

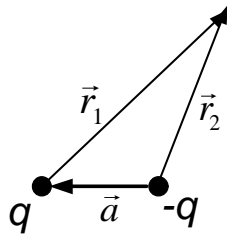
1. Электростатика

Урок 3

Диполь

1.1. (Задача 1.27 из задачника) Найти потенциал и напряженность поля диполя с дипольным моментом \mathbf{p} .

Решение Рассмотрим два одинаковых по величине и разных по знаку заряда, находящихся на расстоянии a друг от друга (см. рис.). Потенциал такой системы в некоторой точке можно записать (по принципу суперпозиции) как



$$\varphi_d = q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = q \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Для вычисления этого выражения предположим, что $r_1 \gg a$, $r_2 \gg a$. Домножим числитель и знаменатель полученного выражения $r_1 + r_2$ и пренебрежем различиями между r_1 и r_2 в знаменателе

$$\frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{2r^3} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r^3}.$$

Используя векторное соотношение, $\mathbf{a} + \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, можно получить

$$\varphi_d = \frac{\mathbf{r} \mathbf{p}}{r^3},$$

где $\mathbf{p} = qa$ и вектор \mathbf{p} , который называется дипольным моментом, направлен от $-q$ к $+q$. Для системы зарядов потенциал электростатического поля вдали от области их размещения

$$\varphi = \frac{Q}{R} + \frac{\mathbf{R} \mathbf{d}}{R^3},$$

где $Q = \sum_i q_i$, $\mathbf{d} = \sum \mathbf{r}_i q_i$, а \mathbf{R} — вектор из начала координат в точку, наблюдения. Начало координат выбрано где-то внутри системы зарядов. Тогда поле в точке \mathbf{R}

$$\mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{\mathbf{R} \mathbf{d}}{R^3} \right) = -\frac{\mathbf{d}}{R^3} + \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{R} \mathbf{d})}{R^5}$$

При выводе этого соотношения использовались правила обращения с оператором ∇

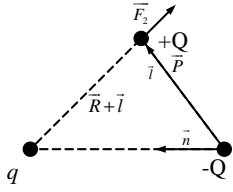
$$\nabla R = \mathbf{R}/R, \quad \nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a.$$

1.2. (Задача 1.28 из задачника) Найти силу и вращательный момент, приложенные к электрическому диполю с моментом \mathbf{P} в поле точечного заряда q .

Решение Сила, действующая на диполь в поле точечного заряда q , является суммой сил, действующих на заряды диполя со стороны заряда q :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = Q(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1), \quad (1)$$

где \mathbf{E}_1 — напряженность электрического поля, создаваемая зарядом q в точке нахождения отрицательного заряда диполя ($-Q$); \mathbf{E}_2 — в точке нахождения положительного заряда диполя. Если расстояние между зарядами диполя мало по сравнению с расстоянием, на котором находится диполь от заряда, то поле \mathbf{E}_2 можно разложить в ряд Тейлора и оставить в нем два первых отличных от нуля члена



$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}(\mathbf{R} + \ell) =$$

$$= \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \ell_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \ell_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + \ell_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} \approx \mathbf{E}_1 + (\ell \nabla) \mathbf{E},$$

где $(\ell \nabla)$ — скалярное произведение вектора ℓ и вектора $\nabla = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Подставим \mathbf{E}_2 в уравнение (1) и учитывая, что $\mathbf{P} = Q\ell$, $\mathbf{E} = \frac{q}{R^3} \mathbf{R}$, находим выражение для силы, действующей на диполь со стороны точечного заряда:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{P} \nabla) \frac{q}{R^3} \mathbf{R} = q \left(P_x \frac{\partial}{\partial x} + P_y \frac{\partial}{\partial y} + P_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\mathbf{R}}{R^3}. \quad (2)$$

Так как

$$P_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = P_x \left(\frac{1}{R^3} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \mathbf{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R^3} \right) \right) = P_x \left(\frac{\mathbf{i}}{R^3} - \frac{3\mathbf{R}}{R^5} x \right),$$

то аналогично

$$P_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = P_y \left(\frac{\mathbf{j}}{R^3} - \frac{3\mathbf{R}}{R^5} y \right), \quad P_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = P_z \left(\frac{\mathbf{k}}{R^3} - \frac{3\mathbf{R}}{R^5} z \right),$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы в направлениях соответственно X, Y, Z . Подставляя вычисленные соотношения в уравнение (2), получаем

$$\mathbf{F} = q \left(\frac{\mathbf{P}}{R^3} - \frac{3(\mathbf{P} \mathbf{R}) \mathbf{R}}{R^5} \right). \quad (3)$$

Сила, действующая на диполь в поле точечного заряда, равна по абсолютной величине и противоположна по направлению силе, действующей на заряд в поле диполя. Поэтому из формулы (3) следует, что поле, создаваемое диполем в точке, определяемой радиус-вектором \mathbf{R} на больших расстояниях, будет иметь вид

$$\mathbf{E}_{\text{дип}} = -\frac{\mathbf{P}}{R^3} + \frac{3(\mathbf{P}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5}.$$

Момент сил, действующий на диполь во внешнем поле \mathbf{E} , равен $\mathbf{N} = [\mathbf{P} \times \mathbf{E}]$. Подставляя в эту формулу поле точечного заряда $\mathbf{E} = q\mathbf{R}/R^3$, получаем

$$\mathbf{N} = q \frac{[\mathbf{P} \times \mathbf{R}]}{R^3},$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор, проведенный из точки нахождения точечного заряда q в точку, где находится диполь.

1.3. (Задача 1.31 из задачника) Найти уравнение силовых линий точечного диполя с дипольным моментом \mathbf{d} , помещенного в начале координат. Нарисовать примерный вид силовых линий.

Решение Выберем систему координат так, что диполь располагается вдоль оси z сферической системы координат. Уравнение силовых линий поля \mathbf{E} в произвольной ортогональной системе координат записывается в виде

$$\frac{h_1 dq_1}{E_1} = \frac{h_2 dq_2}{E_2} = \frac{h_3 dq_3}{E_3}$$

Используя коэффициенты Ламе для сферической системы координат $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\phi = r \sin \theta$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$$

$$E_r = -\frac{p}{r^3} \cos \theta + \frac{3p \cos \theta}{r^3} = 2\frac{p}{r^3} \cos \theta$$

$$E_\theta = \frac{p}{r^3} \sin \theta$$

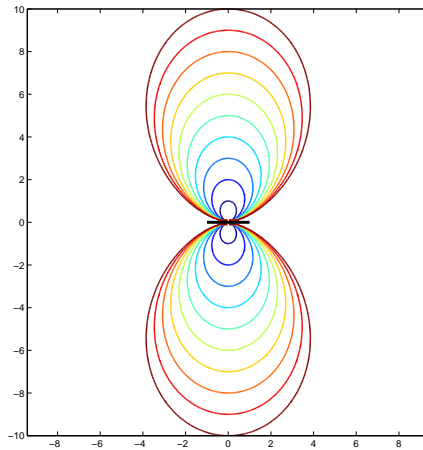
$$\frac{r^3 dr}{2p \cos \theta} = \frac{r^4 d\theta}{p \sin \theta}$$

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{d\theta \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\frac{dr}{r} = C_1 = 2 \frac{d \sin \theta}{\sin \theta} = 2 \ln \sin \theta$$

$$\ln r = C_1 = \ln(\sin^2 \theta)$$

$$\frac{r}{\sin^2 \theta} = \text{const}$$



Силовые линии диполя

1.4. а) Показать, что дипольный момент \mathbf{P} электрически нейтральной системы зарядов $\sum_i q_i = 0$ не меняется при смещении начала координат.

б) При каком выборе вектора смещения \mathbf{d} дипольный момент $\mathbf{P}' = 0$, если $\sum_i q_i \neq 0$?

Решение а) Пусть в некоторой системе координат радиус-вектор положения i -го заряда q_i есть \mathbf{R}_i , тогда дипольный момент системы зарядов в этой системе координат $\mathbf{P} = \sum_i q_i \mathbf{R}_i$. Сдвинем начало координат на некоторый вектор \mathbf{d} , тогда положение каждого заряда в новой системе будет $\mathbf{R}'_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{d}$ и

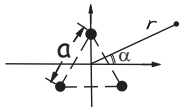
$$\mathbf{P}' = \sum_i q_i \mathbf{R}'_i = \sum_i q_i (\mathbf{R}_i - \mathbf{d}) = \sum_i q_i \mathbf{R}_i - \mathbf{d} \sum_i q_i = \mathbf{P},$$

так как $\sum_i q_i = 0$.

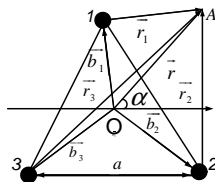
б) $\mathbf{P}' = 0$, если

$$\mathbf{d} = \frac{\sum_i q_i \mathbf{R}_i}{\sum_i q_i}.$$

1.5. (Задача 1.37 из задачника) Три бесконечных заряженных нити (линейная плотность заряда \varkappa) расположены на расстоянии a друг от друга. Найти два первых (отличных от нуля!) члена разложения потенциала на больших расстояниях.



Решение Напряженность электрического поля от бесконечной заряженной с плотностью \varkappa нити $\mathbf{E} = (2\varkappa/R^2)\mathbf{R}$, где \mathbf{R} — радиус-вектор, расположенный в плоскости, перпендикулярной нити, и проведенный от нити в точку наблюдения. Тогда потенциал от одной нити равен $-2\varkappa \ln R + \text{const}$. Потенциал от трех нитей в обозначениях рисунка



$$\varphi = -2\varkappa \ln r_1 - 2\varkappa \ln r_2 - 2\varkappa \ln r_3.$$

Константа выбрана равной нулю. Так как $r_1 = r - b_1$, то

$$r_1 = (r^2 + b^2 - 2rb \sin \alpha)^{1/2}.$$

Аналогично

$$r_2 = (r^2 + b^2 - 2rb \cos(\alpha + 30^\circ))^{1/2},$$

$$r_3 = (r^2 + b^2 + 2rb \cos(\alpha - 30^\circ))^{1/2},$$

где $b = |\mathbf{b}_1| = |\mathbf{b}_2| = |\mathbf{b}_3|$. Далее

$$\ln r_1 = \ln r + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2b}{r} \sin \alpha + \frac{b^2}{r^2} \right).$$

Разлагая второе слагаемое в ряд Тейлора по степеням b/r , получаем

$$\ln r_1 \simeq \ln r - \sin \alpha \frac{b}{r} + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \frac{b^2}{r^2} + \frac{1}{3!} (12 \sin \alpha - 16 \sin^3 \alpha) \frac{b^3}{r^3}.$$

Сделав аналогичные вычисления для $\ln r_2$ и $\ln r_3$ и сложив, окончательно найдем, что

$$\varphi = -6\varkappa \ln r - 2 \frac{b^3}{r^3} \varkappa \sin^3 \alpha \quad \text{при } b \ll r,$$

где $b = a/\sqrt{3}$.