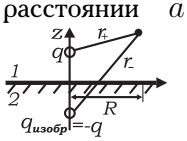
# 1. Электростатика

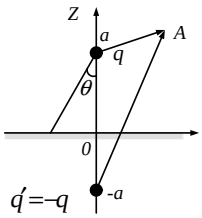
## Урок 8

### Метод изображений. Плоскость

1.1. (Задача 2.22) Точечный заряд $q$ находится в вакууме на расстоянии $a$ от плоской границы бесконечно протяженного проводника. Найти потенциал, напряженность электрического поля, распределение $\sigma$ и полный индуцированный на металле заряд, а также силу, действующую на заряд.




**Решение** В верхнем полупространстве потенциал поля, создаваемого зарядом $q$ и индуцированными зарядами на проводнике, можно представить как потенциал поля, создаваемого зарядом $q$ и его изображением $q' = -q$ по другую сторону плоскости раздела на таком же расстоянии от нее. Действительно, потенциал поля точечных зарядов $q$ и $q'$ в какой-либо точке $A$ над поверхностью проводника




$$\varphi = q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \qquad \text{при} \qquad z \geq 0\,. \tag{1}$$

Этот потенциал обращается в нуль на поверхности проводника $(r = r')$, а поэтому поверхность проводника будет эквипотенциальной поверхностью в системе зарядов $q$ и $(-q)$. Функция (1) является решением уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi q\delta(\mathbf{r})$ для верхнего полупространства $z \geq 0$, где $\delta(\mathbf{r})$ — дельта функция. Это решение удовлетворяет граничному условию $\varphi(\mathbf{r}) = 0$ при $z = 0$. По теореме единственности оно и есть искомое решение. В нижнем полупространстве, заполненном проводящей средой, поле равно нулю. Поэтому

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} = \tfrac{q\mathbf{r}}{r^3} - \tfrac{q\mathbf{r}'}{r'^3} \quad \text{при} \quad z > 0, \\ &\mathbf{E} = 0 \quad \text{при} \quad z < 0\,. \end{aligned}$$

Индуцированные заряды притягивают заряд $q$ с той же силой, что и фиктивный заряд $q' = -q$, поскольку он создает в верхнем полупространстве такое же поле, что и индуцированные заряды. Эта сила равна

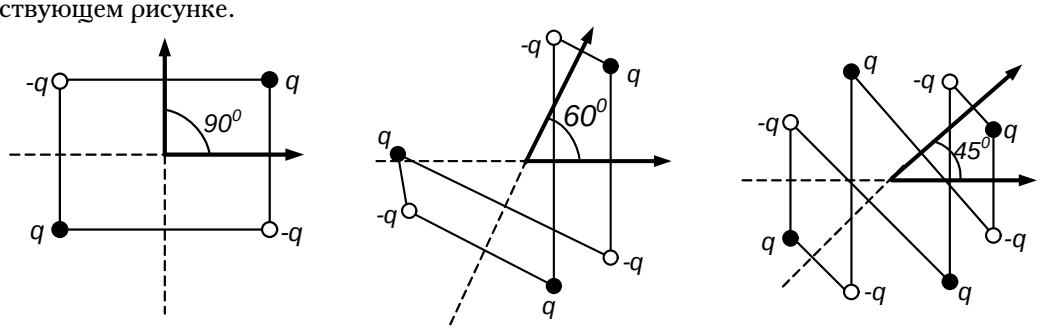
$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4a^2}\,\frac{\mathbf{z}}{z}.$$

Поверхностная плотность индуцированных зарядов найдется по формуле

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}E_z\Big|_{z=0} = -\frac{q}{2\pi a^2}\cos^3\theta\,,$$

где $E_z\Big|_{z=0}$ – нормальная составляющая поля при $z = 0$. Проверьте, что касательная составляющая поля равна нулю при $z = 0$. Полный заряд, индуцированный на поверхности проводника:

$$Q = -\int\limits_0^{\pi/2} \frac{q}{2\pi a^2}\cos^3\theta \cdot 2\pi a^2 \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta = -q\,.$$

1.2. (Задача 2.24) Двугранный угол между двумя заземленными проводящими плоскостями равен $\alpha$. Внутри угла находится точечный заряд $q$. Найти электрическое поле в случаях: а) $\alpha = 90^o$; б) $\alpha = 60^o$; в) $\alpha = 45^o$.

**Решение** Поле внутри двугранного угла создается системой зарядов, изображенных на соответствующем рисунке.