2. Когерентность, интерференция, дифракция

Урок 10

Интерференция. Схема Юнга и Ллойда

Интерференция — это взаимодействие 2-х и более волн, когда они взаимодействуют друг с другом. Суммарная амплитуда двух волн

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \ \ \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2.$$

Плотность энергии

$$w = w_1 + w_2 + w_{12}; \ \ \mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_{12},$$

где

$$w_i = \frac{\varepsilon \left|E_i\right|^2 + \mu \left|H_i\right|^2}{8\pi}, \ \mathbf{S}_i = \frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i\right].$$

Интерференционные члены имеют вид

$$w_{12} = \frac{1}{4\pi}\left[\varepsilon\left(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\right) + \mu\left(\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\right)\right], \ \mathbf{S}_{12} = \frac{c}{4\pi}\left(\left[\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2\right] + \left[\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1\right]\right).$$

При использовании комплексных амплитуд

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|e^{i\varphi}, \ \mathbf{b} = |\mathbf{b}|e^{i(\varphi+\theta)}, \ a^*{\cdot}b = |a|{\cdot}|b|\cos\theta + i|a|{\cdot}|b|\sin\theta = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + i\left[\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right],$$

откуда

$$w_{12} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\mathrm{Re}(E_1E_2^*), \ S_{12} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathrm{Im}(E_1E_2^*).$$

При наблюдении интенсивности всегда осуществляется усреднение по некоторому времени τ_0

$$I(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\tau_0}\int\limits_t^{t+\tau_0} S(\mathbf{r},t')dt' \equiv \overline{S}.$$

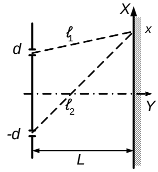
Перекрестный член в выражении для интенсивности интерферирующих 2-х плоских монохроматических волн одинаковой частоты

$$\begin{aligned} I_{12} = &S_{12} = \frac{c}{2\pi}\mathrm{Re}\left[E_0E_1e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\varphi_0)-i(\mathbf{kr}-\omega t+\varphi_1)}\right] = \\ &= \frac{c}{2\pi}E_0E_1\mathrm{Re}\left(e^{i(\varphi_0-\varphi_1)}\right) = \frac{c}{2\pi}E_0E_1\cos(\Delta\varphi). \end{aligned}$$

Полная интенсивность равна

$$I_\Sigma = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1I_2}\cos(\Delta\varphi).$$

2.1. (Задача 3.1.) Два узких щелевых монохроматических источника света (длина волны λ)



расположены на расстоянии L от экрана и на расстоянии $2d$ друг от друга.Найти расстояние между полосами на экране.

Решение

Предполагая $2d \ll L$ получим для интенсивности в точке x

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi(x).$$

Разность фаз определяется из геометрических соображений

$$\varphi(x) = k(\ell_2 - \ell_1).$$

Из прямоугольных треугольников получаем

$$\ell_1^2 = L^2 + (x+d)^2, \;\; \ell_2^2 = L^2 + (x-d)^2.$$

Тогда

$$\ell_2^2 - \ell_1^2 = 4xd, \;\; \ell_2 - \ell_1 = \frac{4xd}{\ell_1 + \ell_2} \approx \frac{2xd}{L} = x \cdot \alpha$$

где α — угол, под которым видна область $2d$ между щелями из центра экрана ($x = 0$). Разность фаз

$$\phi(x) = \frac{2kxd}{L},$$

и интенсивность в точке x

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\phi(x).$$

Учитывая, что

$$I_1 = I_2 = I_0$$

получим

$$I(x) = 2I_0(1 + \cos\phi(x)) = 4I_0\cos^2\frac{kxd}{L}.$$

Расстояние между полосами (расстояние между максимумами $\cos^2$) определяется соотношением

$$\frac{k\Delta xd}{L} = \pi, \;\; \Delta x = \lambda L/(2d).$$

2.2. (Задача 3.3.) Определить показатель преломления стекла, если интерференционные полосы в схеме Юнга смещаются на величину Δx при помещении стеклянной пластинки толщиной h перед одной из щелей установки, расстояние между щелями d.

Решение Если расстояние между щелями d и во второе (для примера) плечо поместили стеклянную пластину, то оптическая разность путей

$$(\ell_2 - \ell_1)_{\text{опт}} = \frac{xd}{L} + h\,(n-1)\,,$$

а разность фаз

$$\varphi_1\,(x) = k\left\{\frac{xd}{L} + h\,(n-1)\right\}.$$

Условия максимумов на экране без пластины

$$\frac{kx_m d}{L} = m\pi,$$

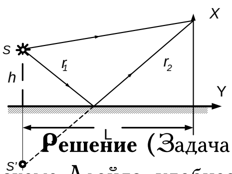
а эти же максимумы при помещении пластины будут расположены в точках

$$\frac{kx'_m d}{L} + kh\,(n-1) = m\pi.$$

Тогда, если определить $\Delta x = x_m - x'_m$, получим

$$\frac{kd}{L}\Delta x = kh\,(n-1) \Rightarrow \frac{\Delta x \cdot d}{Lh} + 1 = n.$$

2.3. В схеме зеркала Ллойда найти распределение интенсивности на экране. Источник света — узкий, щелевой, монохроматический.



Решение (Задача 3.4.) Вместо того, чтобы в лоб рссчитывать разность хода в схеме Ллойда, удобнее изобразить мнимый источник в зеркале (изображение источника S) станет очевидно, что разность хода в схеме Ллойда такая же, как и в схеме Юнга, за исключением того, что надо добавить изменение фазы отраженного луча на π в связи с отражением от более плотной среды. Тогда

$$\varphi\,(x) = \frac{2kxh}{L} + \pi.$$

Используя решение задачи 3.1 и используя соотношение

$$\cos^2\left(\frac{kxh}{L} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\frac{kxh}{L},$$

получим для распределения интенсивности на экране

$$I(x) = 4I_0 \sin^2\frac{kxh}{L},$$

где I_0 — интенсивность источника.

2.4. (Задача 3.6.) В схеме зеркала Ллойда (см. задачу 3.4) используется немонохроматический источник (диапазон длин волн $\lambda \div \lambda + \Delta\lambda$). Оценить, при каком значении x интерференционная картина на экране пропадет. Получить отсюда выражение для продольной (временной) длины когерентности.

Решение Задачу можно решать как оценку, а можно попытаться получить «точное» решение.

а) Оценка

Если мы имеем немонохроматический источник, то имеется разброс частот

$$\Delta\omega = \frac{2\pi c\Delta\lambda}{\lambda^2}.$$

Из соотношения неопределенности следует, что при таком разбросе частот имеется цуг волн длиной $c\Delta t = c2\pi/\Delta\omega = \lambda^2/\Delta\lambda$.[3] Интерференция будет иметь место, т.е. полосы будут различимы, если разность хода лучей (отраженного и основного, см. решение задачи 3.4) будет меньше длины цуга волн. Тогда получаем условие

$$\frac{2xh}{L} + \lambda/2 \lesssim \lambda^2/\Delta\lambda.$$

Пренебрегая величиной $\lambda/2$ по сравнению с $\lambda^2/\Delta\lambda$ получим, что интерференция будет видна до величины

$$x \lesssim \lambda^2/\Delta\lambda\frac{L}{2h}.$$

б)«Точное» решение

Для примера рассмотрим точечный источник в схеме Ллойда, причем мощность излучения распределена равномерно во всем диапазоне от $k - \Delta k/2$ до $k + \Delta k/2$. Тогда интенсивность излучения в этом диапазоне можно записать в виде

$$dI(k,x) = \frac{dI_1}{dk}dk + \frac{dI_2}{dk}dk + \frac{dI_{12}}{dk}dk.$$

Пусть 1-й и 2-й источники (основной и отраженный) имеют равные интенсивности, тогда

$$\frac{dI_1}{dk}dk = \frac{dI_2}{dk}dk = \frac{I_0}{\Delta k}dk.$$

Интерференционный член имеет вид

$$\frac{dI_{12}}{dk} = 2\sqrt{\frac{dI_1}{dk}\frac{dI_2}{dk}}\cos\varphi(x) = 2\frac{I_0}{\Delta k}\cos\left[\frac{2khx}{L} + \pi\right],$$

[3] Если в этой формуле принять $\Delta\omega\Delta t \lesssim \pi$, то и в ответе результат будет отличаться в 2 раза.

$$I_{12} = -2\frac{I_0}{\Delta k}\int\limits_{k-\Delta k/2}^{k+\Delta k/2} \cos\left[\frac{2khx}{L}\right] dk = -4\frac{I_0}{\Delta k}\frac{L}{2hx}\cos\left[k\frac{2hx}{L}\right]\sin\left[\Delta k\frac{hx}{L}\right].$$

Полную интенсивность можно записать в виде

$$I(x) = 2I_0\left[1 - \cos\left(k\frac{2hx}{L}\right)\frac{\sin\eta}{\eta}\right],$$

где $\eta = \Delta k\frac{hx}{L}$. Уже из этой формулы видно, что интерференционные полосы будут видны для x, удовлетворяющего условиям

$$|\eta| \lesssim \pi, \; |x| \lesssim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}\frac{L}{2h},$$

или, используя определение числа полос m, умещающееся на расстоянии x, получим соотношение

$$m \lesssim \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Можно здесь же ввести понятие видности

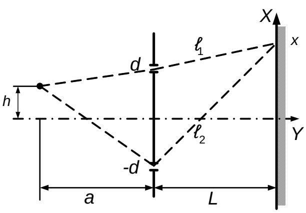
$$V(x) = \left|\frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{max}}\right| = \left|\frac{\sin\eta}{\eta}\right|.$$

Продольной длиной когерентности называется величина

$$\ell_{\|} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}.$$

2.5. (Задача 3.7.) Схема Юнга (см. задачу 3.2) освещается двумя узкими щелевыми монохроматическими источниками (длина волны — λ), расположенными на прямой, параллельной экрану со щелями на расстоянии a от него. При каком расстоянии $2h$ между источниками интерференционная картина на экране пропадет? Оценить отсюда выражение для поперечной длины когерентности.

Решение Прежде чем приступить к решению задачи, выведем формулу, которая будет полезна в дальнейшем и для решения других задач. Определим разность хода между двумя лучами, исходящими из точки, не находящейся на оси, а отстоящей от оси на величину h (см. рис.). Эта разность хода (в тех же приближениях, что и использовались ранее, т.е. $x, h \ll a, L$ определяется выражением



$$\phi_1(x) = \frac{2kxd}{L} + \frac{2kdh}{a} \qquad (1)$$

Очевидно, что разность фаз от второго источника, находящегося в точке $-h$,

$$\phi_2(x) = \frac{2kxd}{L} - \frac{2kdh}{a}$$

1. Когерентные источники

$$I_{\text{сумм}} = 2I\left[1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)\right] = 2I\left(1 + \cos\frac{4kdh}{a}\right),$$

интерференционных полос нет никогда.

2. Некогерентные источники. В этом случае необходимо складывать интенсивности, точнее интерференционные картины, которые создает каждый из источников отдельно.

$$I_{\text{сумм}} = 2I + 2I\cos\phi_1 + 2I + 2I\cos\phi_2 = 4I + 2I(\cos\phi_1 + \cos\phi_2),$$

или, подставляя выражения для фаз, получим

$$I_{\text{сумм}} = 4I\left(1 + \cos\frac{2kxd}{L}\cos\frac{2kdh}{a}\right).$$

Полосы исчезают при

$$\frac{2kdh}{a} = \frac{\pi}{2}.$$