1. Магнитостатика

Закон Ампера ($\mu = 1$):

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{J_1 J_2 \left[d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{12}]\right]}{c^2 r_{12}^3} = \frac{[\mathbf{j}_2 \times [\mathbf{j}_1 \times \mathbf{r}_{12}]]\, dV_1 dV_2}{c^2 r_{12}^3} = \\ = \frac{[\mathbf{v}_2 \times [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12}]]\, dq_1 dq_2}{c^2 r_{12}^3}.$$

Сила Ампера:

$$d\mathbf{F} = \frac{J\,[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]}{c} = \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]\, dV}{c} = \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]\, dq}{c}.$$

Закон Био–Савара ($\mu = 1, \mathbf{B} = \mathbf{H}$):

$$d\mathbf{H} = \frac{J\,[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{cr^3} = \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{r}]\, dV}{cr^3} = \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{cr^3} dq$$

$\mathbf{B}[\text{Тл}] = 10^4 \mathbf{B}[\text{Гс}]$, $\mathbf{H}[\text{А/м}] = 4\pi \cdot 10^{-}3\mathbf{H}[\text{Э}]$.

В вакууме ($\mu = 1$) для постоянных токов уравнения Максвела имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \;\; \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \;\; \mathbf{B} = \mathbf{H}.$$

В интегральной форме:

$$\oiint B_n dS = 0, \;\; \oint B_l dl = \frac{4\pi}{c} \iint j_n dS.$$

Граничные условия:

$$B_{1n}| = B_{2n}|, \;\; \mathbf{H}_{1\tau}| - \mathbf{H}_{2\tau}| = \frac{4\pi}{c} \left[\mathbf{I}_{\text{пов}} \times \mathbf{n}_{21}\right].$$

Скалярный магнитный потенциал φ_m для областей, где $\mathbf{j} \equiv 0$ удовлетворяет уравнениям:

$$\Delta\varphi_m = 0, \;\; \varphi_{1m}| = \varphi_{2m}|\,, \; \mu_1 \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right| = \mu_2 \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right|.$$

Векторный магнитный потенциал $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$) удовлетворяет уравнениям

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mu\mathbf{j}, \;\; \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\frac{\mathbf{j}}{r} dV = \frac{\mu}{c} J \frac{d\mathbf{l}}{r} = \mu \frac{\mathbf{v} dq}{cr} = \frac{\varepsilon\mu\mathbf{v}}{c} d\varphi.$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}.$$

Векторный потенциал магнитного диполя

$$\mathbf{A}_{\text{точ}} = \frac{[\mathbf{m} \times \mathbf{r}]}{r^3}, \quad \text{где} \;\; \mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}'] dV'.$$

Магнитный момент маленького витка с током $\mathbf{m} = \frac{JS}{c}\mathbf{n}$.
Сила и момент, действующие на магнитный диполь в слабо неоднородном поле

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{mB}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}, \mathbf{N} = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}].$$

Урок 18

Закон Био-Савара. Теорема Стокса. Суперпозиция

1.1. (Задача 4.1) Найти поле на оси и в центре кругового витка радиуса a с током J. Используя полученный результат, найти:

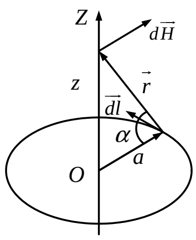
а) поле на оси круглого соленоида в точке, из которой его края видны под углами $\alpha_1,\ \alpha_2$;

б) поле на конце полубесконечного соленоида;

в) поле внутри бесконечного соленоида.

Число витков на единицу длины соленоидов n.

Решение По закону Био-Савара напряженность магнитного поля $d\mathbf{H}$, создаваемая элементом тока $J\,d\ell$,



$$d\mathbf{H} = \frac{J}{cr^3}[\,d\ell \times \mathbf{r}\,], \tag{1}$$

где r — расстояние от элемента тока до точки наблюдения. По принципу суперпозиции полное поле в данной точке можно получить интегрированием (1) по всему кольцу. Замечаем, что на оси витка

$$\mathbf{H} = \oint d\mathbf{H} = \mathbf{e}_z \oint dH_z,$$

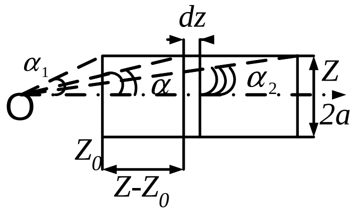
где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор в направлении оси Z. Интегрируя по кольцу z-ю проекцию напряженности магнитного поля dH_z, находим

$$H_z = \oint dH_z = \frac{J\cos\alpha}{cr^2} \oint d\ell = \frac{2\pi a J \cos\alpha}{cr^2} = \frac{2\pi J}{c} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}. \tag{2}$$

Используя уравнение (2), получаем, что поле в центре витка

$$H_z\Big|_{z=0} = \frac{2\pi J}{ca}\,.$$

а) Найдем поле на оси круглого соленоида в точке, из которой его края видны



под углами α_1 и α_2. Используя уравнение (2), запишем поле, создаваемое в точке $z = 0$ током соленоида, текущим по $n\,dz$ виткам, расположенным на расстоянии z от начала координат

$$dH_z = \frac{2\pi J}{c} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\, n\, dz\,.$$

Интегрируя но всей длине соленоида, получаем полное поле, создаваемое соленоидом в точке $z = 0$:

$$H_z = \frac{2\pi J n a}{c} \int\limits_{z_0}^{z_0+\ell} \frac{dz}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,,$$

где ℓ — длина соленоида. Перейдем от интегрирования по z к интегрированию по углу α, используя формулы:

$$z = a\ \mathrm{ctg}\,\alpha\,, \qquad dz = -\frac{a\,d\alpha}{\sin^2\alpha}\,, \qquad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\,.$$

Тогда

$$H_z = -\frac{2\pi n J}{c} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{2\pi n J}{c}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\,. \tag{3}$$

б) Если положить $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = 0$, то из уравнения (3) получим напряженность магнитного поля на конце полубесконечного соленоида

$$H_z = \frac{2\pi J n}{c}\,.$$

в) При $\alpha_1 = \pi$, $\alpha_2 = 0$ формула (3) дает поле внутри бесконечного соленоида

$$H_z = \frac{4\pi J n}{c}\,.$$

1.2. Найти величину магнитного поля на оси равномерно заряженного диска радиуса a (полный заряд диска равен Q), вращающегося вокруг оси с угловой скоростью ω на расстоянии h от диска.

Решение Магнитное поле (z-компонента) от тонкого кольца с радиусом r шириной dr в соответствии с формулой (2) из предыдущей задачи

$$dH_z = \frac{2\pi r^2}{c} \frac{dJ}{(h^2+r^2)^{3/2}}.$$

Ток dJ, текущий в кольце с радиусом r шириной dr, равен

$$dJ = \frac{Q}{\pi a^2}\omega r dr.$$

Тогда магнитное поле всего диска на оси

$$H_z\left(h\right) = \frac{2\pi\omega Q}{c\pi a^2}\int\limits_0^a \frac{r^3 dr}{\left(h^2+r^2\right)^{3/2}} = \frac{2\omega Q}{ca^2}\left\{\sqrt{h^2+r^2} + \frac{h^2}{\sqrt{h^2+r^2}}\right\}\Bigg|_0^a = \\ = \frac{2\omega Q}{ca^2}\left\{\frac{2h^2+a^2}{\sqrt{h^2+r^2}} - 2h\right\}.$$

1.3. (Задача 4.4) Определить магнитное поле, создаваемое двумя параллельными плоскостями, по которым текут токи с одинаковыми поверхностными плотностями $i = \mathrm{const}$. Рассмотреть случаи: а) токи текут в противоположных направлениях; б) токи направлены одинаково.

Решение

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int \mathbf{j}d\mathbf{s}.$$

Это следствие уравнения Максвелла и теоремы Стокса

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Из симметрии ясно, что магнитное поле может быть направлено только параллельно плоскостям и перпендикулярно току. Тогда

$$2lH = \frac{4\pi}{c}il$$

$$H_1 = \frac{2\pi i}{c}$$

а) $H = \frac{4\pi i}{c}$ между плоскостями и $H = 0$ вне них; б) $H = 0$ между плоскостями и $H = \frac{4\pi i}{c}$ вне них. В обоих случаях $\mathbf{H}$ направлено вдоль плоскостей и перпендикулярно току.

1.4. (Задача 4.5) Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса b находится коаксиальный с ней сплошной провод радиуса a. По этим проводникам текут постоянные одинаковые токи J в противоположных направлениях. Определить магнитное поле во всем пространстве. Сравнить его с полем прямого тока.

Решение $H_r = H_z = 0$ всюду; $H_\alpha = \frac{2Jr}{ca^2}$ при $r \leq a$, $H_\alpha = \frac{2J}{cr}$ при $a \leq r \leq b$ и $H_\alpha = 0$ при $r > b$.

1.5. (Задача 4.8) Определить магнитное поле в цилиндрической полости, вырезанной в бесконечно длинном цилиндрическом проводнике. Радиусы полости и проводника — соответственно a и b, расстояние между их параллельными осями — d $(b > a + d)$. Ток J равномерно распределен по всему сечению.

Решение Магнитное поле внутри сплошного цилиндра с постоянной плотностью тока в точке $\mathbf{r}$ равно (по теореме Стокса)

$$(H) = \frac{2\pi}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{r}.$$

Используя принцип суперпозиции и считая что отверстие — это пространство, через которое идут два тока $\mathbf{j}$ и $-\mathbf{j}$. Тогда в этой цилиндрической полости

$$\mathbf{H} = \frac{2\pi}{c}\left(\mathbf{j} \times \mathbf{r} - \mathbf{j} \times \mathbf{r}'\right) = \frac{2\pi}{c}\mathbf{j} \times \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right).$$

Учитывая, что $\mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, получим

$$\mathbf{H} = \frac{2\pi}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{d}.$$

1.6. (Задача 4.14) Найти положение границ и оценить объем однородного с точностью до $\Delta H/H$=0,01 магнитного поля, создаваемого током J, идущим в витках радиуса $R = 10$ см. Отрезок $O_1O_2 = R$, соединяющий центры витков, перпендикулярен их плоскостям.

Решение $H_z\left(r, z\right) = \frac{32\pi}{5\sqrt{5}}\left(1 - 1,670\frac{r^2}{R^2} - 1,152\frac{z^4}{R^4}\right)\frac{J}{cR}$, где расстояния r, z отсчитываются от середины отрезка O_1O_2 поперек и вдоль него соответственно. Область однородности поля с заданной величиной δ есть цилиндр радиуса $r = R\sqrt{\delta/1,67}$ и длины $\ell = 2R\sqrt[4]{\frac{\delta}{1,152}}$. r=0,77 см и ℓ=6,1 см; $V = \pi r^2 \ell$=11,5 см^3.