1. Электрический ток

Урок 15

Закон сохранения заряда. Закон Ома

Направленное движение электрических зарядов q — ток J.

$$J = dq/dt.$$

Вектор плотности тока $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} = en\mathbf{v}$.
Закон Ома в дифференциальной форме: $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$.
Для линейных проводников закон Ома $J = U/R$, где $R = \ell/(\sigma S)$.
Закон сохранения заряда в интегральной форме

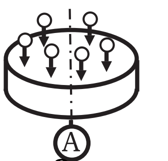
$$dq/dt = -\oint j_{1n} dS,$$

а в дифференциальной форме: $\partial\rho/dt = -\operatorname{div}\mathbf{j}$.
Для стационарных токов $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, откуда следует граничное условие $j_{1n}| = j_{2n}|$.
Из потенциальности поля $\mathbf{E}$ следует $E_{1\tau}| = E_{2\tau}|$ или $\frac{j_{1\tau}}{\sigma_1}| = \frac{j_{2\tau}}{\sigma_2}|$.
Потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \text{ где } \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \ \ E_{1\tau}| = E_{2\tau}|, \ \ \sigma_1 E_{1n}| = \sigma_2 E_{2n}|.$$

По найденному $\mathbf{E}$ и закону Ома $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ находим вектор плотности тока $\mathbf{j}$.
Правила Кирхгофа $\sum J_i = 0, \ \ \sum \mathcal{E}_k = \sum J_i R_i$.
Закон Джоуля—Ленца: мощность $N = \int \sigma E^2 dV = \int \frac{j^2}{\sigma} dV$.
Вольт-амперная характеристика для вакуумного диода — закон «3/2»: $j = \frac{1}{9\pi}\sqrt{\frac{2e}{m}\frac{U^{3/2}}{d^2}}$.
Заметим, что $Jd\ell = \mathbf{j}dV = \rho\mathbf{v}dV = \frac{dq}{dV}\mathbf{v}dV = \mathbf{v}dq$.

1.1. На полый металлический цилиндр, радиус крышек-торцов которого равен a, падает параллельно оси цилиндра однородный поток электронов. Заряд электрона — e, скорость — v, число электронов в единице объема — n. Собираемый заряд через амперметр, подсоединенный к центру нижнего торца, уходит на землю. Найти распределение тока на торцах $j_{1,2}(R)$.



Решение

$$\frac{evn\pi r^2}{2\pi r} = j_1 = \frac{envr}{2}$$

$$j_2 = \frac{evn\pi a^2}{2\pi r} = \frac{evna^2}{2r}$$

$j_{\text{верх}} = envr/2$, $j_{\text{нижн}} = enva^2/2r$.

1.2. (Задача 3.2) Пучок заряженных частиц с массой m, зарядом q и скоростью v_0 каждая влетает в пространство с электрическим полем $\mathbf{E}$ в направлении вдоль поля и проходит в нем путь ℓ. Найти плотность тока пучка на выходе, если на входе она равна j_0, а также скорость и плотность числа частиц в пучке.

Решение

$$j = j_0$$

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{mv_0^2}{a} + \frac{2qEl}{m}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qEl}{m}}$$

$$n = \frac{j_0}{qv} = \frac{n_0 v_0}{v}$$

$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0$, $v = \sqrt{v_0^2 + 2qE\ell/m}$, $n = j_0/\left(qv\right)$.

1.3. (Задача 3.3) В бесконечную проводящую с проводимостью σ и проницаемостью ε среду помещен заряд Q. Найти время релаксации, т. е. время, в течение которого заряд в этой точке уменьшится в e раз.

Решение Пусть в момент времени t внутри объема V, куда первоначально был помещен заряд Q_0, находится заряд $Q(t)$. За время dt из объема вытечет количество заряда

$$dQ = -\left(\int\limits_S (\mathbf{j}\, d\mathbf{s})\right) dt\,,$$

где $\int\limits_S (\mathbf{j}\, d\mathbf{s})$ — полный ток через поверхность S, ограничивающий объем V; $\mathbf{j}$ — вектор плотности тока на этой поверхности. Используя дифференциальный закон Ома $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, находим, что

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\int\limits_S (\mathbf{D}\, d\mathbf{s}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\, 4\pi Q.$$

Решая это дифференциальное уравнение и используя начальное условие $Q(0) = Q_0$, получаем

$$Q = Q_0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t} = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

откуда видно, что заряд уменьшается в e раз за время $\tau = \varepsilon/4\pi\sigma$.

1.4. В неоднородной проводящей среде с проводимостью $\sigma(\mathbf{r})$ и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\mathbf{r})$ поддерживается стационарное распределение токов $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Найти объемное распределение зарядов $\rho(\mathbf{r})$ в этой среде.

Решение По закону Ома в дифференциальной форме $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. По закону сохранения заряда в стационарном случае $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, т. е.

$$\operatorname{div}(\sigma\mathbf{E}) = \sigma\operatorname{div}\mathbf{E} + \mathbf{E}\operatorname{grad}\sigma = 0;$$

откуда

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -\mathbf{E}(\operatorname{grad}\sigma)/\sigma. \tag{1}$$

По теореме Гаусса в дифференциальной форме $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$; откуда

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon + \varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E}).$$

Взяв $\operatorname{div}\mathbf{E}$ из (1), получим

$$\rho = \frac{\mathbf{E}}{4\pi\sigma}(\sigma\operatorname{grad}\varepsilon - \varepsilon\operatorname{grad}\sigma) = \frac{\mathbf{j}}{4\pi\sigma^2}(\sigma\operatorname{grad}\varepsilon - \varepsilon\operatorname{grad}\sigma).$$

Отметим, что $\rho \equiv 0$ при $\frac{\operatorname{grad}\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\operatorname{grad}\sigma}{\sigma}$.

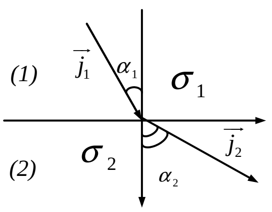
В отсутствие поляризуемости среды, когда ее свойства описываются лишь через проводимость $\sigma(\mathbf{r})$, получаем

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{(\mathbf{j}\cdot\operatorname{grad}\sigma)}{4\pi\sigma^2}$$

при $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

1.5. (Задача 3.4) Найти закон преломления линий тока на плоской поверхности раздела двух сред с проводимостями σ_1 и σ_2.

Решение В стационарном случае $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, откуда $j_{1n}| = j_{2n}|$. Нормальные составляющие к границе раздела двух сред непрерывны, иначе на границе будет изменяться заряд. С другой стороны, $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, откуда следует непрерывность тангенциальной составляющей напряженности электрического поля $E_{1\tau} = E_{2\tau}$. Так как $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, то



$$j_{1\tau} = \sigma_1 E_{1\tau}, \qquad j_{2\tau} = \sigma_2 E_{2\tau} = j_{1\tau}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Поскольку $j_{1\tau}/j_{1n} = \operatorname{tg}\alpha$ (см. рисунок), то

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

1.6. (Задача 3.5) Пространство между бесконечно длинными коаксиальными идеально проводящими цилиндрами радиусов a, b заполнено веществом с проводимостью $\sigma(r) = \alpha r^n$. Найти распределение потенциала в пространстве между цилиндрами и сопротивление на единицу длины. Потенциалы цилиндров: $U(a) = 0, U(b) = U_0$.

Решение

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

$$\operatorname{div} (\sigma \mathbf{E}) = -(\nabla, \sigma \nabla \varphi) = 0$$

$$\sigma \Delta \varphi + (\nabla \sigma, \nabla \varphi) = 0$$

В цилиндрической системе координат $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$.

$$\alpha r^n \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) + \alpha n r^{n-1} \frac{d\varphi}{dr} = 0$$

$$r^n \frac{d^2\varphi}{dr^2} + (n+1)\, r^{n-1} \frac{d\varphi}{dr} = 0$$

$$\varphi(r) = A r^k + B$$

$k_1 = -n \; k_2 = 0, \varphi(a) = V_0 \; \varphi(b) = 0$

$$\varphi(r) = V \frac{\left({}^{b}\!/_{r} \right)^n - 1}{\left({}^{b}\!/_{a} \right)^n - 1}$$

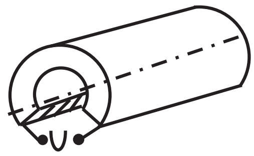
Ток на единицу длины вдоль z

$$I = 2\pi r j = -2\pi r \sigma(r) \nabla \varphi = 2\pi V \frac{\alpha b^n}{\left({}^{b}\!/_{a} \right)^n - 1} = \frac{V}{R}$$

$$R = \frac{\left({}^{b}\!/_{a} \right)^n - 1}{2\pi \sigma_{\max}}$$

При $\sigma = const$задача о токе соответствует $\Delta\varphi = 0$. Это можно использовать для аналогового (модельного) решения уравнения Лапласа. $\varphi(r)$=$U[1-(a/r)^n]/[1-(a/b)^n]$; R=$[(b/a)^n$–$1]$ / (2
где $\sigma_{\max} = \alpha b^n$.

1.7. (Задача 3.7) Из толстой длинной трубы с радиусами a и b, сделанной из



материала с проводимости σ, вырезана вдоль оси часть с угловым размером α_0. К продольным плоскостям разреза подведено напряжение U. Найти распределение плотности тока $j(r)$ по сечению отрезка трубы и сопротивление единицы длины. Краевыми эффектами пренебречь.

Решение В цилиндрической системе координат $j = j_\alpha$. Поскольку плотность тока j_α зависит только от r, то $E_\alpha = j_\alpha/\sigma$ зависит тоже только от r. Тогда через интеграл по дуге определенного радиуса разность потенциалов или напряжение запишется так:

$$U = \int\limits_0^{(2\pi-\alpha_0)r} (\mathbf{E}\,d\mathbf{r}) = E_\alpha(r)(2\pi - \alpha_0)r,$$

откуда

$$E_\alpha(r) = \frac{U}{(2\pi - \alpha_0)r}$$

и, следовательно,

$$j_\alpha(r) = \frac{U\sigma}{(2\pi - \alpha_0)r}\,.$$

Найдем величину тока на единицу длины трубы:

$$J = \int\limits_a^b j_\alpha(r)\,dr = \frac{U\sigma \ln b/a}{2\pi - \alpha_0}\,.$$

Поскольку $J = U/R$, то из последнего выражения следует, что сопротивление единицы длины трубы:

$$R = \frac{2\pi - \alpha_0}{\sigma \ln b/a}\,.$$

1.8. (Задача 3.9) Найти стационарное поле E в плоском конденсаторе с напряжением U, диэлектрик которого состоит из двух слоев толщины ℓ_1, ℓ_2 с диэлектрическими постоянными ε_1, ε_2 и проводимостями σ_1, σ_2. Определить свободный и связанный заряды на границе раздела сред.

Решение Есть ток утечки $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$. $l_1 E_1 + l_2 E_2 = V$ - полное падение напряжения.

$$E_{1,2} = \frac{\sigma_{2,1} V}{l_1\sigma_2 + l_2\sigma_1}$$

Обратите внимание, что $1, 2 \to 2, 1$. На границе между слоями свободный заряд.

$$S\,(D_{2n} - D_{1n}) = 4\pi\sigma_{\text{своб}},$$

откуда

$$\sigma_{\text{своб}} = \frac{V\left(\sigma_1\varepsilon_2 - \sigma_2\varepsilon_1\right)}{4\pi\left(l_1\sigma_2 + l_2\sigma_1\right)}$$

$$\sigma_{\text{связ}} = \sigma' = \frac{1}{4\pi}\left[\left(D_{2n} - E_{2n}\right) - \left(D_{1n} - E_{1n}\right)\right]$$

Это все следует из

$$j_{1n} = j_{2n}$$

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}$$

$$D_{n2} - D_{n1} \neq 0 = D_{n1}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right)$$

К положительно заряженной обкладке конденсатора прилегает первый слой.

1.9. (Задача 3.18) Заземление осуществляется с помощью идеально проводящего шара радиуса a, на половину утопленного в землю (проводимость земли $\sigma_1 = \mathrm{const}$). Слой земли радиуса b, концентрический с шаром и прилегающий к нему, имеет искусственно повышенную проводимость σ_2. Найти сопротивление такого заземлителя.

Решение Получим общее соотношение для сопротивления заземления

$$\int \mathbf{D}d\mathbf{s} = 4\pi Q = 4\pi CV = \varepsilon\int \mathbf{E}d\mathbf{s} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\int \mathbf{j}d\mathbf{s} = \frac{\varepsilon}{\sigma}I$$

Считая C емкостью в вакууме и $\varepsilon = 1$.

$$4\pi CV = \frac{I}{\sigma}$$

$$V = IR$$

Тогда сопротивление заземления

$$R = \frac{1}{4\pi C\sigma}.$$

Емкость полусферы — $C_{\text{сф}/2} = \frac{b}{2}$ Емкость половины сферического конденсатора

$$2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{C_{\text{сфк}/2}}.$$

$$R = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sigma_1}\frac{2}{b} + \frac{2}{\sigma_2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right\}.$$

1.10. (Задача 3.19) Концы некоторой цепи заземлены с помощью двух идеально проводящих сфер (радиусы их a_1 и a_2), на половину утопленных в землю, служащей вторым проводом. Расстояние между этими сферами $\ell \gg a_1,\ a_2$, проводимость земли — σ. Найти сопротивление между заземлителями.

Решение

$$I_1 = \frac{\varphi_1}{R_1} = 4\pi C_1 \sigma_1 \varphi_1$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2}{R_2} = -4\pi C_2 \sigma_2 \varphi_2$$

$$I_1 = I_2 = I$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{1}{\sigma_1 C_1} + \frac{1}{\sigma_2 C_2}\right) = IR$$

$$R \approx \frac{1}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)$$

1.11. (Задача 3.21) Оценить сопротивление заземления, выполненного в форме пластины с размерами $\ell \gg a \gg h$. Оценить напряженность электрического поля вокруг этого заземления, если заземление находится на глубине $r \gg \ell$. Найти «шаговое» напряжение (длина шага λ) вблизи этого заземления.

Решение

$$C \approx \frac{l}{2\left(\pi + \ln {}^{l}\!/_{a}\right)}$$

$$I = \frac{U}{R}$$

$$R = \frac{2\left(\pi + \ln {}^{l}\!/_{a}\right)}{4\pi\sigma l} \approx \frac{1}{2\pi\sigma l}$$

$$\int E ds = E \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{\sigma}\int j ds = \frac{1}{\sigma} I$$

$$E = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{U \cdot 2\pi\sigma l}{\pi + \ln {}^{l}\!/_{a}}\frac{1}{\sigma} \approx \frac{lU}{2R^2 \ln {}^{l}\!/_{a}}$$

$$IR = U$$

$$\Delta U_{\text{шаг}} = E\lambda$$

$R = \frac{\pi + \ln \ell/a}{2\pi\sigma\ell}$, $E \simeq \frac{U\ell}{2r^2 \ln \ell/a}$, $\Delta \mathrm{U}_{\text{шаг}} \simeq \frac{U\ell\lambda}{2r^2 \ln \ell/a}$.