

Урок 7

Резонаторы и волноводы

1.35. (Задача 2.32.) Показать, что в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками не могут распространяться чисто поперечные волны. Найти связь между поперечными компонентами полей и продольной составляющей электрического поля E_z для монохроматической Е-волны (или ТМ-волны), распространяющейся вдоль прямоугольного пустого волновода. Найти уравнение для составляющей поля E_z . То же для Н-волны (или ТЕ-волны).

Решение Волновод представляет собой полость неограниченной длины. Распространение электромагнитных волн в волноводе принципиально отличается от распространения неограниченных в пространстве плоских волн. Пусть длины сторон прямоугольного сечения равны a и b , ось Z направлена вдоль волновода, а среда, заполняющая волновод, характеризуется диэлектрической и магнитной проницаемостями соответственно ε и μ .

Если в начале волновода (при $z = 0$) попытаться возбудить монохроматическую плоскую волну, то естественно допустить, что в волноводе возникает бегущая вдоль Z волна, для которой зависимость E и H от z дается множителем $e^{-ik_z z}$ с постоянным k_z , т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y) e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (1)$$

Волновые уравнения для E и H имеют вид

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}; \quad (2)$$

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad (3)$$

где $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Подставляя соотношения (1) в уравнения (2), (3), получаем

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial y^2} = -\varkappa^2 \mathbf{E}_0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial y^2} = -\varkappa^2 \mathbf{H}_0, \quad (5)$$

где $\varkappa^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k_z^2$. Связь между векторами E и H определяется уравнениями

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6)$$

Записывая эти уравнения по компонентам и подставляя в них решение в виде выражений (1), получаем

$$\frac{i\mu\omega}{c}H_{x0} = -ik_z E_{y0} - \frac{\partial E_{z0}}{\partial y}; \quad (7)$$

$$\frac{i\mu\omega}{c}H_{y0} = ik_z E_{x0} + \frac{\partial E_{z0}}{\partial x}; \quad (8)$$

$$\frac{i\mu\omega}{c}H_{z0} = \frac{\partial E_{x0}}{\partial y} - \frac{\partial E_{y0}}{\partial x}; \quad (9)$$

$$\frac{i\varepsilon\omega}{c}E_{x0} = ik_z H_{y0} + \frac{\partial H_{z0}}{\partial y}; \quad (10)$$

$$\frac{i\varepsilon\omega}{c}E_{y0} = -ik_z H_{x0} - \frac{\partial H_{z0}}{\partial x}; \quad (11)$$

$$\frac{i\varepsilon\omega}{c}E_{z0} = \frac{\partial H_{x0}}{\partial y} - \frac{\partial H_{y0}}{\partial x}. \quad (12)$$

Формулы (7)–(12) позволяют выразить компоненты векторов E_{x0} , E_{y0} , H_{x0} , H_{y0} через E_{z0} и H_{z0} :

$$E_{x0} = -\frac{1}{\varkappa^2} \left(ik_z \frac{\partial E_{z0}}{\partial x} + \frac{i\omega\mu}{c} \frac{\partial H_{z0}}{\partial y} \right); \quad (13)$$

$$E_{y0} = -\frac{1}{\varkappa^2} \left(ik_z \frac{\partial E_{z0}}{\partial y} - \frac{i\omega\mu}{c} \frac{\partial H_{z0}}{\partial x} \right); \quad (14)$$

$$H_{x0} = \frac{1}{\varkappa^2} \left(\frac{i\varepsilon\omega}{c} \frac{\partial E_{z0}}{\partial y} - ik_z \frac{\partial H_{z0}}{\partial z} \right); \quad (15)$$

$$H_{y0} = -\frac{1}{\varkappa^2} \left(\frac{i\varepsilon\omega}{c} \frac{\partial E_{z0}}{\partial x} + ik_z \frac{\partial H_{z0}}{\partial y} \right). \quad (16)$$

Как известно, для плоских волн векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны направлению распространения, т. е. если волна распространяется вдоль оси Z , как в нашем случае, то для такой волны $E_z = 0$ и $H_z = 0$. Из полученных формул (13)–(16) ясно, что E_{z0} и H_{z0} одновременно не могут быть равны нулю, поскольку в этом случае все компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} будут равны нулю, если только $\varkappa \neq 0$. Если $\varkappa = 0$, что означает $\omega^2 = v^2 k_z^2$ и имеет место для плоской монохроматической волны в неограниченной среде, то тогда уравнение (5) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial y^2} = 0.$$

Магнитное поле в этом случае удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа с таким граничным условием, что на сторонах прямоугольника $x = 0, a$; $y = 0, b$ поле направлено вдоль границы. Решением такой краевой задачи, как известно, служит $\mathbf{H} = 0$. Но если отсутствует магнитное поле, то равно нулю и электрическое поле. Таким образом, чисто поперечные электромагнитные волны не могут распространяться в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками. Следует заметить, что этот вывод относится к любым волноводам, выполненным в виде простой трубы любого сечения, поскольку в процессе вывода мы нигде не использовали явный вид формы сечения.

Для E -волны, т.е. для волны, у которой

$$H_z = 0, E_z = E_{z0} \cdot e^{i(\omega t - k_z z)},$$

из уравнений (13)–(16) получаем

$$E_{x0} = -\frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, E_{y0} = -\frac{ik_z}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, H_{x0} = \frac{i\varepsilon\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, H_{y0} = -\frac{i\varepsilon\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Компонента E_{z0} удовлетворяет уравнению

$$\Delta_2 E_{z0} + \kappa^2 E_{z0} = 0,$$

где $\kappa^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - k_z^2$, $v^2 = c^2/(\varepsilon\mu)$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Для H -волны в приведенных выше формулах следует сделать замены $E \leftrightarrow H$ и $\varepsilon \leftrightarrow -\mu$.

1.36. (Задача 2.33.) Показать, что для E -волны (H -волны), распространяющейся вдоль прямоугольного пустого волновода, граничные условия для полей \mathbf{E} и \mathbf{H} выполнены, если на стенках волновода $E_z = 0$ ($\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$).

Решение Если $E_z = 0$ везде на границе, то согласно решению предыдущей задачи, в котором записаны связь между E_{x0} , E_{y0} и E_z , если $E_z = 0$ для стенок, у которых $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ ($x = 0, x = a, y = 0, y = b$), то получается $E_\tau = 0$ и $H_n = 0$. Следовательно, для E -волны условие $E_z|_\Gamma = 0$ эквивалентно условию $E_\tau|_\Gamma = 0$ и $H_n|_\Gamma = 0$. Аналогичный результат получается для H -волны: из условия $\frac{\partial H_z}{\partial n}|_\Gamma = 0$ следует выполнение на границе условий $E_\tau|_\Gamma = 0$ и $H_n|_\Gamma = 0$.

1.37. (Задача 2.34.) Определить E -волны (H -волны), которые могут распространяться вдоль пустого волновода прямоугольного сечения $a \times b$. Найти критическую (наименьшую) частоту этих волн.

Решение Компонента поля $E_z(x, y)$ подчиняется двумерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \kappa^2 E_z = 0$$

и граничному условию

$$E_z|_{\Gamma} = 0.$$

Будем решать это уравнение методом разделения переменных для чего предположим, что $E_z = X(x) \cdot Y(y)$. Подставляя это в волновое уравнение, получим

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + \varkappa^2 XY = 0.$$

разделим обе части уравнения на произведение $X \cdot Y$, получим

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \varkappa^2 = 0.$$

Поскольку сумма функции только от x и функции только от y равна константе во всей области определения, это возможно только тогда, когда каждая из них равна константе. Положим

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -k_x^2, \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -k_y^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} X(x) &= A \sin k_x x + B \cos k_x x, \\ Y(y) &= C \sin k_y y + D \cos k_y y. \end{aligned}$$

Учитывая граничные условия $E_z(x=0, y) = 0$, что эквивалентно условию $X(0) = 0$ и $E_z(x, y=0) = 0$, что эквивалентно $Y(0) = 0$, получим

$$E_z(x, y) = A \sin k_x x \cdot \sin k_y y,$$

где k_x и k_y удовлетворяют условию

$$\varkappa^2 = k_x^2 + k_y^2, \text{ или, другими словами, } \frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

Для удовлетворения условий на границах $x = a$ и $y = b$

$$k_{x, n_x} a = n_x \pi, \quad k_{y, n_y} b = n_y \pi,$$

где

$$n_x = 1, 2, 3, \dots, n_y = 1, 2, 3, \dots$$

Общее решение тогда запишется в виде

$$E_z(x, y) = \sum_{n_x, n_y} A_{n_x, n_y} \sin \frac{n_x \pi}{a} x \sin \frac{n_y \pi}{b} y$$

$$\frac{n_x^2 \pi^2}{a^2} - \frac{n_y^2 \pi^2}{b^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 = 0,$$

$$n_x \neq 0, n_y \neq 0,$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_z^2 + \left(\frac{n_x \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{b}\right)^2.$$

$$\omega_{\min}^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

Для H -волны, поскольку $H \sim \cos \frac{n_x \pi x}{a} \cos \frac{n_y \pi y}{b}$ минимальное значение частоты

$$\omega_{\min} = \frac{c\pi}{a}.$$

1.38. (Задача 2.35.) Найдите распределение тока в стенках пустого волновода прямоугольного сечения $a \times b$, в котором распространяется E_{11} -волна (H_{10} -волна).

Решение Для H_{10} -волны: в боковых стенках $\eta_x = \eta_z = 0$ и $\eta_y = \pm H_z|_{x=0, a}$; на «крыше» и «дне» — $\eta_y = 0$, $\eta_x = \pm \frac{cH_z(x)}{4\pi}|_{y=0, b}$, $\eta_z = \mp \frac{c}{4\pi} H_x(x)|_{y=0, b}$, где H_x, H_z — компоненты поля в волноводе.

Для E_{11} -волны: в боковых стенках $\eta_x = \eta_y = 0$ и $\eta_z = \pm \frac{c}{4\pi} H_y(y)|_{x=0, a}$; на «крыше» и «дне» $\eta_x = \eta_y = 0$, и $\eta_z = \mp \frac{c}{4\pi} H_x(x)|_{y=0, b}$, где H_x, H_y — компоненты поля в волноводе, η — поверхностная плотность тока.

1.39. (Задача 2.36.) На какой волне должен работать излучатель, чтобы возбудить один тип волны в прямоугольном волноводе с $a = 5$ см, $b = 3$ см?

Решение Для решения этой задачи необходимо определить какая из минимальных частот (для E -волны или для H -волны) меньше и длина волны излучения должна соответствовать зазору между наименьшей $\omega_{\min 1}$ и следующей за ней частотой $\omega_{\min 2}$, т.е.

$$\omega_{\min 1} < \omega < \omega_{\min 2}.$$

Дисперсионное уравнение для прямоугольного волновода имеет вид

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{n_x \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{b}\right)^2.$$

Отсюда следует, что для E -волны минимальное значение частоты

$$\omega_{Emin} = \sqrt{\left(\frac{\pi c}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi c}{b}\right)^2},$$

а минимальное значение частоты для H -волны

$$\omega_{Hmin} = \sqrt{\left(\frac{\pi c}{a}\right)^2} = \frac{\pi c}{a}.$$

Таким образом ясно, что минимальная допустимая частота излучателя должна быть больше $\omega > \omega_{Hmin} = \omega_{H_{10}}$, но при этом возникает вопрос, каково ограничение сверху. Для решения этого вопроса надо сравнить 2-ые частоты для E -волны и H -волны. Очевидно, что для $a > b$ частота $\omega_{H_{01}} < \omega_{E_{11}} < \omega_{H_{20}}$ и, следовательно,

$$\omega_{min} < \omega < \omega_{H_{01}},$$

$$\omega_{H_{01}} = \frac{c\pi}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1.67\omega_{min}$$

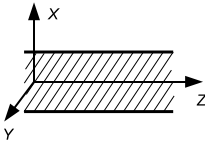
$$\omega_{min} = \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 3,14}{5} = 2 \cdot 10^{10} \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

В волноводе возбуждается только H_{10} -волна, когда

$$\omega_{min} \leq \omega \leq 1,67\omega_{min}, \quad \omega_{min} = 1,9 \cdot 10^{10} \text{ рад/сек.}$$

1.40. (Задача 2.38.) Показать, что бесконечно протяженный диэлектрический слой с проницаемостями ε и μ , заполняющий в вакууме область $-a \leq x \leq a$, действует как волновод. Определить типы волн, которые могут распространяться в таком волноводе (ограничиться случаем, когда векторы поля не зависят от координаты y).

Решение Волны в системе, показанной на рисунке, удовлетворяют волновому уравнению



$$\Delta \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t) - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Будем рассматривать гармонические волны с частотой ω , распространяющиеся вдоль оси z , т.е. искать решения в виде $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} \cdot e^{i(\omega t - k_z z)}$ и $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H} \cdot e^{i(\omega t - k_z z)}$. Тогда для E -волны Волны электрического типа:

а) Четные решения

$$(E_x(x) = E_x(-x) = H_y(-x), E_z(x) = -E_z(-x)) :$$

для $|x| > a$ $E_z = A \operatorname{sign} x \cdot \exp(-s|x|)$, $E_x = A \frac{ik}{s} \exp(-s|x|)$, $H_y = A \frac{i\omega}{cs} \exp(-s|x|)$; для $|x| \leq a$ $E_z = B \sin x \cdot \exp(\kappa x)$, $E_x = B \frac{ik}{\kappa} \cos(\kappa x)$, $H_y = B \frac{i\omega\epsilon}{c\kappa} \cos(\kappa x)$, где $A = B e^{sa} \sin(\kappa a)$, κ, s определяется из уравнений: $(\kappa a)^2 + (sa)^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2} (\epsilon\mu - 1)$ (1), $sa = \frac{1}{\epsilon} \kappa a \operatorname{tg}(\kappa a)$ (2).

б) Нечетные решения

$$(E_x(x) = -E_x(-x), H_y(x) = -H_y(-x), E_z(x) = E_z(-x)) :$$

для $|x| > a$ $E_z = A \exp(-s|x|)$, $E_x = \frac{ik}{s} \operatorname{sign} x \cdot \exp(-s|x|)$, $H_y = A \frac{i\omega}{cs} \operatorname{sign} x \cdot \exp(-s|x|)$; для $|x| \leq a$ $E_z = B \cos(\kappa x)$, $E_x = -B \frac{ik}{\kappa} \sin(\kappa x)$, $H_y = -B \frac{i\omega\epsilon}{c\kappa} \kappa \sin(\kappa x)$, где $A = B e^{sa} \cos(\kappa a)$, κ, s определяются из уравнений (1) и $sa = -\frac{1}{\epsilon} \kappa a \cdot \operatorname{ctg}(\kappa a)$ (3). Волны магнитного типа рассматриваются аналогично. Волноводные свойства слоя следуют из того, что поле бегущей волны, как видно из результата, концентрируется в основном внутри слоя.

1.41. (Задача 2.39.) На вход в волновод подается сигнал $E(t) \cos(\omega_* t)$, где частотный спектр функции $E(t)$ — в пределах $(0, \omega_0)$, а ω_* — критическая частота волновода. Найти границы спектра на выходе волновода.

Решение Рассмотрим гармонику с максимальной частотой

$$\cos(\omega_* t) \cdot \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2} [\sin(\omega_* + \omega_0)t + \sin(\omega_* - \omega_0)t].$$

Отсюда следует, что спектр сигнала на выходе $\omega_* \leq \omega \leq \omega_* + \omega_0$.