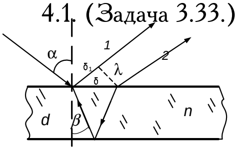
4. Когерентность, интерференция, дифракция

Урок 12

Линии равного наклона и толщины

4.1. (Задача 3.33.) Под углом α на стеклянную пластинку толщиной d с показателем преломления n падает плоская волна (длина волны λ). Найти условия образования интерференционных максимумов и минимумов отраженного света.



Решение Разность оптических путей между двумя лучами 1 и 2 перед их приходом на линзу (с учетом сдвига на $\lambda/2$ оптического пути волны 1 при отражении от более плотной среды) будет равна

$$\Delta = 2\frac{d}{\cos\beta}n - (\delta_1 - 0.5\lambda)\,,$$

где

$$\delta = 2d\,\mathrm{tg}\,\beta;\quad \delta_1 = \delta\sin\alpha = 2d\,\mathrm{tg}\,\beta\sin\alpha.$$

Учитывая закон Снелиуса $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$, получим

$$\Delta = 2\frac{dn}{\cos\beta} - 2d\mathrm{tg}\beta\sin\alpha - 0.5\lambda = \frac{2dn}{\cos\beta}\left(1-\sin^2\beta\right) = 2dn\cos\beta + 0.5\lambda.$$

Условие максимума (разность хода равна целому числу длин волн)

$$\Delta = 2dn\cos\beta + 0.5\lambda = m\lambda,$$

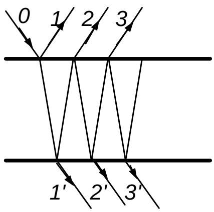
или

$$2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} = \lambda\,(m-0.5)\,.$$

где $m = 1, 2, ...$

4.2. (Задача 3.34.) Принимая интенсивность падающего пучка за единицу, найти интенсивность проходящего и отраженного пучков при многократной интерференции на плоскопараллельной пластинке (поглощение света отсутствует).

Решение Падает луч света интенсивностью I_0 и отражается от границы с коэффициентом отражения (энергетическим) R. Тогда интенсивности прошедших лучей выразятся в виде



$$\begin{aligned} I_{1'} &= (1-R)^2\,I_0,\\ I_{2'} &= R^2\,(1-R)^2\,I_0,\\ I_{3'} &= R^4\,(1-R)^2\,I_0... \end{aligned}$$

А соответствующие амплитуды

$$\begin{aligned} a_{1'} &= (1-R)\,a_0, \\ a_{2'} &= R\,(1-R)\,a_0, \\ a_{3'} &= R^2\,(1-R)\,a_0 ... \end{aligned}$$

Разность хода между двумя соседними пучками $\Delta = 2dn\cos\psi$, а разность фаз $\varphi = k\cdot\Delta = \frac{4\pi}{\lambda}dn\cos\psi$. Амплитуда прошедшей волны есть сумма

$$a_{\text{прош}} = a_0\,(1-R)\left[1 + \mathrm{Re}^{-i\varphi} + R^2e^{-2i\varphi} + ...\right],$$

которая есть сумма членов геометрической прогрессии с модулем меньше 1. Считая прогрессию бесконечной

$$a_{\text{прош}} = \frac{1-R}{1-\mathrm{Re}^{-i\varphi}}a_0.$$

Тогда суммарная прошедшая интенсивность $I_{\text{прош}}$ пропорциональна квадрату модуля амплитуды

$$\begin{aligned} I_{\text{прош}} &= \frac{(1-R)^2}{\left|1-\mathrm{Re}^{-i\varphi}\right|^2}a_0^2 = a_0^2\frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos\varphi} = \\ &= \frac{a_0^2\,(1-R)^2}{1-2R+R^2+2R\,(1-\cos\varphi)} = \frac{a_0^2\,(1-R)^2}{(1-R)^2+4R\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

При выводе использовалось тригонометрическое равенство

$$1-\cos\varphi = \sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} - \left(-\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2}\right) = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Максимум прошедшей интенсивности достигается при равенстве нулю члена с $\sin\varphi$ в знаменателе. т.е. при

$$\frac{\varphi}{2} = m\pi.$$

Рассчитаем коэффициент отражения. Интенсивности в отраженных лучах

$$I_1 = RI_0, I_2 = R\,(1-R)^2\,I_0, I_3 = R^3\cdot R\,(1-R)^2\,I_0\ldots,$$

а амплитуды, соответственно,

$$a_1 = \sqrt{R}a_0, a_2 = -\sqrt{R}\,(1-R)^2\,a_0, a_3 = -\sqrt{R}\cdot R\,(1-R)\,a_0.$$

Учитывая сдвиги фаз при сложении, получим

$$
\begin{aligned}
a_{\text{отр}} &= \sqrt{R}\cdot a_0 - \sqrt{R}\,(1-R)\,a_0 e^{-i\varphi}\left[1 + R\cdot e^{-i\varphi} + R^2 e^{-2i\varphi} + \ldots\right] = \\
&= \sqrt{R}\cdot a_0\left[1 - \tfrac{(1-R)e^{-i\varphi}}{1-R\cdot e^{-i\phi}}\right] = \sqrt{R}\cdot a_0\tfrac{1-R\cdot e^{-i\varphi}-e^{-i\varphi}+R\cdot e^{-i\varphi}}{1-R\cdot e^{-i\varphi}} = \\
&= \sqrt{R}\cdot a_0\tfrac{1-e^{-i\varphi}}{1-R\cdot e^{-i\varphi}}.
\end{aligned}
$$

Минус перед вторым членом в сумме связан с изменением фазы волны при отражении от более плотного материала.

$$
I_{\text{отр}} = \left|a_{\text{отр}}\right|^2,
$$

$$
I_{\text{отр}} = \frac{Ra_0^2 4\sin^2\frac{\varphi}{2}}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\varphi}{2}},
$$

$$
I_{\text{прош}} = \frac{a_0^2\,(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\varphi}{2}}.
$$

Максиму прохождения

$$
\frac{\varphi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}dn\cos\psi = m\pi,\quad \frac{2dn}{\lambda}\cos\psi = m,
$$

таким образом видно, что максимум прохождения волны и минимум отражения определяются тем же условием, что и при учете однократного отражения.

1) Рассмотрим случай $R \ll 1$

$$
I_{\text{прош}} = 1 - 4R\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 - 2R\,(1-\cos\varphi),
$$

$$
I_{\text{отраж}} = 4R\sin^2\frac{\varphi}{2} = 2R\,(1-\cos\varphi).
$$

Но это тоже самое, что и при учете 1 луча.

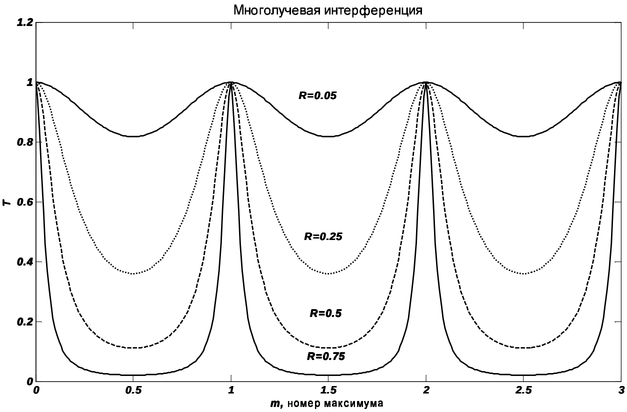
2) Рассмотрим случай $1-R \ll 1$. Разкость полос характеризуется их полушириной. Полуширина - расстояние между точками по обе стороны максимума, в которых интенсивность составляет половину максимальной величины. В окрестности максимума m-го порядка

$$
\varphi = m\pi + \phi
$$

$$
\left(I_{\max} = I_0 = a_0^2\right)
$$

$$
\sin^2\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\phi^2}{4}
$$

$$
I_{\text{прошед}} = \frac{I_{\max}}{1 + \frac{R\phi^2}{(1-R)^2}}
$$



Если

$$\frac{R\phi^2}{(1-R)^2} = 1,$$

то

$$I_{\text{прошед}} = \frac{I_{\max}}{2}.$$

Полуширина

$$\delta\varphi = 2\phi = 2\frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

Многолучевая спектроскопия обычно используется для исследования структуры тонких спектральных линий. Рассмотрим разрешающую способность, т.е. наименьшее расстояние между близкими спектральными линиями, которые можно увидеть как раздельные линии (по длине волны). Пусть эти 2 линии имеют длину волны λ и $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ соответственно. Если сдвиг полос (максимумов) мал, то линии не разрешить. Допустим, что сдвиг равен полуширине. В точке 0

$$\frac{1}{2}I_{\max} + \frac{1}{2}I_{\max} = I_{\max}$$

В точке A значение $\phi = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$, $\frac{R\phi^2}{(1-R)^2} = 4$, поэтому

$$I_{\max} = \frac{1}{5}I_{\max}.$$

а значит $I_{\max} + 0.2I_{\max} = 1.2I_{\max}$ - видно 2 линии.

Условие спектральной разрешимости - расстояние между максимумами должно отстоять на расстоянии более полуширины. Определим теперь $\delta\lambda = \lambda - \lambda'$ (n — показатель преломления считаем не зависящим от λ - для Фабри-Перро — в зазоре воздух). В точке A (максимум для длины волны λ') $\phi' = 2m\pi$, а для λ

$$\phi = 2m\pi + \frac{(1-R)}{\sqrt{R}}.$$

Тогда

$$\phi' - \phi = \delta\phi = \frac{(1-R)}{\sqrt{R}}$$

$$\phi = \frac{4\pi dn\cos\beta}{\lambda}.$$

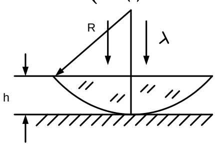
$$\frac{\delta\varphi}{\varphi} = \left|\frac{\delta\lambda}{\lambda}\right|$$

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{2\pi\sqrt{R}}{(1-R)}m = m.$$

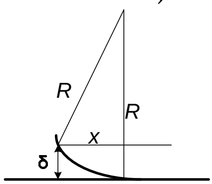
При $R = 0,95$

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = m122,5.$$

4.3. (Задача 3.37.) Найти радиусы интерференционных колец (колец Ньютона) в проходящем (а) и отраженном (б) свете на воздушном клине между зеркалом и плоско-выпуклой линзой (ее радиус $R \gg \quad h$ — толщины линзы). Длина волны — λ.



Решение а) Разность хода между лучом прошедшим и лучом дважды отразившимся и прошедшим потом равна $\Delta = 2\delta$, где δ показана на рисунке. Из прямоугольного треугольника получаем



$$(R-\delta)^2 + x^2 = R^2,$$

откуда, пренебрегая δ^2 по сравнению с x^2 и приводя подобные члены, получим

$$\delta = \frac{x^2}{2R},$$

$$\Delta = \frac{x^2}{R}.$$

Условия того, что кольца будут светлыми

$$\Delta = m\lambda.$$

Радиус светлого m-го кольца

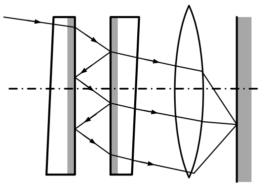
$$X_m = \sqrt{m\lambda R} = \sqrt{\frac{\lambda R}{2}}\sqrt{2m}.$$

Радиус m-го темного кольца

$$X_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda R} = \sqrt{\frac{\lambda R}{2}}\sqrt{2m-1}.$$

б) Картина в проходящем свете будет дополнительной по отношению к картине в отраженном свете потому, что в зазоре происходит нечетное число отражений и фаза сдвигается еще на $\lambda/2$.

4.4. (Задача 3.44.) Эталон Фабри—Перо представляет собой плоскопараллельную пластину, обычно воздушную, образующуюся между двумя плоскими поверхностями



тщательно отшлифованных и отполированных стеклянных или кварцевых пластинок, установленных так, чтобы поверхности, обращенные друг к другу, были строго параллельны. Интерференционные полосы при этом имеют вид концентрических колец. а) Как располагаются полосы различных порядков? б) Как зависит ширина полосы от порядка интерференции, длины волны, толщины эталона h?

Решение а) $m\lambda = 2h\cos\varphi$, где φ — угол между выходящими лучом и нормалью к пластинке, т. е. с ростом m полосы стягиваются к центру; б) $\Delta\varphi = \lambda/\left(2h\sin\varphi\right)$, т. е. ширина полос возрастает при увеличении λ, порядка интерференции и уменьшается с ростом h.