# 1. Электростатика

## Урок 4

**Мультиполи**

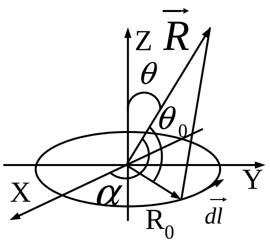
При $r \gg a$, где $a$ — характерный размер системы зарядов, потенциал произвольной системы зарядов

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{pr}}{r^3} + \frac{1}{2}\Sigma D_{\mu\nu}\frac{x_\mu x_\nu}{r^5} + \ldots, \tag{1}$$

где $q = \sum q_k$ , $\mathbf{p} = \sum q_k \mathbf{r}'_k$ , $D_{\mu\nu} = \sum\limits_k q_k \left(3x'^k_\mu x'^k_\nu - r'^2_k \delta_{\mu\nu}\right)$ , $x'^k$ — координаты заряда $q_k$ , а $r'^2_k = \sum (x'^k)^2$.

1.1. (Задача 1.39) Найти потенциал $\varphi(\mathbf{R})$ поля двух концентрических колец радиусом $a$ и $b$ с зарядами $q$ и $-q$ для: а) $R \gg a, b$ и б) $R \ll a, b$.

**Решение** Сначала вычислим потенциал от одного кольца на больших расстояниях.




Заряженное кольцо радиуса $R_0$ расположим в плоскости $(x, y)$. Центр кольца 0 совпадает с началом координат. Ось $X$ направим перпендикулярно плоскости, в которой лежат $Z$ и $\mathbf{R}$. $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки наблюдения. Поскольку система осесимметрична, результат не должен зависеть от выбора направления оси $X$. Потенциал, создаваемый зарядом элемента кольца $d\ell = R_0\, d\alpha$, в точке $(R, \theta)$ равен

$$d\varphi = \frac{q}{2\pi R_0}\,\frac{R_0\, d\alpha}{\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2RR_0\cos\theta_0}}.$$

Потенциал, создаваемый зарядом всего кольца:

$$\varphi = \frac{q}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2RR_0\cos\theta_0}}. \tag{2}$$

Связь углов $\theta$, $\theta_0$ и $\alpha$ определяется из соотношения

$$\cos\theta_0 = \frac{\mathbf{RR}_0}{RR_0} = \frac{R_y R_{0y}}{RR_0} = \sin\theta\sin\alpha.$$

Чтобы найти потенциал на расстояниях, больших по сравнению с радиусом кольца, разложим подынтегральное выражение в ряд Тейлора по малому параметру $R_0/R$ до второго порядка включительно. Поскольку дипольный момент кольца равен нулю, что видно из симметрии расположения зарядов, то оставим в сумме три первых члена:

$$\frac{1}{\sqrt{R_0^2+R^2-2RR_0\cos\theta_0}}=\frac{1}{R}\,\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{R_0}{R})^2-\frac{2R_0}{R}\cos\theta_0}}\simeq$$

$$\simeq\frac{1}{R}\left(1+\frac{R_0}{R}\cos\theta_0+\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2(3\cos^2\theta_0-1)+\ldots\right).$$

Вычисляя теперь интеграл (1), получаем

$$\varphi=\frac{q}{R}+\frac{q}{4R}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2(1-3\cos^2\theta).$$

При вычислении использована связь $\cos\theta_0=\sin\theta\sin\alpha$. Значит, потенциал от двух концентрических колец радиусов $a$ и $b$ с зарядами $q$ и $-q$ имеет вид

$$\varphi\,(R,\,\theta)=\frac{q}{4R^3}(a^2-b^2)(1-3\cos^2\theta)\qquad\text{при}\qquad a,\,b\ll R.$$

Теперь найдем потенциал кольца радиуса $R_0$ при $R_0\gg R$ :

$$\varphi\,(R,\,\theta)=\frac{q}{R_0}+\frac{q}{2\pi R_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,(3\sin^2\theta\,\sin^2\alpha-1)\,d\alpha=$$

$$=\frac{q}{R_0}+\frac{q}{4R_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^2(1-3\cos^2\theta).$$

Тогда потенциал двух колец при $a,\,b\gg R$ будет иметь вид

$$\varphi(R,\,\theta)=q\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)-\frac{qR^2}{4}\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}\right)(3\cos^2\theta-1)\ .$$

1.2. (Задача 1.42)Найти потенциал электрического поля на больших расстояниях от следующих систем зарядов:

а) заряды $q$, $-2q$, $q$ расположены на оси $Z$ на расстоянии $a$ друг от друга (линейный квадруполь);

б) заряды $\pm q$ расположены в вершинах квадрата, стороны которого параллельны осям $X$ и $Y$, так что соседние заряды имеют разные знаки, а в начале координат расположен заряд $+q$ (плоский квадруполь).

**Решение** а)

$$D_{zz} = \sum q_i \left(3z_i^2 - r_i^2\right) = 2q2a^2 = 4qa^2 = D$$

$$D_{xx} = D_{yy} = -\sum q_i r_i^2 = -2qa^2$$

$$\varphi = \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2R_0^3}$$

$$n_x = \sin\theta\cos\varphi$$

$$n_y = \sin\theta\sin\varphi$$

$$n_z = \cos\theta$$

$$\varphi = \frac{D_{xx}n_x^2 + D_{yy}n_y^2 + D_{zz}n_z^2}{2R_0^3} = \frac{D}{2}\cdot\frac{1}{2R_0^2}\left(-n_x^2 - n_y^2 + 2n_z^2\right) =$$
$$= \frac{D}{4R_0^3}\left(-1 + 3n_z^2\right) = \frac{4qa^2}{4R_0^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right).$$

в)

$$D_{xx} = \sum q_i \left(3x_i^2 - r_i^2\right) = 0$$

$$D_{yy} = 0$$

$$D_{zz} = 0$$

$$D_{xy} = \frac{3q^{(1)}a^2}{4} + \frac{3q^{(2)}a^2}{4} + \frac{3qa^2}{4} + \frac{3qa^2}{4} = 3qa^2$$

$$D_{yx} = D_{xy} = 3qa^2$$

$$\phi^{(2)} = \frac{3qa^2}{2R_0^3}\left\{n_x n_y + n_y n_x\right\} = \frac{3qa^2}{2R_0^3}\sin^2\theta\sin 2\phi$$

а) $\varphi\left(r,\theta\right) \simeq \frac{qa^2}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$; б) $\varphi\left(r,\theta\right) \simeq \frac{3qa^2}{2r^3}\sin^2\theta\sin 2\alpha$.

1.3. (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. задача к § 41 ) Определить квадрупольный момент однородно заряженного с плотностью $rho$ эллипсоида относительно его центра. Эллипс имеет полуоси $a, b, c$.

**Решение** Заменяя в формуле для элементов тензора квадрупольного момента суммирование интегрированием по объему эллипсоида, имеем

$$D_{xx} = \rho\int\left(3x^2 - r^2\right)dxdydz = \rho\int\left(2x^2 - y^2 - z^2\right)dxdydz.$$

Остальные диагональные компоненты записываются аналогично. Что касается недиагональных элементов, то можно показать, что они все равны нулю (самостоятельное упражнение). Для вычисления приведенного выше интеграла по объему эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

сделаем замену переменных

$$x = x'a, \quad y = y'b, \quad z = z'c.$$

Тогда интегрирование по новым переменным сведется к интегрированию по шару единичного радиуса

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Очевидно, также, что все интегралы могут быть выражены через 3 интеграла

$$\begin{aligned}
I_x &= \int x^2 dV = abca^2 \int x'^2 dV' = a^3bc \int (r\sin\theta\cos\varphi)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\
I_y &= \int y^2 dV = abcb^2 \int y'^2 dV' = ab^3c \int (r\sin\theta\sin\varphi)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\
I_z &= \int z^2 dV = abcc^2 \int z'^2 dV' = abc^3 \int (r\cos\theta)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
I_x &= a^3bc \int dr r^4 \int d\theta \sin^3\theta \int d\varphi \cos\varphi^2 = a^3bc\frac{1}{5}\frac{4\pi}{3}, \\
I_y &= ab^3c\frac{1}{5}\frac{4\pi}{3}, \\
I_z &= abc^3\frac{1}{5}\frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned}
D_{xx} &= \frac{\rho}{5}abc\frac{4\pi}{3}\left(2a^2 - b^2 - c^2\right), \\
D_{yy} &= \frac{\rho}{5}abc\frac{4\pi}{3}\left(2b^2 - a^2 - c^2\right), \\
D_{zz} &= \frac{\rho}{5}abc\frac{4\pi}{3}\left(2c^2 - a^2 - b^2\right).
\end{aligned}$$

Как и следует из теории $D_{xx} + D_{yy} + Dzz = 0$.