

## 1. Электростатика

### Урок 5

#### Уравнение Пуассона и Лапласа

Уравнение для потенциала с источниками (зарядами) — уравнение Пуассона и уравнение без источников — уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad \Delta\varphi = 0. \quad (1)$$

Уравнение Пуассона в цилиндрической системе координат

$$\Delta\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial\varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

Уравнение Пуассона в сферической системе координат

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = -4\pi\rho.$$

Граничные условия на границе раздела сред 1 — 2 ( $n$  — нормаль из среды 1 в 2).

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma. \quad (2)$$

Решение уравнения Пуассона для точечного заряда

$$\Delta\varphi_{\text{точ}} = -4\pi q\delta(\mathbf{r}), \quad \varphi_{\text{точ}} = \frac{q}{r} + C. \quad (3)$$

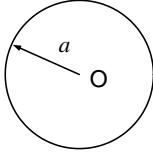
Общее решение уравнения Пуассона для распределенной системы зарядов

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_L \frac{\varkappa(\mathbf{r}') dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4)$$

1.1. (Задача 1.47) Используя уравнение Пуассона, симметрию задачи, конечность и непрерывность потенциала и его производной, найти потенциал:

- а) шара радиуса  $a$ , равномерно заряженного по объему с объемной плотностью  $\rho$ ;
- б) цилиндра радиуса  $a$ , равномерно заряженного по объему с линейной плотностью  $\eta$ ;
- в) слоя толщиной  $2a$ , равномерно заряженного с объемной плотностью  $\rho$ .

**Решение** а) Потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнениям Пуассона  $\Delta\varphi_1 = -4\pi\rho$



при  $R \leq a$  и Лапласа  $\Delta\varphi_2 = 0$  при  $R \geq a$ . В сферической системе координат с учетом симметрии задачи эти уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} \right) &= -4\pi\rho & \text{при} & \quad R \leq a, \\ \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \right) &= 0 & \text{при} & \quad R > a. \end{aligned}$$

Начало системы координат помещено в центр шара. Интегрируя уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{2}{3}\pi\rho R^2 - \frac{A_1}{R} + B_1 & \text{при} & \quad R \leq a, \\ \varphi_2 &= -\frac{3}{3}\pi\rho R^2 - \frac{A_1}{R} + B_1 & \text{при} & \quad R > a, \end{aligned}$$

где  $A_1, B_1, A_2, B_2$  — константы интегрирования. Второе слагаемое в выражении для  $\varphi_1$  содержит член  $\sim 1/R$ . Значит, напряженность электрического поля будет содержать член  $\sim 1/R^2$ , который при  $R \rightarrow 0$  стремится к бесконечности.

Поскольку заряд распределен с конечной объемной плотностью в ограниченной области, то напряженность электрического поля нигде не может быть бесконечной. Для удовлетворения этого условия необходимо, чтобы  $A_1 = 0$ . Выбирая потенциал равным нулю на бесконечности, положим  $B_2 = 0$ . Из уравнения  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  следует условие непрерывности касательных составляющих напряженности электрического поля на поверхности шара:  $E_{1\tau}|_{R=a} = E_{2\tau}|_{R=a}$ . Этому условию можно удовлетворить, если  $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ .

Из уравнения  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$  следует, что

$$E_{1n}|_{R=a} - E_{2n}|_{R=a} = 4\pi\sigma,$$

где  $E_{1n}, E_{2n}$  — нормальные составляющие вектора  $\mathbf{E}$ ;  $\sigma$  — поверхностная плотность зарядов. Поскольку в задаче поверхностная плотность зарядов равна нулю, то нормальная составляющая вектора  $\mathbf{E}$  на поверхности шара непрерывна. Поэтому

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}\pi\rho a^2 + B_1 &= \frac{A_2}{a}, \\ -\frac{4}{3}\pi\rho a &= \frac{A_2}{a}, \end{aligned}$$

откуда

$$A_2 = -\frac{4}{3}\pi\rho a^3, \quad B_1 = 2\pi\rho a^2.$$

Окончательно распределение потенциала выразится так:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{2}{3}\pi\rho(3a^2 - R^2) & \text{при} & \quad R \leq a, \\ \varphi_2 &= -\frac{4\pi a^3 \rho}{3R} & \text{при} & \quad R > a. \end{aligned}$$

б) Уравнения Пуассона и Лапласа в цилиндрической системе координат с осью  $Z$  вдоль оси цилиндра будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) &= -4\pi\rho \quad \text{при} \quad r \leq a, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) &= 0 \quad \text{при} \quad r > a, \end{aligned}$$

поскольку из симметрии задачи потенциал может зависеть только от расстояния до точки наблюдения. Интегрируя эти уравнения, получаем:

$$\varphi_1 = -\pi\rho r^2 + A_1 \ln r + B_1,$$

$$\varphi_2 = A_2 \ln r + B_2.$$

Чтобы потенциал был конечным при  $r = 0$ , нужно положить  $A_1 = 0$ , иначе напряженность электрического поля на оси цилиндра будет бесконечной. Удобно выбрать потенциал равным нулю на оси цилиндра, тогда  $B_1 = 0$ . Из условия непрерывности потенциала и его производной при  $r = a$  находим

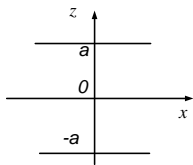
$$A_2 = -2\pi\rho a^2,$$

$$B_2 = 2\pi\rho a^2 \ln a - \pi\rho a^2.$$

Выражая объемную плотность заряда  $\rho$  через заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра  $\rho = \eta/\pi a^2$ , окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\pi\rho r^2 = -\frac{\eta r^2}{a^2} \quad \text{при} \quad r \leq a, \\ \varphi_2 &= 2\eta \ln \frac{a}{r} - \eta \quad \text{при} \quad r \geq a. \end{aligned}$$

в) Декартову систему координат выберем таким образом, чтобы оси  $X$  и  $Y$  лежали в средней плоскости пластины. Потенциал может зависеть только от координаты  $z$ , поскольку все точки плоскости  $z = \text{const}$  равноправны. Уравнения Пуассона и Лапласа для различных областей принимают вид



$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_1(z)}{dz^2} &= 0 \quad \text{при} \quad z \leq -a, \\ \frac{d^2 \varphi_2(z)}{dz^2} &= -4\pi\rho \quad \text{при} \quad -a < z < a, \\ \frac{d^2 \varphi_3(z)}{dz^2} &= 0 \quad \text{при} \quad z > a. \end{aligned}$$

Решения этих уравнений запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_z + B_1, \\ \varphi_2 &= -2\pi\rho z^2 + A_2 z + B_2, \\ \varphi_3 &= A_3 + B_3. \end{aligned}$$

Выберем потенциал так, чтобы он равнялся нулю при  $z = 0$ , тогда  $B_2 = 0$ . Напряженность электрического поля — векторная величина, и, в силу симметрии системы зарядов относительно средней плоскости, напряженность в этой плоскости равна нулю, поскольку направления в сторону положительных и отрицательных  $z$  равноправны. Это означает, что

$$\left. \frac{d\varphi_2}{dz} \right|_{z=0} = 0,$$

откуда  $A_2 = 0$ . Далее, так же как в приведенных выше задачах, воспользуемся непрерывностью потенциала и его производной при  $z = \pm a$ . Это дает:

$$\begin{aligned} A_1 &= 4\pi\rho a, & B_1 &= 2\pi\rho a^2, \\ A_3 &= -4\pi\rho a, & B_3 &= 2\pi\rho a^2. \end{aligned}$$

Подставляя константы интегрирования в решение, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2\pi\rho a^2 \left(1 + \frac{2z}{a}\right) & \text{при} & \quad z \leq -a, \\ \varphi_2 &= 2\pi\rho z^2 & \text{при} & \quad -a \leq z \leq a, \\ \varphi_3 &= 2\pi\rho a^2 \left(1 - \frac{2z}{a}\right) & \text{при} & \quad z \geq a, \end{aligned}$$

что можно записать короче следующим образом:

$$\varphi(z) = \begin{cases} -2\pi\rho z^2 & \text{при } -a \leq z \leq a, \\ 2\pi\rho a^2 \left(1 - \frac{2|z|}{a}\right) & \text{при } |z| \geq a. \end{cases}$$

1.2. (задача 1.48) Найти поле между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов  $r_1$  и  $r_2$ , разность потенциалов между которыми равна  $U$ .

**Решение**

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0$$

$$r \frac{\partial \psi}{\partial r} = A$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{A}{r}$$

$$\psi = A \ln r + B$$

$$\psi_2 - \psi_1 = A \ln r_2 - A \ln r_1 = U$$

$$A = \frac{U}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\psi = \frac{U}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r + B$$

$$E_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{U}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{U}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{\mathbf{r}}{r^2}.$$