$, возьмём скалярное произведение векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{r}$. Обозначив через φ угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{A}$, найдём

$$\mathbf{r}\mathbf{A} = rA\cos\varphi = \mathbf{r}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{M}) - \alpha r = \frac{M^2}{m} - \alpha r = \alpha(p - r)\,,$$

где $p = M^2/(m\alpha)$. Отсюда немедленно следует:

$$r = \frac{p}{1 + (A/\alpha)\,\cos\varphi}\,,$$

то есть вектор $\mathbf{A}$ направлен из центра поля в точку $r = r_{\min}$ (к перигелию) и модуль этого вектора пропорционален эксцентриситету

$$|\mathbf{A}| = \alpha e\,. \tag{22}$$

Таким образом, постоянный вектор $\mathbf{A}$ определяет расположение и форму орбиты.

§3. Прецессия перигелия под действием возмущения $\delta U(r)$

Рассмотрим движение частицы в поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \delta U(r)\,, \tag{23}$$

где $\delta U(r)$ — малое возмущающее центральное поле. Уравнение движения имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3} - \delta U'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}\,, \tag{24}$$

где

$$\delta U'(r) = \frac{d(\delta U)}{dr}\,.$$

Удобно следить за усреднённым по периоду движения изменением вектора $\mathbf{A}$ (см. §2), потому что как раз этот вектор может дать нам наглядную информацию относительно орбиты частицы.

В данной задаче вектор $\mathbf{M}$, как и ранее, сохраняется, а производная по времени от вектора $\mathbf{A}$ уже не равна нулю (ср. с (20)–(21)):

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{M} - \alpha\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{1}{m}\delta U'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{M}\,.$$

Усредняя это уравнение по времени за один период движения частицы по эллипсу, получим

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = -\left\langle \frac{\delta U'}{m}\,\frac{\mathbf{r}}{r} \right\rangle \times \mathbf{M}\,.$$

Очевидно, что вектор

$$\left\langle \frac{\delta U'}{m}\,\frac{\mathbf{r}}{r} \right\rangle$$

направлен вдоль главной полуоси эллипса, то есть параллельно вектору $\langle \mathbf{A} \rangle$:

$$\left\langle \frac{\delta U'}{m}\,\frac{\mathbf{r}}{r} \right\rangle = C\,\langle \mathbf{A} \rangle\,,$$

где

$$C = \left\langle \frac{\delta U'}{m}\,\frac{\mathbf{r}\mathbf{A}}{rA^2} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\delta U'(r(t))}{m}\,\frac{\mathbf{r}(t)\mathbf{A}}{r(t)A^2}\,dt$$

и T — период движения частицы по эллипсу. Используя уравнения

$$\mathbf{r}\mathbf{A} = rA\cos\varphi, \quad M = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow dt = \frac{mr^2}{M}\,d\varphi, \quad A = \alpha e\,,$$

получаем

$$C = \frac{1}{\alpha e M T}\int_0^{2\pi} r^2 \delta U'(r)\cos\varphi d\varphi\,, \tag{25}$$

где зависимость r от φ определяется невозмущенным движением

$$r \equiv r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}\,. \tag{26}$$

В итоге (опуская знак усреднения) найдём

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -C\;\mathbf{A} \times \mathbf{M}\,, \tag{27}$$

откуда следует, что вектор $\mathbf{A}$ вращается с малой угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega} = C\,\mathbf{M}\,. \tag{28}$$

Чтобы пояснить этот ответ, напомним хорошо известный факт, что в постоянном магнитном поле $\mathbf{B}$ уравнение движения заряженной частицы

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e\mathbf{B}}{mc}\times\mathbf{v} \tag{29}$$

соответствует вращению частицы с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_B = -\frac{e\mathbf{B}}{mc} \tag{30}$$

(так называемая циклотронная частота).

Из (28) и (25) следует, что смещение перигелия за время одного периода равно

$$\delta\varphi = \omega T = \frac{1}{\alpha e}\int_0^{2\pi} r^2 \delta U'(r)\cos\varphi d\varphi\,, \tag{31}$$

где $r \equiv r(\varphi)$ определён в (26).

В частности, для возмущения в форме

$$\delta U(r) = -\frac{\beta}{r^2} \tag{32}$$

имеем $\delta U'(r) = 2\beta/r^3$ и

$$\delta\varphi = \frac{2\beta}{\alpha e}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\cos\varphi d\varphi = \frac{2\beta}{\alpha e}\int_0^{2\pi}\frac{1+e\cos\varphi}{p}\cos\varphi d\varphi = \frac{2\pi\beta}{\alpha p}\,. \tag{33}$$

На рис. 4 показана траектория движения в кулоновском поле с такой добавкой. Частица стартует из точки апогелия и успевает совершить 5 радиальных колебаний.

Аналогично, для возмущения

$$\delta U = -\frac{\gamma}{r^3} \tag{34}$$

получаем

$$\delta\varphi = \frac{3\gamma}{\alpha e}\int_0^{2\pi}\frac{(1+e\cos\varphi)^2}{p^2}\cos\varphi d\varphi = \frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}\,. \tag{35}$$

§4. Смещение перигелия планет в специальной теории относительности (СТО)

В этом разделе мы покажем, что эффекты СТО в задаче Кеплера эквивалентны дополнительному центральному полю возмущения вида

$$\delta U(r) = -\frac{\beta}{r^2}\,, \tag{36}$$

и, следовательно, они приводят к прецессии перигелия планеты. В конце этого раздела мы сравниваем вычисленное значение этой прецессии с данными астрономических наблюдений.

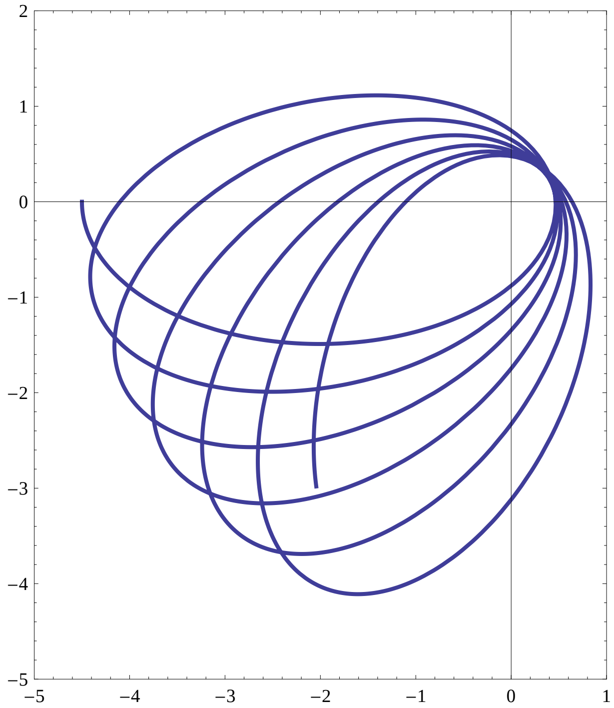

Рис. 4.
Траектория движения частицы в поле $U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$. Запустить модель траектории.

4.1. Законы сохранения в СТО

Напомним выражение релятивистского импульса

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

и момента импульса

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\gamma\, \mathbf{r} \times \mathbf{v}\,. \tag{37}$$

Точно так же, как и в §1 при изучении движения частицы в кулоновском поле, мы можем использовать законы сохранения релятивистской энергии $\mathcal{E}$ и момента импульса (37):

$$\mathcal{E} = m\gamma c^2 - \frac{\alpha}{r} = \text{const}\,, \tag{38}$$

$$\mathbf{M} = (0, 0, M) = \mathbf{const}; \quad M = m\gamma r^2 \dot{\varphi}\,. \tag{39}$$

Отметим, что релятивистская энергия $\mathcal{E}$ отличается от нерелятивистской энергии

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\alpha}{r}.$$

В нерелятивистском пределе

$$\mathcal{E} = E + mc^2 \quad \text{для} \quad v \ll c\,. \tag{40}$$

Из (39) имеем (ср. с (10)):

$$dt = \gamma \frac{mr^2}{M} d\varphi \,. \tag{41}$$

4.2. Оценка эффекта СТО

Дадим грубую оценку обсуждаемого эффекта. Естественно ожидать, что смещение перигелия $\delta\varphi$ порядка произведения типичного значения угла, скажем π и малого параметра нашей задачи ϵ, то есть $\delta\varphi \sim \pi\epsilon$. В нашем случае $\epsilon \sim v^2/c^2$, следовательно, мы ожидаем, что

$$\delta\varphi \sim \pi \frac{v^2}{c^2} \,. \tag{42}$$

Это значение очень мало для всех планет.

4.3. Точное уравнение для орбиты

Перепишем уравнение (38) в форме

$$\left(\mathcal{E} + \frac{\alpha}{r}\right)^2 = \left(m\gamma c^2\right)^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2 = m^2c^4 + m^2c^2\gamma^2\left[\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2\right]$$

и затем подставим выражение

$$r\dot{\varphi} = \frac{M}{m\gamma r} \,,$$

полученное из (39). Это даёт

$$\left(\mathcal{E} + \frac{\alpha}{r}\right)^2 - m^2c^4 - c^2\frac{M^2}{r^2} = \left(\gamma mc\frac{dr}{dt}\right)^2 \,. \tag{43}$$

Отсюда с помощью (41) получаем

$$\left(\mathcal{E} + \frac{\alpha}{r}\right)^2 - m^2c^4 - c^2\frac{M^2}{r^2} = c^2\left(\frac{M}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \,. \tag{44}$$

Обратите внимание на то, что в этом уравнении лоренц–фактор γ исчез!

Теперь можно преобразовать (44) к обычному уравнению траектории

$$d\varphi = \pm\frac{\dfrac{M}{r^2}dr}{\sqrt{\dfrac{\mathcal{E}^2 - m^2c^4}{c^2} + \dfrac{2\mathcal{E}\alpha}{c^2 r} + \dfrac{\alpha^2}{c^2r^2} - \dfrac{M^2}{r^2}}} \,, \tag{45}$$

который удобно сравнивать с нерелятивистским уравнением траектории

$$d\varphi = \pm\frac{\dfrac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2mE - 2mU(r) - \dfrac{M^2}{r^2}}}.$$

Отсюда видны следующие правила соответствия

$$m \to \frac{\mathcal{E}}{c^2}\,, \quad E \to \frac{\mathcal{E}^2 - m^2c^4}{2\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E} + mc^2}{2\mathcal{E}}(\mathcal{E} - mc^2)\,,$$

$$2mU(r) \to -\frac{2\mathcal{E}}{c^2}\frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha^2}{c^2 r^2}\,.$$

Другими словами, уравнение (45) соответствует движению частицы в кулоновском поле $U(r) = -\alpha/r$ с возмущением в виде малого дополнительного центрального поля притяжения

$$\delta U(r) = -\frac{\beta}{r^2}, \quad \beta = \frac{\alpha^2}{2\mathcal{E}} \approx \frac{\alpha^2}{2mc^2}\,. \tag{46}$$

4.4. Вычисление $\delta\varphi$ и сравнение его с наблюдательными данными

Используя (33), получаем

$$\delta\varphi_{\text{СТО}} = \frac{2\pi\beta}{\alpha p} = \pi\frac{\alpha/p}{mc^2}$$

или (имея в виду, что $p = (1-e^2)a$ (см. (18))

$$\delta\varphi_{\text{СТО}} = \pi\frac{\alpha/a}{mc^2}\frac{1}{1-e^2}\,. \tag{47}$$

Использование теоремы о вириале для кулоновского поля

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = -E = \frac{\alpha}{2a}$$

позволяет переписать (47) в виде

$$\delta\varphi_{\text{СТО}} = \pi\frac{\langle v^2 \rangle}{c^2}\frac{1}{1-e^2}\,, \tag{48}$$

который близок к оценочному выражению (42).

Для движения Земли:

$$e = 0,017, \quad \frac{v}{c} \approx \frac{30 \ \text{км/с}}{300\,000 \ \text{км/с}} = 10^{-4}; \quad \delta\varphi_{\text{СТО}} \approx \pi\cdot 10^{-8} \quad \text{радиан} \tag{49}$$

или

$$\delta\varphi_{\text{СТО}} \approx 0,6'' \quad \text{в столетие.} \tag{50}$$

Но влияние Луны (см. следующий параграф) и других планет приводит к эффектам на три порядка большим.

Для Меркурия ситуация существенно более простая. Для него из (47) следует

$$\delta\varphi_{\text{СТО}} \approx 7,16355'' \quad \text{в столетие.} \tag{51}$$

Влияние других планет в этом случае лишь на порядок превышает наблюдаемый эффект. После исключения этого влияния, наблюдательная прецессия перигелия Меркурия равна(см. [3], раздел 6.4):

$$\delta\varphi_{\text{наблюд}} = (42,9777 \pm 0,0050)'' \quad \text{в столетие.} \tag{52}$$

Это значение $\delta\varphi_{\text{наблюд}}$ находится в очевидном противоречии с предсказанием (51) СТО, но прекрасно согласуется с предсказанием ОТО — общей теории относительности (см. [4], §101):

$$\delta\varphi_{\text{ОТО}} = 6\delta\varphi_{\text{СТО}} = 42,9813'' \quad \text{в столетие.} \tag{53}$$

§5. Движение системы Земля-Луна в поле Солнца

Расстояние между Землей и Луной

$$a \approx 0,38 \cdot 10^6 \ \text{ км}$$

много меньше, чем среднее расстояние

$$r \approx 150 \cdot 10^6 \ \text{ км}$$

между Землей и Солнцем, $a \ll r$. Следовательно, в первом приближении система Земля-Луна — материальная точка (частица), которая движется по эллиптической орбите вокруг Солнца (мы игнорируем тот факт, что существуют другие планеты). В следующем приближении мы должны принять во внимание, что система Земля-Луна не частица, а скорее система с распределенными массами.

5.1. Оценка скорости прецессии перигелия

Простейший способ принять во внимание распределение масс сводится к усреднению движения Луны вокруг Земли (“размазыванию” Луны по окружности радиуса a) и замене реальной системы шаром массы $m_З$ с кольцом массы $m_Л$ вокруг него на расстоянии a.

На больших расстоянии $r \gg a$ потенциал такой системы выглядит как суперпозиция потенциала точки и квадруполя:

$$\varphi(r) = \varphi_{\text{точ}} + \varphi_{\text{квадр}}\,,$$

$$\varphi_{\text{точ}}(r) = -\frac{G(m_З + m_Л)}{r}, \quad \varphi_{\text{квадр}}(r) \sim \frac{GQ}{r^3}\,,$$

где

$$Q \sim m_Л a^2$$

является квадрупольным моментом масс.

Следовательно, в этой задаче имеется малый параметр

$$\frac{\varphi_{\text{квадр}}}{\varphi_{\text{точ}}} \sim \frac{Q}{m_З r^2} \sim \frac{m_Л}{m_З}\left(\frac{a}{r}\right)^2\,,$$

И поэтому, действуя так же как и в § 4.2, мы получаем оценку для прецессии перигелия системы

$$\delta\varphi \sim \pi\,\frac{m_Л}{m_З}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \sim \pi \cdot 10^{-7} \quad \text{радиан}\,. \tag{54}$$

Это значение почти на порядок величины больше, чем эффект специальной теории относительности — ср. с (49).

5.2. Разложение точного потенциала

Пусть точка *Ц* — центр масс системы Земля-Луна. Введём следующие расстояния:
r — расстояние от Солнца до точки *Ц*,
$r_З$ — расстояние от Солнца до центра Земли,

$r_{Л}$ — расстояние от Солнца до Луны,
$a_{З}$ — расстояние от точки *Ц* до центра Земли,
$a_{Л}$ — расстояние от точки *Ц* до Луны.
Отметим, что

$$\mathbf{r}_{З} = \mathbf{r} + \mathbf{a}_{З}, \;\; \mathbf{r}_{Л} = \mathbf{r} + \mathbf{a}_{Л}, \;\; a_{З} + a_{Л} = a, \;\; m_{З}a_{З} = m_{Л}a_{Л}, \;\; \frac{m_{З}}{m_{Л}} \approx 81\,. \tag{55}$$

Точное выражение для потенциальной энергии системы Земля–Луна в поле Солнца имеет вид

$$U = -\frac{Gm_{З}m_{С}}{r_{З}} - \frac{Gm_{Л}m_{С}}{r_{Л}}\,, \tag{56}$$

где

$$r_{З} = |\mathbf{r} + \mathbf{a}_{З}| = \sqrt{r^2 + 2ra_{З}\cos\psi + a_{З}^2} = r\sqrt{1+\epsilon}, \quad \epsilon = 2\frac{a_{З}}{r}\cos\psi + \frac{a_{З}^2}{r^2} \tag{57}$$

и ψ — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}_{З}$, а выражение для $r_{Л}$ может быть получено из $r_{З}$ заменой

$$a_{З} \to -a_{Л}\,. \tag{58}$$

Поскольку ϵ — малый параметр, $|\epsilon| \ll 1$, мы можем разложить $1/r_{З}$ (и $1/r_{Л}$) по этому параметру до членов второго порядка по $a_{З}/r$ (или $a_{Л}/r$) включительно (ниже считаем $n = -1/2$)

$$\frac{1}{r_{З}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} = \frac{1}{r}(1+\epsilon)^n =$$

$$\frac{1}{r}\left[1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 + ...\right] = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 + ...\right)\,.$$

Обратите внимание на то, что в сумме

$$\frac{m_{З}}{r_{З}} + \frac{m_{Л}}{r_{Л}}$$

все члены первого порядка по $a_{З,Л}/r$ (дипольные слагаемые)

$$-\frac{1}{r}\left(\frac{m_{З}a_{З}}{r}\cos\psi - \frac{m_{Л}a_{Л}}{r}\cos\psi\right)$$

сокращают друг друга точно (учтём (55)). В результате для потенциальной энергии (56) получаем выражение

$$U = U_0 + \delta U\,,$$

в котором основное слагаемое

$$U_0 = -\frac{\alpha}{r}\,, \quad \alpha = G\,(m_{З} + m_{Л})\,m_{С} \tag{59}$$

соответствует точечному потенциалу, а слагаемое

$$\delta U = -\frac{Gm_{С}}{r}\,\frac{m_{З}a_{З}^2 + m_{Л}a_{Л}^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2}\right) \tag{60}$$

соответствует квадрупольному возмущению.

5.3. Усреднение и ответ

После усреднения δU по периоду месячного движения Луны вокруг Земли (при этом $\langle \cos^2 \psi \rangle = 1/2$), мы получаем возмущение в виде малого центрального поля

$$\langle \delta U \rangle_\psi = -\frac{\gamma}{r^3}, \quad \gamma = \frac{1}{4}\, G m_{\text{С}} (m_{\text{З}} a_{\text{З}}^2 + m_{\text{Л}} a_{\text{Л}}^2)\,.$$

Используя (35), получим для смещения перигелия

$$\delta\varphi = \frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2} \approx \frac{3}{2}\,\pi\, \frac{m_{\text{Л}}}{m_{\text{З}}} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \approx \pi \cdot 6,5\, \cdot 10^{-8}\,, \tag{61}$$

что находится в соответствии с оценкой (54).

Сравнивая этот результат с релятивистской поправкой (49), мы видим, что

$$\delta\varphi \approx 6,5\; \delta\varphi_{\text{СТО}} \approx 4'' \quad \text{в столетие.} \tag{62}$$

Наблюдаемая величина смещения перигелия Земли много больше

$$\delta\varphi_{\text{наблюд}} = 1158'' \quad \text{в столетие} \tag{63}$$

и определяется, главным образом, влиянием Юпитера (самая большая планета Солнечной системы) и Венеры (самая близкая к Земле планета).

§6. Классический эффект Штарка

Рассмотрим движение частицы в поле

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r} - \mathbf{rF} \;\; \text{при } \mathbf{F} = \mathbf{const}\,. \tag{64}$$

Такое поле описывает частицу в кулоновском поле и поле постоянной силы $\mathbf{F}$. Например, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ для частицы с зарядом q в однородном и постоянном электрическом поле $\mathbf{E}$ (это так называемый эффект Штарка в атоме водорода). Другой пример — влияние поля Луны (которое соответствует почти постоянной силе около Земли) на движение спутника вокруг Земли.

6.1. Дополнительный интеграл движения

Уравнение движения в данном поле

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}\,.$$

Энергия E сохраняется, но момент импульса $\mathbf{M}$ и вектор Лапласа $\mathbf{A} = \mathbf{v} \times M - \alpha(\mathbf{r}/r)$ не сохраняются:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}\,, \tag{65}$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{M} + \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{M}} - \alpha \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{m}\mathbf{F} \times \mathbf{M} + \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{F})\,.$$

Если мы возьмём скалярное произведение векторов $\mathbf{F}$ и $d\mathbf{A}/dt$, то сможем преобразовать последнее уравнение к виду

$$\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\mathbf{F}\cdot(\mathbf{v}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{F}))$$

или к виду

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{FA})=(\mathbf{r}\times\mathbf{F})\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{v})=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{F})^2\,.$$

Это означает, что

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{FA}+\frac{1}{2}(\mathbf{r}\times\mathbf{F})^2\right]=0\,,$$

то есть в данной задаче существует дополнительный интеграл движения

$$\mathbf{AF}+\frac{1}{2}(\mathbf{r}\times\mathbf{F})^2=\mathrm{const}\,. \tag{66}$$

6.2. Значение этого интеграла движения в случае малого F

Для малого F орбита близка к эллипсу с большой осью вдоль направления вектора $\mathbf{A}$ и с эксцентриситетом $e=A/\alpha$. В этом случае

$$\mathbf{AF}=AF\cos\psi=\alpha eF\,\cos\psi\approx\mathrm{const} \tag{67}$$

или

$$e\cos\psi=e_0\,, \tag{68}$$

где ψ — угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{A}$ (рис. 5), а e_0 — значение эксцентриситета e при $\psi=0$. Из (68) видно, что величина малой полуоси

$$b=a\sqrt{1-e^2}=\frac{\alpha}{2|E|}\sqrt{1-\left(\frac{e_0}{\cos\psi}\right)^2}\,. \tag{69}$$

уменьшается с увеличением угла $|\psi|$ и достигает минимума $b=0$ при $\psi=\pm\psi_m$, где $\psi_m=\arccos e_0$.

Далее в этом разделе мы будем рассматривать только случай малого F.

6.3. Усреднённая скорость изменения момента импульса

После усреднения уравнения (65) за один период движения по эллипсу, получаем

$$\left\langle\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right\rangle=\langle\mathbf{r}\rangle\times\mathbf{F}\,.$$

Очевидно, что вектор $\langle\mathbf{r}\rangle$ параллелен вектору $(-\mathbf{A})$ (рис. 5); кроме того, если $e=A/\alpha\to0$, то и $\langle\mathbf{r}\rangle\to0$. Следовательно, естественно ожидать, что

$$\langle\mathbf{r}\rangle=-C\mathbf{A}\,,$$

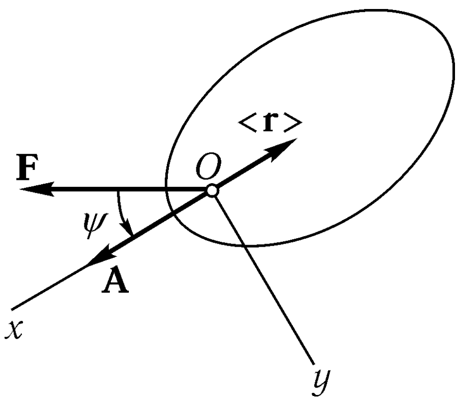

Рис. 5.
Взаимное расположение векторов $\mathbf{F}$, $\langle \mathbf{r} \rangle$ и $\mathbf{A}$

где константа $C \sim a/\alpha$. Подставляя[1])

$$x = a(\cos\xi - e), \quad t = \frac{T}{2\pi}\,(\xi - e\sin\xi)\,,$$

получим

$$\langle x \rangle = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\xi - e)\,(1 - e\cos\xi)\,d\xi = -\frac{3}{2}\,ae$$

или

$$\langle \mathbf{r} \rangle = -\frac{3}{2}\,a\,\frac{\mathbf{A}}{\alpha}\,. \tag{70}$$

В итоге

$$\left\langle \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right\rangle = -\frac{3}{2}\,\frac{a}{\alpha}\,\mathbf{A}\times\mathbf{F}\,. \tag{71}$$

6.4. Случай, когда сила F лежит в плоскости орбиты

Если сила $\mathbf{F}$ перпендикулярна вектору $\mathbf{M}$, то из соображений симметрии ясно, что орбита — плоская кривая, а вектор $\mathbf{M}$ сохраняет своё направление (с точностью до знака). Другими словами, в этом случае вектор $(-\mathbf{A})\times\mathbf{F}$ параллелен вектору $\mathbf{M} = (0, 0, M)$.

[1]Эти формулы можно получить следующим простым способом. В кулоновском поле частица движется по эллипсу рис. 3 с полуосями a и b, причём центр эллипса отстоит от центра поля на расстояние $CO = ae$. Сделаем сдвиг системы координат на это расстояние: $x' = x + ae$, тогда уравнение эллипса можно представить в параметрической форме $x' = a\cos\xi$, $y = b\sin\xi$. Полному обороту соответствует изменение параметра ξ от 0 до 2π. Так как момент импульса $M = m(x\dot y - y\dot x) = mab(1 - e\cos\xi)\,(d\xi/dt)$, то

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{mab}{M}\,(1 - e\cos\xi)\,,$$

откуда находим зависимость t от ξ в форме

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{T}{2\pi}\,(1 - e\cos\xi)\,.$$

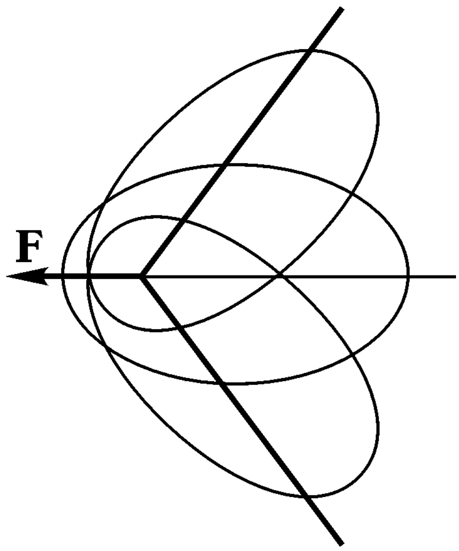

Рис. 6.
Движение частицы в кулоновском поле с малым возмущением $\delta U = -\mathbf{rF}$, вид орбиты при пяти различных значениях угла ψ

Опуская знак усреднения, мы можем переписать (71) в виде

$$\frac{dM}{dt} = \frac{3}{2} aFe\sin\psi$$

или, с помощью (68), в виде

$$\frac{dM}{dt} = \frac{3}{2} aF\sqrt{e^2 - e_0^2}\,. \tag{72}$$

Вспоминая, что (см. §1)

$$e^2 = 1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}, \quad a = \frac{\alpha}{2|E|},$$

мы получим

$$\frac{dM}{dt} = \omega\sqrt{M_0^2 - M^2}\,,\ \omega = \frac{3}{2}\frac{F}{\sqrt{2m|E|}},\ M_0 = \sqrt{m\alpha a(1-e_0^2)}.$$

Отсюда

$$\int \frac{dM}{\sqrt{M_0^2 - M^2}} = -\arccos\frac{M}{M_0} = \int \omega dt = \omega t + \mathrm{const}$$

или

$$M = M_0\cos(\omega t + \mathrm{const})\,. \tag{73}$$

Другими словами, z-компонента момента импульса осциллирует с малой частотой ω.

Итак, орбита представляет собой эллипс, покачивающийся около направления вектора $\mathbf{F}$ и меняющий в такт покачиваниям эксцентриситет, т. е. величину малой полуоси при неизменной большой полуоси. Период колебания эллипса $2\pi/\omega$ гораздо

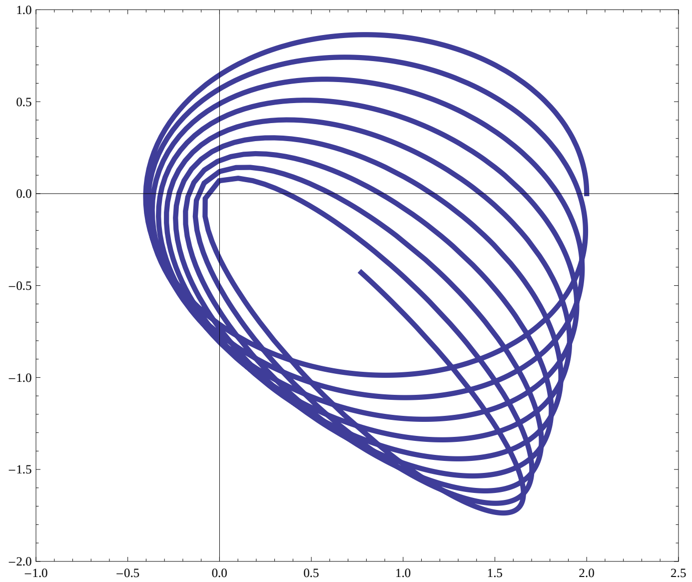

Рис. 7.
Траектория частицы в кулоновском поле с малым возмущением $\delta U = -\mathbf{rF}$. Запустить модель траектории.

больше периода T обращения частицы по эллипсу. Значению угла $\psi = 0$ соответствует положение большой оси эллипса вдоль вектора $\mathbf{F}$ (при этом малая полуось $b = a\sqrt{1-e_0^2}$ максимальна), а максимальное (минимальное) значение этого угла, равное $\pm\psi_m = \pm\arccos e_0$, соответствует значению $b = 0$ (при этом эллипс вырождается в отрезок длиною $2a$). Направление движения частицы по эллипсу также изменяется (вместе со знаком M). Вид орбиты для при пяти различных значениях угла ψ показан на рис. 6. Начальный этап такого движения показан на рис. 7. Частица стартует из апогелия и успевает совершить 9 радиальных колебаний, большая полуось эллипса медленно поворачивается по часовой стрелке, при этом малая полуось уменьшается, а перигелий приближается к центру кулоновского поля.

Общий случай, когда ориентация вектора силы $\mathbf{F}$ произвольна, рассмотрен в задаче 2.36в из [2].

§7. Классический эффект Зеемана

Рассмотрим движение заряженной частицы в кулоновском поле $U(r) = -\alpha/r$ при наличии однородного постоянного магнитного поля $\mathbf{B} = \mathbf{const}$ (это так называемый эффект Зеемана в атоме водорода). Как будет выглядеть движение частицы в этом случае?

7.1. Случай слабого магнитного поля. Теорема Лармора

Пусть магнитное поле мало, а в отсутствие магнитного поля частица совершает финитное движение в центральном поле $U(r)$. В этом случае нетрудно получить достаточно общий результат, известный под названием *теоремы Лармора*.

Запишем функцию Лагранжа рассматриваемой задачи $L(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ в инерциальной системе отсчёта $K(x, y, z)$:

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 - U(r) + \frac{e}{c}\mathbf{v}\mathbf{A}(\mathbf{r}), \tag{74}$$

где e — заряд частицы, а $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — векторный потенциал, который удобно выбрать в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{B} \times \mathbf{r}\,.$$

Рассмотрим теперь это же движение в системе отсчёта $K'(x', y', z')$, которая вращается с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ по отношение к системе K. Соотношения между радиус–векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ и скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ в системах отсчёта K и K' хорошо известны:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}'\,. \tag{75}$$

Подставив эти выражения в (74), мы получим лагранжиан нашей задачи $L'(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ в системе отсчёта K':

$$L'(\mathbf{r}', \mathbf{v}') = \frac{1}{2} m(\mathbf{v}' + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}')^2 \,-\, U(r') + \frac{e}{2c}(\mathbf{v}' + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{r}')\,.$$

Его можно представить в виде

$$L' = L'_0 + \delta L'\,, \;\; L'_0 = \frac{1}{2} m(\mathbf{v}')^2 \,-\, U(r')\,, \tag{76}$$

$$\delta L' = m\mathbf{v}'[\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}'] + \frac{e}{2c}\mathbf{v}'[\mathbf{B}, \mathbf{r}'] + \frac{1}{2} m[\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}']^2 + \frac{e}{2c}[\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}'] \cdot [\mathbf{B}, \mathbf{r}']\,.$$

Если выбрать для $\mathbf{\Omega}$ значение (называемое *ларморовской частотой*)

$$\mathbf{\Omega}_{\mathrm{L}} = -\frac{e\mathbf{B}}{2mc}\,, \tag{77}$$

то величины первого порядка по полю B точно сократятся и

$$\delta L' = -\frac{e^2}{8mc^2}[\mathbf{B}, \mathbf{r}']^2\,. \tag{78}$$

Отсюда видно, что если магнитное поле является достаточно малым, то слагаемое $\delta L'$ может быть рассматриваемо как малое возмущение для L'_0 (при финитном движении частицы!) и им можно пренебречь. Таким образом в K' системе отсчёта орбита представляет собой движение в центральном поле $U(r)$.

В кулоновском поле $U(r) = -\alpha/r$ — это обычный эллипс. В итоге единственный эффект слабого магнитного поля в исходной системе отсчёта K — прецессия эллипса вокруг направления поля $\mathbf{B}$ с ларморовской частотой (77).

7.2. Случай сильного магнитного поля

Противоположный случай, когда магнитное поле велико, а кулоновское поле представляет собой малое возмущение, рассмотрен в задаче 2.33 из [2]. Траектории движения частицы в двух характерных случаях показаны на рис. 8 и 9

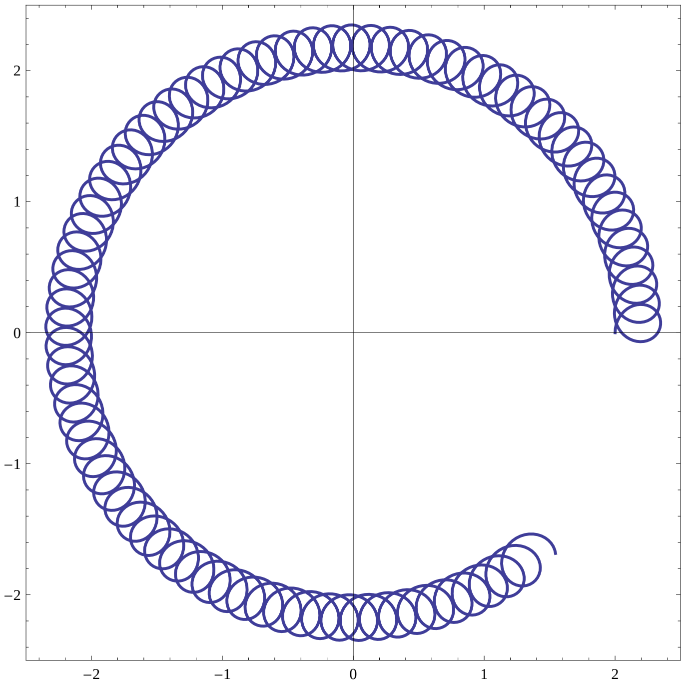

Рис. 8.
Траектория частицы в магнитном поле при наличие слабого кулоновского поля: случай, когда в магнитном поле частица вращается по окружности малого радиуса a (по часовой стрелки), а центр этой окружности медленно дрейфует по окружности большого радиуса $b = 11\,a$ (против часовой стрелки). Запустить модель траектории.

Известно (см. §22 из [4]), что при движении заряженной частицы в сильном однородном магнитном поле $\mathbf{B}$ в плоскости, перпендикулярной к полю, появление слабого однородного электрического поля $\mathbf{E}$, приводит к медленному смещению (дрейфу) центра орбиты со скоростью

$$\mathbf{v}_d = c\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}\,, \tag{79}$$

т. е. в направлении, перпендикулярном к $\mathbf{E}$. Это утверждение легко обобщается на случай, когда вместо слабого однородного электрического поля имеется слабое квазиоднородное потенциальное поля $U(\mathbf{r})$, т. е. такое поле, что сила $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$ мало изменяется в пределах круговой орбиты. В этом случае дрейф происходит со скоростью

$$\mathbf{v}_d = -c\frac{\mathbf{F}\times\mathbf{B}}{eB^2}\,, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})\,. \tag{80}$$

Иными словами, происходит медленный дрейф центра орбиты в направлении, перпендикулярном к силе $\mathbf{F}$, т. е. по линии уровня поля $U(\mathbf{r})$.

§ 8. Движение частицы в потенциальном поле при наличие гироскопических сил

В основном курсе рассматривались свободные колебания систем, движущихся под действием только потенциальных сил. Линейные колебания, соответствующие

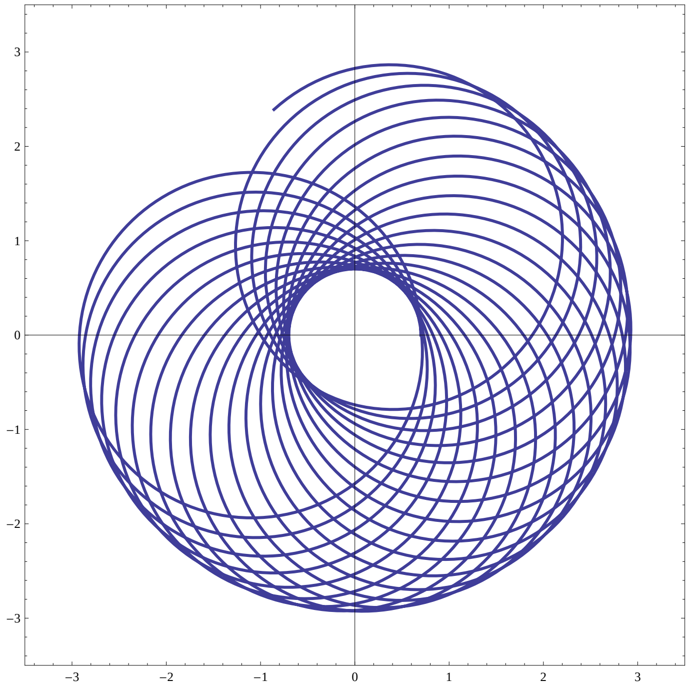

Рис. 9.
Траектория частицы в магнитном поле при наличие слабого кулоновского поля: случай, когда в магнитном поле частица вращается по окружности большого радиуса a (против часовой стрелки), а центр этой окружности медленно дрейфует по окружности меньшего радиуса $b = a/2$ (тоже против часовой стрелки). Запустить модель траектории.

малым отклонениям от положения равновесия, в этом случае происходят вблизи минимума потенциальной энергии, а функция Лагранжа представляет собой разницу квадратичной формы скоростей и квадратичной формы координат (см. §19–20 из [1]):

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \tfrac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}, \hat{m}\dot{\mathbf{x}}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}, \hat{k}\mathbf{x})\,. \tag{81}$$

Потенциальная сила

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = -\hat{k}\mathbf{x} \tag{82}$$

в этом случае линейна по смещениям, а отдельное нормальное колебание

$$\mathbf{x}^{(\alpha)}(t) = \mathbf{A}^{(\alpha)} Q_\alpha(t)\,, \quad Q_\alpha(t) = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)\,. \tag{83}$$

происходит по прямой вдоль вектора $\mathbf{A}^{(\alpha)}$. Переход к нормальным координатам соответствует такому линейному преобразованию координат, при котором обе квадратичные формы одновременно приводятся к диагональному виду. Интересно обсудить такое обобщение, когда в функции Лагранжа возникает дополнительное слагаемое, представляющее собой смешанную квадратичную форму по скоростям и координатам, что приводит к непотенциальным силам, зависящим от скорости. В этом разделе мы рассмотрим ряд модельных задач и важных приложений, в которых помимо потенциальных сил встречаются и непотенциальные так называемые *гироскопические силы* $\mathbf{F}_g$, *линейно зависящие от скорости частицы и ортогональные этой скорости*. Их точное определение удобно привести, используя лагранжев формализм.

8.1. Определение гироскопических сил

Пусть функция Лагранжа для частицы массы m имеет вид

$$L(\mathbf{r},\mathbf{v}) = L_0 + L_g\,, \quad L_0 = \frac{m}{2}\,\mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r})\,, \quad L_g = \mathbf{v}\cdot\mathbf{C}(\mathbf{r})\,, \tag{84}$$

где $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ — известная функция координат $\mathbf{r}$. Слагаемое L_0 соответствует движению частицы в потенциальном поле $U(\mathbf{r})$, а добавка L_g приводит к появлению гироскопической силы $\mathbf{F}_g$. Действительно, уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_g\,, \quad \mathbf{F}_g = [\mathbf{v},\, [\nabla,\, \mathbf{C}(\mathbf{r})]]\,. \tag{85}$$

Так как $\mathbf{F}_g\,\mathbf{v} = 0$, то работа гироскопической силы равна нулю и вклад слагаемого L_g в энергию тоже равен нулю:

$$\frac{\partial L_g}{\partial \mathbf{v}}\,\mathbf{v} - L_g = 0\,.$$

Поскольку $\partial L/\partial t = 0$, то энергия системы

$$E = \frac{m}{2}\,\mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r})$$

сохраняется.

Нам уже известны два примера гироскопических сил.

При движении частицы с зарядом e в постоянном магнитном поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ функция

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \frac{e}{c}\,\mathbf{A}(\mathbf{r})\,,$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — векторный потенциал, а гироскопическая сила совпадает с силой Лоренца:

$$\mathbf{F}_g = \frac{e}{c}\,[\mathbf{v},\mathbf{B}(\mathbf{r})]\,.$$

При движении частицы в системе отсчёта, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, функция

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = m\,[\boldsymbol{\Omega},\mathbf{r}]\,,$$

а гироскопическая сила совпадает с кориолисовой силой:

$$\mathbf{F}_g = 2m[\mathbf{v},\boldsymbol{\Omega}]\,.$$

Ниже в этом разделе мы будем в основном рассматривать линейные колебания. Линейные колебания при наличии гироскопических сил имеют интересные особенности. В частности, малые колебания могут происходить не только вблизи минимума потенциальной энергии $U(\mathbf{r})$, но также и вблизи максимума $U(\mathbf{r})$, причём устойчивость этих последних обеспечивается как раз наличием гироскопических сил. Кроме того, траектория нормального колебания не обязательно имеет вид прямой.

8.2. Линейные колебания заряженной частицы в потенциальном и магнитном полях

Пусть потенциальная энергия имеет вид диагональной квадратичной формы координат
$$U(x, y, z) = \tfrac{1}{2}k_x x^2 + \tfrac{1}{2}k_y y^2 + \tfrac{1}{2}k_z z^2\,, \tag{86}$$
в которой мы полагаем, что коэффициент k_z положителен $k_z > 0$, а знаки коэффициентов $k_{x,y}$ могут быть любыми. Примем также, что постоянное однородном магнитном поле направлено по оси z:

$$\mathbf{B} = (0,\, 0,\, B)\,,$$

а векторный потенциал выбран в виде

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}B(-y,\, x,\, 0)\,. \tag{87}$$

Функция Лагранжа данной системы представляет собой квадратичную форму декартовых координат и скоростей

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2}\left(k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2\right) + \frac{eB}{2c}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right). \tag{88}$$

Привести такую функцию Лагранжа к диагональному виду с помощью линейного преобразования только координат невозможно (переход к нормальным координатам связан в этом случае с каноническим преобразованием — см. задачи 11.7 и 11.9 из [2]).

Магнитное поле не влияет на движение вдоль оси z, так что это движение соответствует свободным колебаниям осциллятора с частотой $\omega_z = \sqrt{k_z/m}$:

$$z = a_z \cos\left(\omega_z t + \varphi_z\right). \tag{89}$$

Рассмотрим подробнее движение частицы в плоскости xy. Потенциальная энергия $U(x, y, 0)$ имеет экстремум в точке $x = y = 0$. Обозначим

$$\omega_B = \frac{eB}{mc}\,, \quad k_B = m\omega_B^2\,. \tag{90}$$

Уравнения движения частицы имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} \quad &+ k_x x - m\omega_B \dot{y} = 0,\\ m\ddot{y} \quad &+ k_y y + m\omega_B \dot{x} = 0. \end{aligned}$$

Будем искать решения этих уравнений в виде колебаний

$$x = \mathrm{Re}(Ae^{i\omega t}), \quad y = \mathrm{Re}(Be^{i\omega t})\,,$$

где комплексная амплитуда $A = ae^{i\varphi}$. При таком предположении уравнения движения сводятся к системе однородных уравнений для амплитуд A и B

$$\begin{aligned} (k_x - m\omega^2)A - im\omega_B\omega B = 0,\\ im\omega_B\omega A + (k_y - m\omega^2)B = 0\,. \end{aligned}$$

Чтобы эта система имела нетривиальное решение, её определитель должен равняться нулю,

$$m^2\omega^4 - m\omega^2(k_B + k_x + k_y) + k_x k_y = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2m}\left[k_B + k_x + k_y \pm \sqrt{(k_B + k_x + k_y)^2 - 4k_x k_y}\right] \tag{91}$$

в силу теоремы Виета удовлетворяют условиям:

$$\omega_1^2\,\omega_1^2 = \frac{k_x\,k_y}{m^2}\,, \quad \omega_1^2 + \omega_1^2 = \frac{k_B + k_x + k_y}{m} \tag{92}$$

Кроме того, эти корни положительны при выполнении одного из двух условий:

1) либо при

$$k_x > 0, \;\; k_y > 0 \tag{93}$$

(при этом потенциальная энергия имеет минимум в точке $x = y = 0$, этот случай рассмотрен в §8.3);

2) либо при

$$k_x < 0, \;\; k_y < 0 \tag{94}$$

и достаточно большом магнитном поле

$$k_B > -k_x - k_y + 2\sqrt{k_x k_y} \tag{95}$$

(при этом потенциальная энергия имеет максимум в точке $x = y = 0$, этот случай рассмотрен в §8.4).

В обоих этих случаях решения представляют собой колебания вблизи начала координат:

$$x \;=\; a_\alpha\,\cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)\,, \quad y = b_\alpha\,\sin(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)\,, \tag{96}$$

$$b_\alpha \;=\; \frac{m\omega_B\omega_\alpha}{k_y - m\omega_\alpha^2}\,a_\alpha = \frac{k_x - m\omega_\alpha^2}{m\omega_B\omega_\alpha}\,a_\alpha\,, \tag{97}$$

где индекс $\alpha = 1,\,2$ нумерует два различных собственных колебания. Свободные колебания систем, движущихся под действием только потенциальных сил соответствуют малым отклонениям от положения равновесия вблизи минимума потенциальной энергии, а отдельное нормальное колебание (83) происходит по прямой. В рассматриваемом случае движение частицы в плоскости xy представляет собой суперпозицию найденных колебаний (96). Эти колебания можно назвать *нормальными*, обобщая тем самым понятие нормального колебания: движения в направлениях осей x и y происходят с одной и той же частотой, но со сдвигом фаз на $\pm\pi/2$, т. е. не по прямой, а по эллипсу.

Если условия (93) или (94)–(95) не выполнены, то по крайней мере один из корней $\omega_{1,2}^2$ перестает быть положительным и соответствующее решение отвечает уходу частицы от начала координат. В частности, при $k_x < 0$ и $k_y > 0$ эквипотенциальная поверхность вблизи начала координат (при $z = 0$) имеет вид седла, типичная траектория частицы в этом случае представлена на рис. 10.

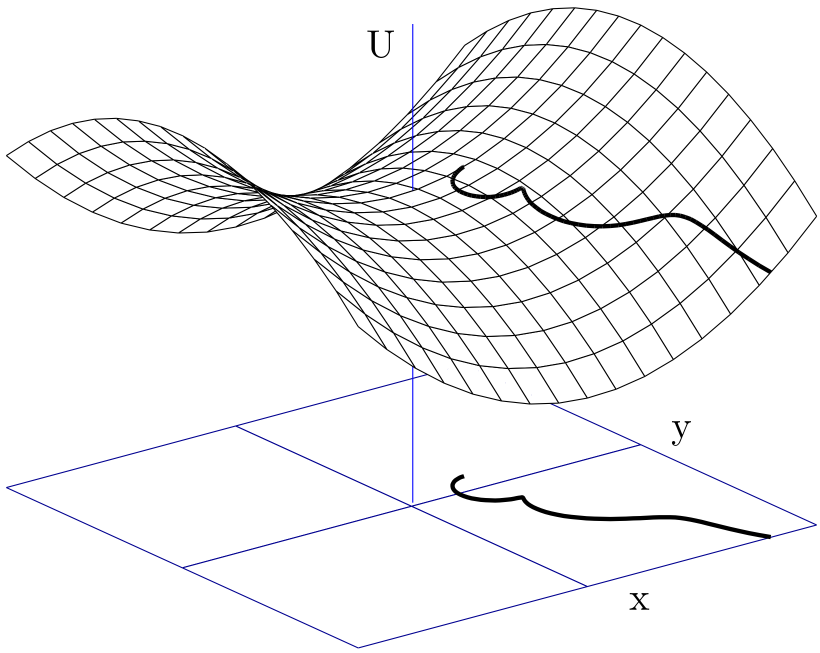

Рис. 10.
Частица покидает седловую точку потенциальной энергии, двигаясь примерно по линии уровня

8.3. Анизотропный заряженный осциллятор в однородном магнитном поле

В этом случае $k_x > 0$, $k_y > 0$ и потенциальная энергия соответствует полю притяжения. Введём обозначения

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}\,, \quad \omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}} \tag{98}$$

и примем для определённости, что $\omega_x > \omega_y$ и $\omega_B > 0$. Частоты нормальных колебаний (91) в этом случае можно преобразовать к виду

$$\omega_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\omega_B^2 + \omega_+^2} \pm \sqrt{\omega_B^2 + \omega_-^2}\right)\,, \quad \omega_\pm = \omega_x \pm \omega_y\,. \tag{99}$$

Зависимость нормальных частот $\omega_{1,2}$ от величины магнитного поля показана на рис.11, предельные случаи таковы

$$\begin{aligned} \omega_1 \ &\to \ \omega_x\,, \quad \omega_2 \to \omega_y \quad \text{при } \omega_B \ll \omega_x - \omega_y\,, \\ \omega_1 \ &\to \ \omega_B\,, \quad \omega_2 \to \frac{\omega_x\omega_y}{\omega_B} \ \text{ при } \omega_B \gg \omega_x\,. \end{aligned}$$

Для амплитуд a_1 и b_1 нормального колебания с более высокой частотой ω_1 из уравнения (97) можно найти соотношения

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{\omega_x^2 - \omega_1^2}{\omega_B\omega_1} < 0\,, \quad \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 = \frac{\omega_1^2 - \omega_x^2}{\omega_1^2 - \omega_y^2} < 1\,. \tag{100}$$

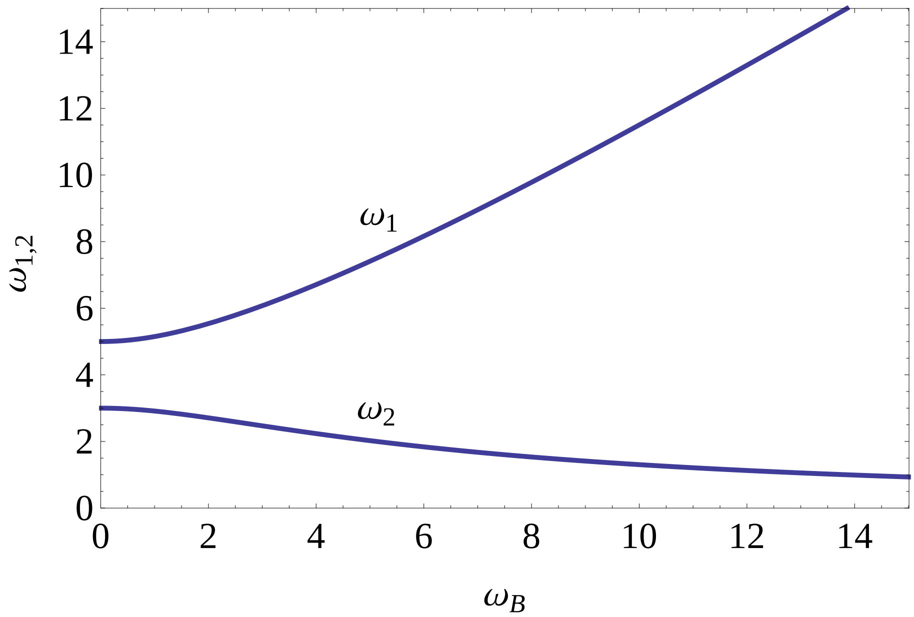

Рис. 11.
Зависимость нормальных частот $\omega_{1,2}$ анизотропного заряженного осциллятора от величины магнитного поля $\omega_B = eB/(mc)$

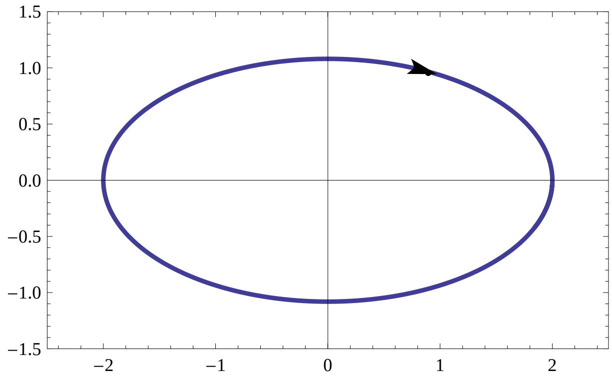

Рис. 12.
Нормальное колебание высокой частот ω_1 для анизотропного заряженного осциллятора в магнитном поле

Отсюда видно, что это нормальное колебание представляет собой движение по часовой стрелке по эллипсу с большой осью, направленной вдоль оси x — см. рис. 12. Аналогичное рассмотрение для нормального колебания с низкой частотой ω_2,

$$\frac{b_2}{a_2} = \frac{\omega_x^2 - \omega_2^2}{\omega_B \omega_2} > 0\,, \quad \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 = \frac{\omega_x^2 - \omega_2^2}{\omega_y^2 - \omega_2^2} > 1\,, \tag{101}$$

показывает, что оно представляет собой движение против часовой стрелки по эллипсу с большой осью, лежащей вдоль оси y — см. рис. 13. Рассмотрим подробнее три предельных случая.

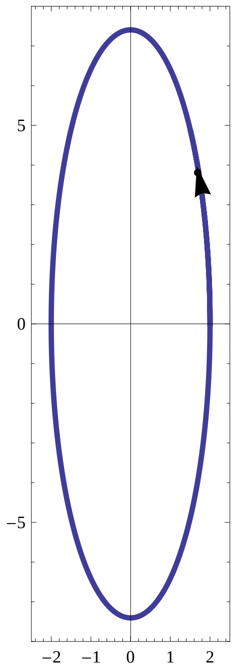

Рис. 13.
Нормальное колебание низкой частот ω_2 для анизотропного заряженного осциллятора в магнитном поле

1) Слабое магнитное поле,

$$\omega_B \ll \omega_x - \omega_y \neq 0\,.$$

Теорема Лармора (см. §7.1) здесь неприменима, так как поле $U(x,y,0)$ не обладает симметрией относительно оси z. В этом случае эллипсы нормальных колебаний сильно вытянуты вдоль соответствующих осей, а частоты нормальных колебаний

$$\omega_{1,2} \approx \omega_{x,y} \pm \frac{\omega_B^2 \omega_{x,y}}{2(\omega_x^2 - \omega_y^2)} \tag{102}$$

близки к $\omega_{x,y}$.

2) Сильное магнитное поле,

$$\omega_B \gg \omega_{x,y}\,.$$

В этом случае нормальное колебание с частотой $\omega_1 \approx \omega_B$ происходит по окружности, а нормальное колебание с частотой $\omega_2 \approx \omega_x \omega_y / \omega_B$ — по эллипсу, у которого отношение полуосей $b_2/a_2 = \omega_x/\omega_y$ такое же как и у эквипотенциальных поверхностей. Действительно, уравнение эквипотенциали $U(x,y,0) = \text{const} = \frac{m}{2}C^2$ имеет вид эллипса

$$\frac{x^2}{(C/\omega_x)^2} + \frac{y^2}{(C/\omega_y)^2} = 1 \tag{103}$$

с полуосями C/ω_x и C/ω_y вдоль осей x и y. Таким образом, происходит движение по окружности, центр которой относительно медленно движется (дрейфует) по эллипсу.

Мы уже знаем (см. §7.2), что при движении заряженной частицы в сильном однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной к полю, появление слабого квазиоднородного поля $U(\mathbf{r})$ приводит к медленному смещению центра орбиты по линии уровня поля $U(\mathbf{r})$. Заметим, что в нашем случае подобный же дрейф происходит и в сильно неоднородном осцилляторном поле.

3) Изотропный осциллятор,

$$\omega_x = \omega_y \equiv \omega\,.$$

В этом случае то в плоскости $(x,\,y)$ нормальные колебания представляют собой движения по окружностям в противоположные стороны с частотами

$$\omega_{1,2} = \tilde{\omega} \pm \tfrac{1}{2}\omega_B\,, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 + \tfrac{1}{4}\omega_B^2} \tag{104}$$

Поэтому в системе, вращающейся с частотой $-\omega_B/2$ обе частоты этих движений оказываются равными $\tilde{\omega}$. Такие движения суть нормальные колебания изотропного осциллятора с частотой $\tilde{\omega}$. Действительно, сумма и разность таких колебаний с равными амплитудами

$$\begin{pmatrix} \cos\tilde{\omega}t \\ -\sin\tilde{\omega}t \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \cos\tilde{\omega}t \\ \sin\tilde{\omega}t \end{pmatrix}$$

представляют собой линейные колебания по осям x или y.

Если магнитное поле мало, $\omega_B \ll \omega$, то $\tilde{\omega} \approx \omega$, и все влияние поля на движение осциллятора сводится к появлению вращения (“прецессии”) вокруг оси z с частотой $-\omega_B/2$ (теорема Лармора, ср. §7.1). Если же $\omega_B \gtrsim \omega$, то использование вращающейся системы теряет наглядность.

8.4. Анизотропный заряженный антиосциллятор в однородном магнитном поле

В этом случае $k_x < 0$ и $k_y < 0$, мы будем использовать обозначения

$$\gamma_x = \sqrt{\frac{-k_x}{m}}\,, \quad \gamma_y = \sqrt{\frac{-k_y}{m}} \tag{105}$$

и примем для определённости, что $\gamma_x > \gamma_y$. Таким образом, вместо поля притяжения рассматривается поле отталкивания, но при условии достаточной величины магнитного поля (ср. (95))

$$\omega_B > \gamma_x + \gamma_y\,. \tag{106}$$

Частоты нормальных колебаний (91) в этом случае можно преобразовать к виду

$$\omega_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\omega_B^2 - \gamma_-^2} \pm \sqrt{\omega_B^2 - \gamma_+^2}\right)\,, \quad \gamma_\pm = \gamma_x \pm \gamma_y\,. \tag{107}$$

На рис. 14 показана типичная траектория движения частицы в таком поле. Устой-

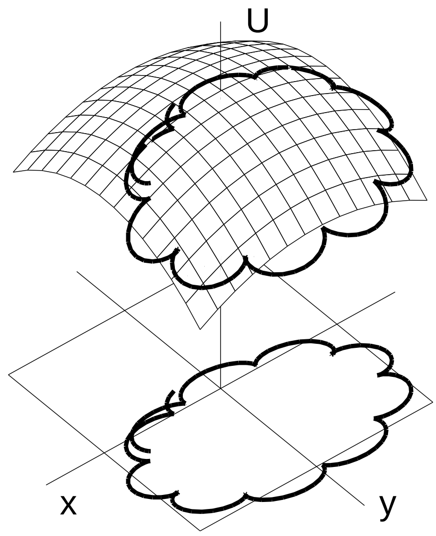

Рис. 14.
Сила Лоренца не даёт частице упасть с потенциального холма

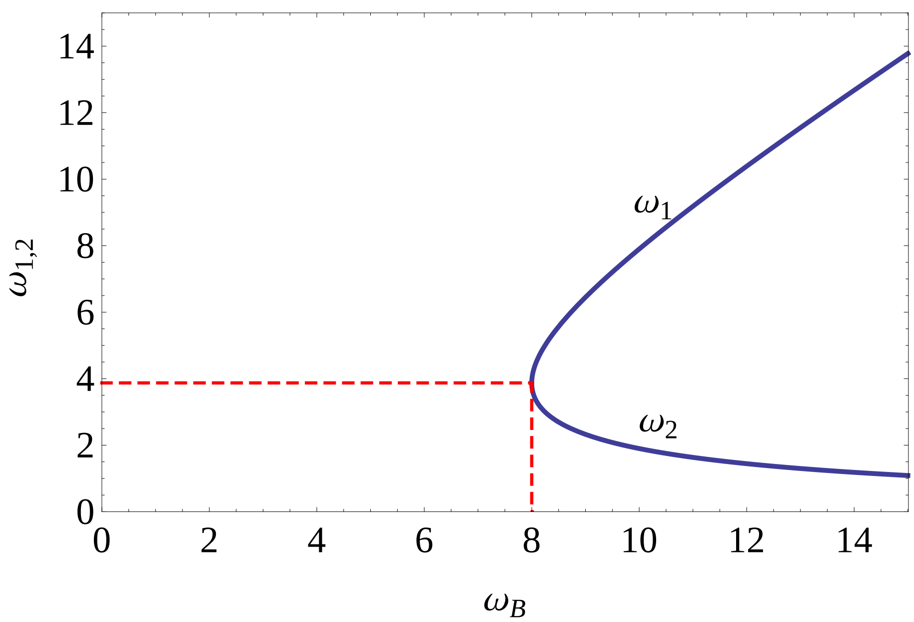

Рис. 15.
Зависимость нормальных частот $\omega_{1,2}$ анизотропного заряженного антиосциллятора от величины магнитного поля $\omega_B = eB/(mc)$

чивость колебания вблизи максимума потенциальной энергии в этом случае обеспечивается достаточно большой силой Лоренца.

Зависимость нормальных частот $\omega_{1,2}$ от величины магнитного поля показана на рис. 15, предельные случаи таковы

$$\omega_{1,2} \to \sqrt{\gamma_x \gamma_y}\,, \qquad \text{при } \omega_B \to \gamma_x + \gamma_y\,,$$
$$\omega_1 \to \omega_B\,, \ \omega_2 \to \frac{\gamma_x \gamma_y}{\omega_B} \ \text{ при } \omega_B \gg \gamma_x\,.$$

Для амплитуд α-го нормального колебания из уравнения (97) следуют соотношения

$$\frac{b_\alpha}{a_\alpha} = -\frac{\omega_\alpha^2 + \gamma_x^2}{\omega_B \omega_\alpha} < 0\,, \quad \left(\frac{b_\alpha}{a_\alpha}\right)^2 = \frac{\omega_\alpha^2 + \gamma_x^2}{\omega_\alpha^2 + \gamma_y^2} > 1\,, \quad \alpha = 1,2\,. \tag{108}$$

Отсюда видно, что оба нормальных колебания представляют собой движение по часовой стрелке по эллипсу с большой осью, направленной вдоль оси y. Для случая

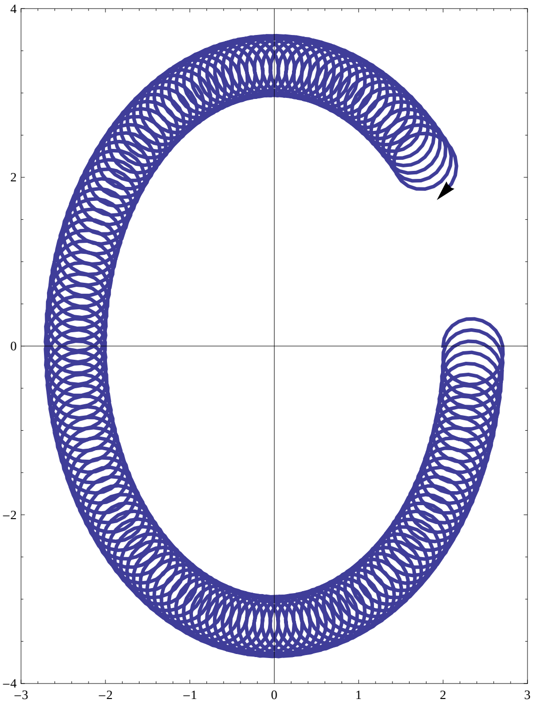

Рис. 16.
Траектория анизотропного заряженного анти-осциллятора в сильном магнитном поле. Запустить модель траектории.

сильного магнитного поля траектория представлена на рис. 16

8.5. Ловушка Пеннинга

Разобранные выше задачи помогают понять работу ловушки Пеннинга[2], схема которой изображена на рис. 17. Это устройство предназначено для удержания отдельного электрона или иона в течение длительного времени, что позволило провести сверхточное определение магнитного момента электрона и позитрона. За цикл работ по таким измерениям Ганс Демельт и Вольфганг Пауль были удостоены Нобелевской премии в 1989 году.

[2]Подробнее об этом можно прочитать, например, в книге [5], откуда взяты конкретные цифры и рисунок.

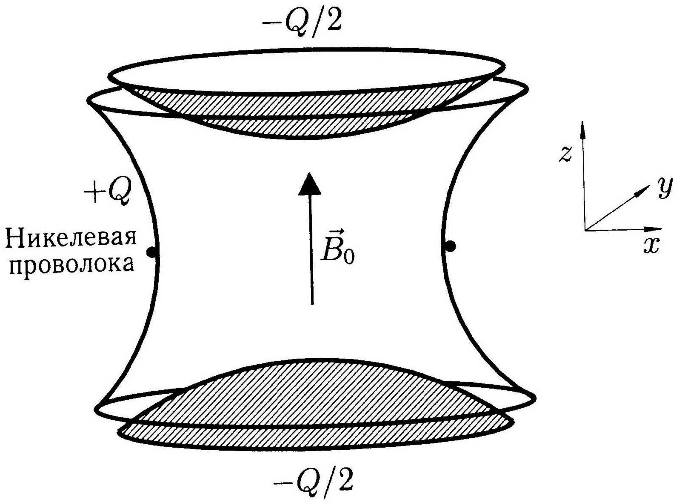

Рис. 17.
Схема ловушки Пеннинга

Опишем принципиальную схему удержания заряженной частицы, для определённости, электрона. Он удерживается в ловушке Пеннинга с помощью комбинации электрических и магнитных полей. Сильное магнитное поле $\mathbf{B}_0$ величиною 5 Тесла направлено по оси ловушки (оси z), электрическое поле создается электродами, образующими квадруполь с потенциальной энергией вида (86) и параметрами

$$k_z = -2k_x = -2k_y > 0\,. \tag{109}$$

Движение электрона по оси ловушки (вдоль магнитного поля) представляет собой гармонические колебания (89) с типичной частотой

$$\frac{\omega_z}{2\pi} = \frac{\sqrt{k_z/m_e}}{2\pi} = 60 \;\; \text{МГц} \tag{110}$$

В плоскости xy образуется анти-осциллятор в магнитном поле, рассмотренный в предыдущем разделе, с параметрами

$$\gamma_x = \gamma_y \equiv \gamma = \sqrt{\frac{k_z}{2m_e}}\,, \quad \omega_B = -\frac{|e|B_0}{m_e c} \tag{111}$$

при условии $|\omega_B| \gg \gamma$. Типичные значения нормальных частот таковы

$$\frac{\omega_1}{2\pi} \approx \frac{|\omega_B|}{2\pi} = 140 \;\; \text{ГГц}\,, \quad \frac{\omega_2}{2\pi} \approx \frac{\omega_z^2/(2|\omega_B|)}{2\pi} \approx 13 \;\; \text{кГц}\,. \tag{112}$$

Таким образом, устойчивость движения вдоль оси ловушки обеспечивается электрическим полем. Но в плоскости xy квадрупольное электрическое поле соответствует силам отталкивания, а устойчивость движения обеспечивается силой Лоренца со стороны сильного магнитного поля. Типичная траектория в плоскости xy подобна изображенной на рис. 16, но с изменениями, обусловленными отрицательным зарядом электрона. Именно, электрон быстро вращается (против часовом стрелки) по окружности малого радиуса, центр которой медленно дрейфует (против часовой стрелки) по окружности большого радиуса. Такая схема позволяла удерживать электрон в ловушке в течение многих месяцев!

8.6. Частица внутри гладкого вращающегося параболоида в поле тяжести

Рассмотрим гладкий параболоид

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}\,,$$

вращающийся вокруг вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью Ω. Ускорение силы тяжести $\mathbf{g} = (0,\ 0,\ -g)$. Найдем, при каком значении Ω нижнее положение неустойчиво для частицы, находящейся внутри параболоида. Отметим сразу же, что при $a = b$ горизонтальное сечение параболоида имеет вид окружности и вращение такого гладкого параболоида не оказывает влияние на движение частицы внутри него. Конечно, в этом случае движение частицы вблизи нижнего положения является устойчивым. Поэтому ниже рассматривается только случай $a \neq b$.

Пусть $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ — радиус-вектор и скорость частицы во вращающейся системе координат. Функция Лагранжа в этой системе равна

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r},\mathbf{v}) &= \frac{m}{2}\left(\mathbf{v} + [\boldsymbol{\Omega},\mathbf{r}]\right)^2 + m\mathbf{g}\mathbf{r} = \\ &= \frac{m}{2}\left[(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2 + \dot{z}^2 - g\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right)\right]. \end{aligned}$$

Для малых колебаний слагаемое

$$\frac{m}{2}\dot{z}^2 = \left(\frac{x}{a}\,\dot{x} + \frac{y}{b}\,\dot{y}\right)^2 \ll \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

можно опустить, тогда для движения в плоскости xy функция Лагранжа данной задачи отличается от функции Лагранжа (88) лишь обозначениями:

$$\frac{k_x}{m} = \frac{g}{a} - \Omega^2\,,\quad \frac{k_y}{m} = \frac{g}{b} - \Omega^2\,,\quad \omega_B = 2\Omega\,.$$

Используя результаты § 8.2, легко убедиться, что движение вблизи начала координат будет устойчивым при

$$\left(\frac{g}{a} - \Omega^2\right)\left(\frac{g}{b} - \Omega^2\right) > 0\,,$$

а при выполнении условия

$$\left(\frac{g}{a} - \Omega^2\right)\left(\frac{g}{b} - \Omega^2\right) < 0$$

частица уходит от начала координат. Считая для определенности $a > b$, получаем область неустойчивости

$$\frac{g}{a} < \Omega^2 < \frac{g}{b}\,.$$

Обратим внимание на то, что при $\Omega^2 > g/b$ движение устойчиво, хотя потенциальная энергия во вращающейся системе отсчёта

$$U(x,y) = -\frac{m}{2}\left(\Omega^2 - \frac{g}{a}\right)x^2 - \frac{m}{2}\left(\Omega^2 - \frac{g}{b}\right)y^2$$

представляет не потенциальную яму, а потенциальный горб. Устойчивость в этом случае обеспечивается действием силы Кориолиса.

8.7. Точки Лагранжа в Солнечной системе

Рассмотренные выше задачи помогают понять также движение групп астероидов под воздействием Солнца и Юпитера вблизи так называемых точек Лагранжа[3]. Будем для простоты представлять орбиту Юпитера окружностью. В системе отсчёта, вращающейся с такой же угловой скоростью, с какой Юпитер движется вокруг Солнца, и с центром в центре тяжести системы Солнце–Юпитер на астероид действуют потенциальные силы притяжения к Солнцу и Юпитеру и центробежная сила инерции, направленная по радиусу из центра тяжести. Точками Лагранжа называют такие точки, в которых сумма этих сил равна нулю. Две таких точки движутся по орбите Юпитера на 60° впереди и позади него. Иначе говоря, Солнце, Юпитер и точка Лагранжа образуют правильный треугольник.

Потенциальная энергия как функция координат, определяющих положение в плоскости орбиты, имеет вблизи этих точек Лагранжа максимум. Однако движение астероида вблизи них оказывается устойчивым из-за влияния кориолисовой силы.

Вблизи указанных точек Лагранжа, действительно, наблюдаются скопления астероидов, называемые “греками” и “троянцами”.

§ 9. Движение заряженной частицы в неоднородном магнитном поле

В предыдущих разделах мы рассматривали движение заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле при наличие дополнительной потенциальной силы. В общем случае такое движение может быть довольно сложным, но оно упрощается в так называемом *дрейфовом приближении*, когда имеется *слабое квазиоднородное потенциальное поле* $U(\mathbf{r})$, т. е. такое поле, что сила

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$$

мало изменяется в пределах круговой орбиты движения в магнитном поле. В этом случае дрейфовая скорость равна

$$\mathbf{v}_d = c\frac{\mathbf{F}\times\mathbf{B}}{eB^2}\,, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})\,, \tag{113}$$

т. е. медленный дрейф центра орбиты происходит в направлении, перпендикулярном к градиенту поля $U(\mathbf{r})$ и к направлению магнитного поля.

Рассмотрим теперь движение в постоянном, но неоднородном магнитном поле. В общем случае здесь такое движение также может быть достаточно сложным, но оно упрощается в случае, когда магнитное поле является слабо неоднородным, т. е. когда магнитное поле слабо изменяется в пределах почти круговой орбиты. Соответствующее решение дано Альфвеном (H. Alfven, 1940) — см. задачу 3 к §22 из [4]. В этом случае также возникает дополнительная сила, определяемая градиентом магнитного поля,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{mv_\perp^2}{2B^2}\,(\mathbf{B}\times\nabla)\times\mathbf{B} \tag{114}$$

[3] Подробнее об этом можно прочитать, например, в задаче 9.27 из [2] и в разделе 3.12 из [6].

(для случая, когда движение происходит в плоскости, перпендикулярной магнитному полю). Поэтому дрейф происходит в направлении, перпендикулярном к этой силе и к направлению магнитного поля.

В качестве простого примера, иллюстрирующего эти особенности движения в неоднородном магнитном поле, рассмотрим магнитное поле, заданное векторным потенциалом

$$A_x = A_z = 0\,, \quad A_y = hx^2\,,$$

где h — постоянная величина. Само магнитное поле

$$B_x = B_y = 0\,, \quad B_z = 2hx$$

направлено по оси z и линейно зависит от координаты x. Движение в направлении оси z равномерное. Отвлекаясь от него, рассмотрим движение в плоскости xy. Функ-

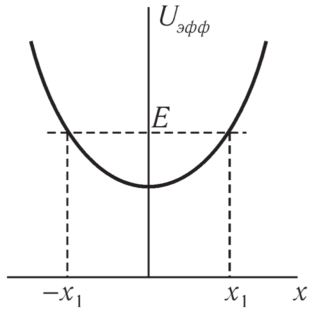

Рис. 18.
Эффективная энергия $U_{\text{эфф}}(x)$ при $p_y < 0$

ция Лагранжа

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{eh}{c}x^2\dot{y}$$

не зависит от y и t. Поэтому интегралами движения являются обобщённый импульс p_y и энергия E:

$$\begin{aligned} p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{eh}{c}x^2, \\ E &= \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U_{\text{эфф}}(x)\,, \end{aligned}$$

где

$$U_{\text{эфф}}(x) = \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{eh}{c}x^2\right)^2.$$

Для $p_y \leq 0$ график $U_{\text{эфф}}(x)$ изображён на рис. 18. Из него видно, что по оси x происходят симметричные колебания с амплитудой x_1 (отнюдь не гармонические!), а скорость

$$\dot{y} = -\frac{|p_y|}{m} - \frac{eh}{mc}x^2$$

всюду отрицательна и колеблется между значениями

$$-\frac{|p_y|}{m} - \frac{eh}{mc}x_1^2 \quad \text{и} \quad -\frac{|p_y|}{m}\,.$$

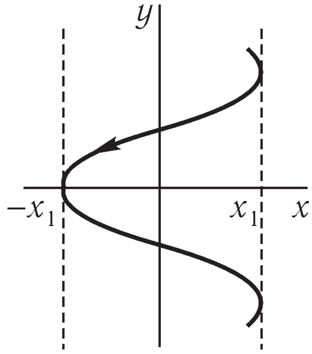

Рис. 19.
Траектория при $p_y < 0$

Примерный вид траектории показан на рис. 19.

Для $p_y > 0$ график

$$U_{\text{эфф}}(x) = \frac{e^2h^2}{2mc^2}(x^2 - x_0^2)^2, \quad x_0 = \sqrt{\frac{p_y c}{eh}}$$

изображён на рис. 20. Скорость

$$\dot{y} = \frac{eh}{mc}(x_0^2 - x^2)$$

при любом значении E принимает как положительные, так и отрицательные значения. Примерный вид траекторий изображён на рис. 21, случаям *а—д* соответствуют уменьшающиеся значения энергии.

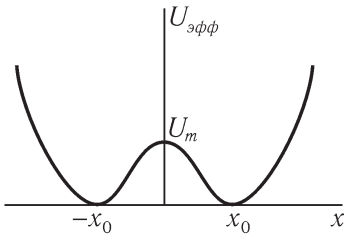

Рис. 20.
Эффективная энергия $U_{\text{эфф}}(x)$ при $p_y > 0$

При больших энергиях $E \gg U_m = p_y^2/2m$ размах колебаний по оси x велик и среднее за период значение $\langle x^2 \rangle$ больше x_0^2. Поэтому среднее значение

$$\langle \dot{y} \rangle = \frac{eh}{mc}(x_0^2 - \langle x^2 \rangle)$$

отрицательно (см. рис. 21 *а*). При уменьшении энергии $\langle \dot{y} \rangle$ возрастает до нуля (рис. 21 *б*), а затем становится положительным (рис. 21 *в*). При энергии $E = U_m$ частица, имеющая в начальный момент $x > x_0$ и $\dot{x} < 0$, асимптотически приближается к оси y (рис. 21 *г*).

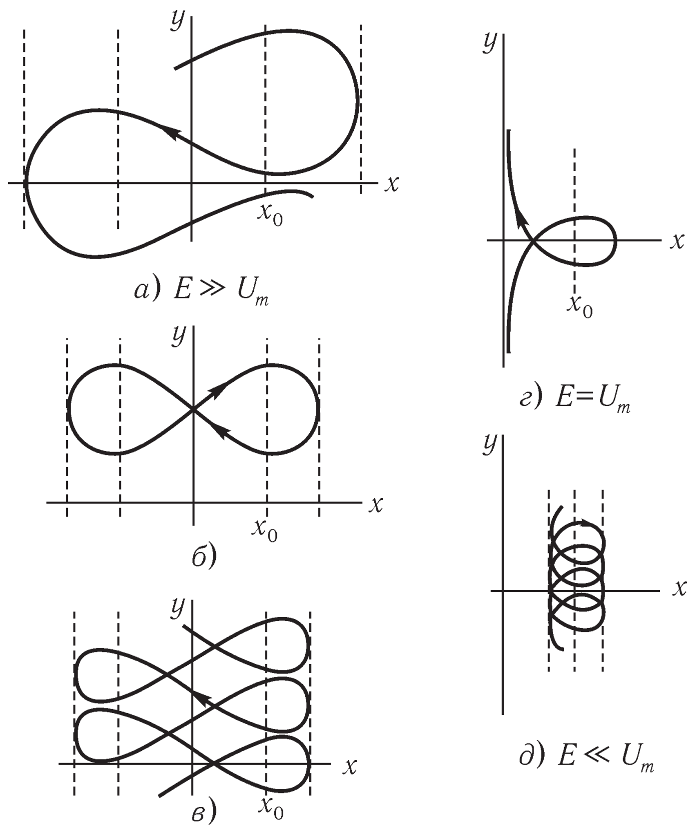

Рис. 21.

Траектории при $p_y > 0$ и различных значениях энергии E. Запустить модель траектории.

Наконец, при $E < U_m$ частица движется либо в области вблизи $(-x_0)$, либо в области вблизи x_0 (рис. 21 *д*). Можно показать, что $\langle \dot{y} \rangle$ при этом больше нуля. При $|x - x_0| \ll x_0$ частица движется по окружности, центр которой медленно дрейфует вдоль оси y. Конечно, угловая скорость движения по окружности определяется магнитным полем в средней точке x_0,

$$B_z(x_0) = 2hx_0,$$

и равна

$$\omega = \frac{eB_z(x_0)}{mc} = \frac{2ehx_0}{mc}\,.$$

Чтобы найти скорость дрейфа, необходимо при вычислении $\langle x^2 \rangle$ учитывать первые ангармонические поправки к функции $x(t)$. Для их вычисления разложим $U_{эфф}(x)$ в ряд по малым отклонениям $x - x_0$ до третьего порядка включительно

$$U_{эфф}(x) = \frac{m\omega^2}{8x_0^2}\left(x^2 - x_0^2\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x - x_0\right)^2 + \frac{1}{3}m\alpha\left(x - x_0\right)^3\,, \quad \alpha = \frac{3\omega^2}{2x_0}\,.$$

Используя известные формулы для ангармонических поправок (см., например, уравнение (29.8) из [1]), получим

$$x = x_0 + a\cos\omega t - \frac{a^2}{4x_0}(3 - \cos 2\omega t),$$

что даёт

$$\langle \dot y \rangle = \frac{eha^2}{mc} = \frac{cE}{2hx_0^2 e}\,.$$

Конечно, этот ответ находится в соответствии с решением Альфвена, согласно которому дополнительная сила (114) равна

$$F_x = -\frac{mv_\perp^2}{2x_0} = -\frac{E}{x_0}\,, \quad F_y = F_z = 0$$

и потому дрейфовая скорость (113) такова:

$$\mathbf{v}_d = c\frac{\mathbf{F}\times\mathbf{B}}{eB^2} = \big(0,\, cE/(2hx_0^2 e),\, 0\big)\ .$$

§ 10. Теория возмущений для линейных колебаний

10.1. Постановка задачи

В основном курсе было показано (см. §19 и §20 из [1]), что малые колебания, описываемые функцией Лагранжа

$$L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = \frac12(\dot{\mathbf{x}}, \hat m\,\dot{\mathbf{x}}) - \frac12(\mathbf{x}, \hat k\,\mathbf{x})\,, \tag{115}$$

где $\hat m$ и $\hat k$ — матрицы масс и жёсткостей, представляют собой суперпозицию нормальных колебаний вида

$$\mathbf{x}^{(\alpha)}(t) = \mathbf{A}^{(\alpha)}\cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)\,, \quad \alpha = 1,2,\dots s\,.$$

При этом амплитуды различный нормальных колебаний ортогональны в метрике масс и в метрике жёсткостей,

$$\big(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat m\,\mathbf{A}^{(\beta)}\big) = \Big(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat k\,\mathbf{A}^{(\beta)}\Big) = 0 \ \text{ если } \ \alpha\neq\beta\,, \tag{116}$$

а частоты нормальных колебаний удовлетворяют соотношениям

$$\omega_\alpha^2 = \frac{K_\alpha}{M_\alpha}\,, \quad K_\alpha = \Big(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat k\,\mathbf{A}^{(\alpha)}\Big)\ , \quad M_\alpha = \big(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat m\,\mathbf{A}^{(\alpha)}\big)\ . \tag{117}$$

Пусть нам известны частоты ω_α и амплитуды $\mathbf{A}^{(\alpha)}$ всех нормальных колебаний системы, описываемой функцией Лагранжа (115). Задача заключается в том, чтобы, используя эти данные, найти приближённое значение нормальных частот при наличие такого малого возмущения исходной системы, что новая функция Лагранжа имеет вид

$$L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) + \delta L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})\,, \tag{118}$$

где возмущение также соответствует линейным силам:

$$\delta L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = \frac12(\dot{\mathbf{x}}, \delta\hat m\,\dot{\mathbf{x}}) - \frac12(\mathbf{x}, \delta\hat k\,\mathbf{x})\,. \tag{119}$$

10.2. Одна степень свободы

В этом случае решение тривиально. Действительно, функции Лагранжа

$$L(x, \dot{x}) + \delta L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} \delta m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \delta k x^2$$

отвечает нормальное колебание с частотой

$$\omega + \delta\omega = \sqrt{\frac{k + \delta k}{m + \delta m}} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 + \frac{\delta k}{k} - \frac{\delta m}{m}\right) . \tag{120}$$

Отсюда получаем поправку к частоте

$$\delta\omega \approx \frac{\omega}{2} \left(\frac{\delta k}{k} - \frac{\delta m}{m}\right) . \tag{121}$$

10.3. Много степеней свободы

Покажем, что в случае многих степеней свободы ответ имеет вид, подобный (121), а именно

$$\delta\omega_\alpha \approx \frac{\omega_\alpha}{2} \left(\frac{\delta K_\alpha}{K_\alpha} - \frac{\delta M_\alpha}{M_\alpha}\right) , \quad \delta K_\alpha = \left(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \delta\hat{k}\, \mathbf{A}^{(\alpha)}\right) , \quad \delta M_\alpha = \left(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \delta\hat{m}\, \mathbf{A}^{(\alpha)}\right) , \tag{122}$$

где $\mathbf{A}^{(\alpha)}$ — амплитуда нормального колебания невозмущённой системы.

Пусть $\mathbf{B}^{(\alpha)}$ — амплитуда нормального колебания системы с возмущением, тогда для соответствующей частоты справедливо соотношение

$$(\omega_\alpha + \delta\omega_\alpha)^2 = \frac{\left(\mathbf{B}^{(\alpha)}, (\hat{k} + \delta\hat{k})\, \mathbf{B}^{(\alpha)}\right)}{\left(\mathbf{B}^{(\alpha)}, (\hat{m} + \delta\hat{m})\, \mathbf{B}^{(\alpha)}\right)} . \tag{123}$$

Поскольку амплитуды $\mathbf{A}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots s$ невозмущённой системы образуют полный набор, мы можем разложить вектор $\mathbf{B}^{(\alpha)}$ по этому набору

$$\mathbf{B}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^{s} c_\beta \mathbf{A}^{(\beta)} .$$

Не ограничивая общности, можно принять $c_\alpha = 1$, тогда остальные коэффициенты c_β при $\beta \neq \alpha$ будут малы. Таким образом,

$$\mathbf{B}^{(\alpha)} = \mathbf{A}^{(\alpha)} + \delta\mathbf{A}^{(\alpha)}, \quad \delta\mathbf{A}^{(\alpha)} = \sum_{\beta \neq \alpha} c_\beta \mathbf{A}^{(\beta)} . \tag{124}$$

Подставим это выражение в (123) и сохраним лишь члены до первого порядка малости включительно. Тогда числитель в формуле (123) окажется равным

$$\left(\mathbf{B}^{(\alpha)}, (\hat{k} + \delta\hat{k})\, \mathbf{B}^{(\alpha)}\right) \approx K_\alpha + \delta K_\alpha + \left(\delta\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat{k}\, \mathbf{A}^{(\alpha)}\right) + \left(\mathbf{A}^{(\alpha)}, \hat{k}\, \delta\mathbf{A}^{(\alpha)}\right) ,$$

причём два последних слагаемых в силу соотношений ортогональности (116) равны нулю. Проделав такую же выкладку и со знаменателем в (123), получим

$$\omega_\alpha + \delta\omega_\alpha \approx \sqrt{\frac{K_\alpha + \delta K_\alpha}{M_\alpha + \delta M_\alpha}} , \tag{125}$$

откуда и следует результат (122).

10.4. Пример: упрощённая модель молекулы N_2O

Хорошо известно, что молекула CO_2 является линейной и симметричной O–C–O (см. задачу 1 к §24 из [8]). Напротив, молекула N_2O является линейной и несимметричной N—N–O, причем различие масс азота и кислорода невелико: $\delta m = m_O - m_N = m_N/7$. Рассмотрим упрощённую модель такой молекулы: три бусинки массы $m_1 = m_2 \equiv m$, $m_3 = m + \delta m$ на гладкой спице, соединенные двумя одинаковыми пружинками жесткости k. В этой модели мы учли небольшую разницу масс атомов азота и кислорода, но пренебрегли разницей жесткостей для связей N–N и N–O.

Для невозмущённой системы с $m_3 = m$ легко найти ответ, используя свойства симметрии и ортогональности нормальные колебания. Именно, имеется одно симметричное колебание

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \;\; \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

и два антисимметричных решения. Одно из них соответствует движению молекулы как целого,

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (at + b)\,,$$

а другое, ортогональное предыдущему, является антисимметричным колебанием

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \;\; \omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}}\,.$$

Найдём поправку $\delta\omega_1$ к частоте симметричных колебаний, учитывая, что

$$\delta L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\delta m\, \dot{x}_3^2\,, \;\; \delta\hat{m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta m \end{pmatrix}.$$

Согласно (122) эта поправка равна

$$\delta\omega_1 \approx -\frac{\omega_1}{2}\,\frac{\delta M_1}{M_1}\,,$$

где

$$M_1 = (1, 0, -1) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2m$$

и аналогично

$$\delta M_1 = (1, 0, -1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \delta m\,.$$

В итоге, искомая поправка равна

$$\delta\omega_1 = -\frac{\delta m}{4m}\sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{126}$$

§ 11. Модель двух осцилляторов с нелинейной связью

В основном курсе рассматривались нелинейные колебания в одномерном случае. При этом в первом (линейном) приближении мы получили гармонические колебания на основной частоте, а при учёте нелинейности (во втором приближении) — смещение равновесия и колебания на удвоенной частоте. При проведении подобной программы для многомерных колебаний в первом приближении мы также получим колебания, отвечающие первым гармоникам с частотами $\omega_1, \ldots, \omega_\alpha, \ldots, \omega_\beta, \ldots, \omega_s$. Однако уже во втором приближении возникнут принципиально новые явления — колебания с так называемыми *комбинационными частотами* $|\omega_\alpha \pm \omega_\beta|$.

Для иллюстрации того, как возникают нелинейные поправки в многомерном случае и к каким результатам они приводят, рассмотрим простой пример маятника массы m на пружинке жесткости k в поле тяжести g (рис. 22). Мы будем рассматривать лишь колебания этого маятника в вертикальной плоскости и примем, что длина ненапряжённой пружинки равна l_0. В положении равновесия длина пружинки равна $l = l_0 + (mg/k)$. В качестве обобщенных координат выберем декартовы координаты x и y отклонения маятника от положения равновесия. Функцию Лагранжа маятника

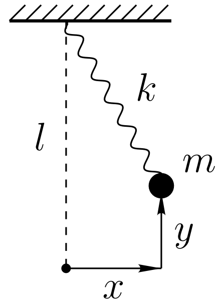

Рис. 22. Маятник на пружинке

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{k}{2}\left[\sqrt{(l-y)^2 + x^2} - l_0\right]^2 - mgy$$

разложим в ряд по малым отклонениям до третьего порядка включительно:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 - \omega_x^2 x^2 + \dot{y}^2 - \omega_y^2 y^2 + 2\alpha x^2 y\right) ,$$

где введены обозначения

$$\omega_x = \sqrt{\frac{g}{l}}\,, \quad \omega_y = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \quad \alpha = \frac{k l_0}{2ml^2}\,.$$

Решение уравнений движения

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_x^2 x &= 2\alpha x y\,, \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y &= \alpha x^2 \end{aligned}$$

ищем методом последовательных приближений

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots\,, \quad y = y^{(1)} + y^{(2)} + \ldots\,.$$

В качестве первого приближения получаем гармонические колебания с частотами ω_x и ω_y:

$$x^{(1)} = a\cos\left(\omega_x t + \varphi_x\right), \quad y^{(1)} = b\cos\left(\omega_y t + \varphi_y\right).$$

Во втором порядке первое уравнение принимает вид

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_x^2 x^{(2)} = 2\alpha\, x^{(1)} y^{(1)} = \alpha\, ab\left[\cos\left(\omega_+ t + \varphi_+\right) + \cos\left(\omega_- t + \varphi_-\right)\right] ,$$

где

$$\omega_\pm = \omega_y \pm \omega_x\,, \quad \varphi_\pm = \varphi_y \pm \varphi_x\,.$$

Решение этого уравнения представляет собой гармонические колебания с комбинационными частотами $\omega_\pm$:

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha\, ab}{2\omega_y(2\omega_x + \omega_y)} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \frac{\alpha\, ab}{2\omega_y(2\omega_x - \omega_y)} \cos(\omega_- t + \varphi_-) \,.$$

Подобным же образом из второго уравнения получаем

$$y^{(2)} = \frac{\alpha\, a^2}{2\omega_y^2} - \frac{\alpha\, a^2}{2(4\omega_x^2 - \omega_y^2)} \cos(2\omega_x t + 2\varphi_x) \,,$$

т. е. у y во втором порядке появился постоянный сдвиг и колебание с удвоенной частотой $2\omega_x$.

§ 12. Два осциллятора с частотами $\omega_y = 2\omega_x$ и малой нелинейной связью вида $\delta U = -m\alpha x^2 y$

Полученные в предыдущем параграфе решения справедливы, пока частота ω_y не близка к $2\omega_x$. При $\omega_y = 2\omega_x$ ангармонические поправки перестают быть малыми и могут приводить к значительной перекачке энергии из x в y колебания и обратно. В этом разделе мы рассмотрим подробно такой случай, имеющий отношение к связи продольных и изгибных колебаний молекулы CO_2 (так называемый *резонанс Ферми*) и к удвоению частоты света в нелинейной оптике.

Функция Лагранжа в этом случае равна

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2 + \dot{y}^2 - 4\omega^2 y^2 + 2\alpha x^2 y\right) \,.$$

Уравнения движения таковы

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 2\alpha x y \,, \\ \ddot{y} + 4\omega^2 y &= \alpha x^2 \,. \end{aligned}$$

Решение ищем в виде

$$\begin{aligned} x &= A e^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t} + \delta x \,, \\ y &= B e^{2i\omega t} + B^* e^{-2i\omega t} + \delta y \,, \end{aligned}$$

принимая, что A и B — медленно изменяющиеся амплитуды колебаний, а более быстро осциллирующими слагаемыми δx и δy можно пренебречь:

$$|\ddot{A}| \ll \omega |\dot{A}| \ll \omega^2 |A| \,, \quad |\ddot{B}| \ll \omega |\dot{B}| \ll \omega^2 |B| \,, \quad \delta x \sim \delta y \ll |A| \,.$$

Сохраняя только слагаемые с $e^{i\omega t}$ (соответственно $e^{2i\omega t}$) и пренебрегая $|\ddot{A}|$, $|\ddot{B}|$, получаем

$$\dot{A} = -i\varepsilon B A^* \,, \tag{127}$$

$$4\dot{B} = -i\varepsilon A^2 \,, \tag{128}$$

где введён малый параметр

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\omega} \,.$$

В нашей системе есть два интеграла движения. Один из них отвечает закону сохранения энергии:

$$|A|^2 + 4|B|^2 = C = \text{const}\,. \tag{129}$$

Постоянство величины C легко проверить прямым дифференцированием по времени, используя уравнения (127)–(128). Действительно, в правой части уравнения

$$\frac{dC}{dt} = \dot{A}A^* + 4\dot{B}B^* + A\dot{A}^* + 4B\dot{B}^*$$

первые два слагаемые могут быть найдены, если домножить уравнение (127) на A^*, а уравнение (128) на B^* и полученные результаты сложить:

$$\dot{A}A^* + 4\dot{B}B^* = -i\varepsilon D\,,$$

где

$$D = A^{*2}B + A^2B^*\,. \tag{130}$$

Величина D оказывается вещественной и потому

$$\frac{dC}{dt} = (-i\varepsilon D) + (-i\varepsilon D)^* = 0\,.$$

Действуя аналогичным способом, легко доказать, что интегралом движения является также сама величина D. Используя эти два интеграла движения, можно найти закон изменения со временем энергии колебаний по оси x. Эта энергия пропорцио-

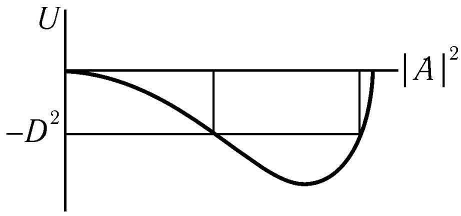

Рис. 23.
Определение границ изменения величины $|A|^2$. Запустить модель траектории.

нальна величине

$$z(t) = |A(t)|^2\,.$$

Используя уравнение (127), найдём

$$\frac{dz}{dt} = i\varepsilon(A^{*2}B - A^2B^*)\,.$$

Возведем уравнение в квадрат и учтём интегралы движения (129), (130)

$$\dot{z}^2 = -\varepsilon^2\left[\left(A^{*2}B + A^2B^*\right)^2 - 4|A|^4|B|^2\right] = -\varepsilon^2\left[D^2 - |A|^4\left(C - |A|^2\right)\right]\,.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\dot{z}^2 + \varepsilon^2 U(z) = -\varepsilon^2 D^2\,, \quad U(z) = (z - C)\,z^2\,, \tag{131}$$

аналогичном закону сохранения энергии для задачи об одномерном движении частицы с координатой $z = |A|^2$ и энергией $-\varepsilon^2 D^2$ в потенциальном поле $\varepsilon^2 U(z)$. Отсюда видно, что изменение величины $|A(t)|^2 = z(t)$ удобно исследовать с помощью графика $U(|A|^2) = (|A|^2 - C)|A|^4$ (рис. 23). Из него видно, что амплитуда $|A|$ испытывает колебания в границах

$$z_1 \leqslant |A|^2 \leqslant z_2\,,$$

определяемых уравнением

$$U(z_{1,2}) = -D^2\,.$$

Иными словами, происходят биения с перекачкой энергии из колебаний вдоль оси x в колебания вдоль оси y. Период таких биений может быть найден из уравнения (131):

$$T = \frac{2}{\varepsilon} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{-D^2 - U(z)}}\,.$$

Зависимость амплитуд $|A|$ и $|B|$ от времени может быть выражена через эллиптические функции (мы не будем этого делать).

Отметим, что, в отличие от колебании осцилляторов с линейной связью (см. задачу 6.8 из [2]), в данном случае от начальных амплитуд и фаз зависит не только глубина биений, но и период T.

§ 13. Классическая модель ЭПР и ЯМР

Электронный парамагнитный резонанс (ЭПР) открыт Е.К. Завойским в 1944 году, ядерный магнитный резонанс (ЯМР) открыт Ф. Блохом и Э. Парселлом в 1946 году. Оба эти явления представляют собой резонансное поглощение электромагнитных волн (длиною $0,01 \div 10$ см для ЭПР и $10 \div 100$ м для ЯМР), обусловленное парамагнетизмом электронов или ядер, и широко используются в фундаментальных исследованиях по физике твердого тела, в химии и биологии, в многочисленных приложениях в технике и медицине (см. [7], гл. IX).

В это разделе рассматривается простая классическая модель ЭПР и ЯМР в виде однородного намагниченного вращающегося шара с моментом инерции I и магнитным моментом, равным $\gamma \mathbf{M}$, где γ — гиромагнитное отношение, а $\mathbf{M}$ — момент импульса шара. Функция Гамильтона шара в однородном магнитном поле $\mathbf{B}(t)$ имеет вид

$$H = \frac{M^2}{2I} - \gamma \mathbf{M}\mathbf{B}(t)\,. \tag{132}$$

Укажем для примера, что для электрона $\gamma_e = -|e|/(m_e c)$, а для нейтрона $\gamma_n = -1,91\,|e|/(m_p c)$.

13.1. Уравнение движения вектора M

Уравнение движения вектора момента импульса $\mathbf{M}(t)$ удобно записать, используя скобки Пуассона

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \{H,\, \mathbf{M}\} = \frac{\{M^2,\, \mathbf{M}\}}{2I} - \gamma \sum_i \{M_i,\, \mathbf{M}\}\, B_i(t)\,.$$

При нахождении z-компоненты этого уравнения, нам необходимо вычислить следующие скобки Пуассона

$$\{M^2,\, M_z\} = 0\,,\ \ \{M_x,\, M_z\} = M_y\,,\ \ \{M_y,\, M_z\} = -M_x\,,\ \ \{M_z,\, M_z\} = 0\,,$$

что приводит к уравнению

$$\frac{dM_z}{dt} = -\gamma\,(M_y B_x - M_x B_y) = \gamma[\mathbf{M}, \mathbf{B}(t)]_z$$

или

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma[\mathbf{M}, \mathbf{B}(t)]\,. \tag{133}$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{M}$ вращается с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_B = -\gamma\mathbf{B}(t)\,. \tag{134}$$

В частности, если магнитное поле постоянно и направлено по оси z,

$$\mathbf{B} = (0,\, 0,\, B_0)\,,$$

то вектор $\mathbf{M}$ прецессирует вокруг направления $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} M_x &= M_x(0)\cos(\gamma B_0 t) + M_y(0)\sin(\gamma B_0 t), \\ M_y &= -M_x(0)\sin(\gamma B_0 t) + M_y(0)\cos(\gamma B_0 t), \\ M_z &= M_z(0). \end{aligned} \tag{135}$$

13.2. Движение вектора $\mathbf{M}(t)$ во вращающемся магнитном поле

Рассмотрим теперь движение вектора $\mathbf{M}(t)$ для случая, когда магнитное поле имеет большую постоянную составляющую B_0 вдоль этой оси и малую составляющую B_1, вращающуюся в плоскости xy с постоянной угловой скоростью Ω:

$$\mathbf{B}(t) = (B_1\cos\Omega t,\, B_1\sin\Omega t,\, B_0)\,. \tag{136}$$

Пусть в начальный момент времени вектор $\mathbf{M}(t)$ расположен вдоль оси z

$$\mathbf{M}(0) = (0,\, 0,\, M_0)\,. \tag{137}$$

В дальнейшем его движение определяется как вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_B = -\gamma\mathbf{B}(t)$, которая в свою очередь вращается вокруг оси z с угловой скоростью Ω.

Для описания этого сложного движения удобно воспользоваться вращающейся системой отсчёта K', в которой вектор $\mathbf{B}$ неподвижен, а его компоненты совпадают с компонентами вектора (136) в начальный момент времени

$$B'_x = B_1\,,\ \ B'_y = 0\,,\ \ B'_z = B_0\,. \tag{138}$$

Вектор $\mathbf{M}$ в системе K' вращается с постоянной угловой скоростью[4]

$$\boldsymbol{\omega}'_B = -\gamma\mathbf{B}' - \boldsymbol{\Omega}\,, \tag{139}$$

[4]Это легко увидеть из того факта, что функция Гамильтона во вращающейся системе H' связана с функцией Гамильтона (132) соотношением $H' = H - \boldsymbol{\Omega}\,\mathbf{M}$ (см. задачу 2 к §40 из [8]).

компоненты которой равны

$$(\boldsymbol{\omega}'_B)_x = -\gamma B_1, \quad (\boldsymbol{\omega}'_B)_y = 0, \quad (\boldsymbol{\omega}'_B)_z = -\gamma B_1 - \Omega \equiv \epsilon. \tag{140}$$

Особый интерес представляет резонансный случай $\epsilon = 0$, при котором вектор $\mathbf{M}$ в системе K' вращается вокруг оси x' с угловой скоростью $(-\gamma B_1)$,

$$M'_x = 0\,, \quad M'_y = M_0 \sin(\gamma B_1 t)\,, \quad M'_y = M_0 \cos(\gamma B_1 t)\,,$$

т. е. через время $\pi/(\gamma B_1)$ оказывается направлен вдоль оси $(-z)$ — "полный переворот" (в квантовой теории этому соответствует поглощение энергии, связанное с переходом на ближайший верхний уровень).

В общем случае при заданном начальном условии компоненты $\mathbf{M}$ во вращающейся системе равны

$$\begin{aligned} M'_x &= -\frac{\epsilon}{\lambda}\, a M_0 (1 - \cos \lambda t), \\ M'_y &= a M_0 \sin \lambda t, \\ M'_z &= \left(\frac{\epsilon^2}{\lambda^2} + a^2 \cos \lambda t \right) M_0, \end{aligned}$$

где

$$\lambda = \sqrt{\epsilon^2 + \gamma^2 B_1^2}, \quad a = \frac{\gamma B_1}{\sqrt{\epsilon^2 + \gamma^2 B_1^2}}.$$

В неподвижной системе

$$\begin{aligned} M_x &= M'_x \cos \Omega t - M'_y \sin \Omega t, \\ M_y &= M'_x \sin \Omega t + M'_y \cos \Omega t, \\ M_z &= M_z. \end{aligned}$$

При $B_1 \ll B_0$ зависимость амплитуд $M_{x,y}$ от Ω носит резонансный характер: вообще говоря, эти амплитуды малы $\sim M_0 B_1/B_0$, но при $|\epsilon| = |\Omega_B + \gamma B_1| \lesssim \gamma B_1$ они резко возрастают, достигая значений $\sim M_0$. В частности, при $\Omega_B = -\gamma B_0$

$$\begin{aligned} M_x &= -M_0 \sin(\gamma B_1 t) \sin(\gamma B_0 t), \\ M_y &= M_0 \sin(\gamma B_1 t) \cos(\gamma B_0 t), \\ M_z &= M_0 \cos(\gamma B_1 t). \end{aligned}$$

Литература

[1] *Г.Л. Коткин, В.Г. Сербо, А.И. Черных* Лекции по аналитической механике, Москва–Ижевск: РХД, 2010 5, 25, 40, 41

[2] *Г.Л. Коткин, В.Г. Сербо* Сборника задач по классической механике, Москва–Ижевск: РХД, 2010 5, 22, 23, 27, 37, 47

[3] *И.Б. Хриплович* Общая теория относительности. — Москва–Ижевск: РХД, 2009. 15

[4] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц* Теория поля, М.: Наука, 1998. 15, 24, 37

[5] *Д. Будкер, Д. Кимбел, Д. ДеМилль* Атомная физика (Освоение через задачи), М.: Физматлит, 2009 34

[6] *Г. Голдстейн, С. Пул, Дж. Сафко* Классическая механика. — Москва–Ижевск: РХД, 2012. 37

[7] *Ч. Киттель* Введение в физику твердого тела. — М.: Наука, 1978. 47

[8] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц* Механика. — М.: Наука, 1988. 43, 48