Урок 9

Контрольная работа по электродинамике 2

1.46. 1. По бесконечно длинному идеальному пустому волноводу, сечение которого — квадрат со стороной a, вдоль оси z бегут одновременно две ТЕ-волны одинаковой частоты $\omega = 2\pi c/a$. В момент времени $t = 0$ распределение продольной компоненты магнитного поля в плоскости $z = 0$ имеет вид:

$$H_z(x, y)|_{z=0} = H_{z0} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2a}y\right)$$

Найти распределение $H_z(x,y,z)$ в тот же нулевой момент времени. (5 б)

Решение Общее решение для ТЕ-волны в идеальном волноводе имеет вид

$$H_z = A\,(x, y)\, e^{i(\omega t - k_z z)},$$

где

$$A\,(x, y) = \sum_{n,m} A_{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right). \tag{1}$$

Заданную функцию распределения компоненты H_z на входе в волновод можно представить в виде

$$\sin^2\left(\frac{\pi y}{2a}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right),$$

то есть

$$H_z\,(x, y) = \frac{H_{z0}}{2}\left\{\cos\frac{\pi x}{a} - \cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{a}\right\}. \tag{2}$$

Сравнивая выражение (1) с (2), видим, что бегущая в волноводе ТЕ-волна представима в виде $H = H_{10} + H_{11}$. Тогда для H_{10} дисперсионное уравнение запишется в виде

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + (k_z)^2_{10},$$

$$(k_z)_{10} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{\pi}{a}\sqrt{3}.$$

Для H_{11} аналогично

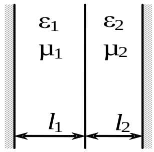
$$\frac{\omega^2}{c^2} = 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + (k_z)^2_{11},$$

$$(k_z)_{11} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{\pi}{a}\sqrt{2}.$$

Окончательно $z-$компонента магнитного поля имеет вид

$$H_z\,(x, y, z) = H_{z0}\left\{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{a} e^{-ik_{z10}} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{a} e^{-ik_{z11}}\right\}.$$

1.47. 2. Найти собственные колебания и частоты в резонаторе, образованном двумя параллельными идеально проводящими плоскостями, пространство между которыми заполнено двумя слоями вещества с проницаемостями ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2, соответственно. Рассмотреть случай $\varepsilon_1/\mu_1 = \varepsilon_2/\mu_2$. (5 б)



Решение В силу независимости решения от координат вдоль границ резонатора будем искать решение в виде $\mathbf{E}(x)$, направив ось x перпендикулярно стенкам резонатора. Тогда из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ получаем условие

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0,$$

откуда следует, что $E_x = \mathrm{const}$. Поскольку это постоянное значение нас не интересует, то будем искать только такое решение, вектор $\mathbf{E}$ которого параллелен стенкам резонатора. Выберем ось y в направлении вектора E и тогда уравнение для вектора электрического поля приймет вид

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon\mu}{c^2} E_y = 0, \tag{1}$$

в каждой из областей со своими коэффициентами. Введя обозначения

$$\varkappa_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}, \quad \varkappa_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2\mu_2},$$

можно записать решение в каждой из областей в виде $E_y^{(i)} = A\sin\varkappa_i x + B\cos\varkappa_i x$. Учитывая граничные условия на стенках резонатора $(E_y = 0)$, очевидно, что решение можно записать в виде

$$E_y^{(1)} A\sin\varkappa_1 x,$$

$$E_y^{(2)} = B\sin\left[\varkappa_2(x - l_1 - l_2)\right].$$

Граничные условия на границе раздела сред Γ

$$E_\tau^{(1)}\,|_\Gamma = E_\tau^{(2)}\,|_\Gamma\,,$$

$$H_\tau^{(1)}\,|_\Gamma = H_\tau^{(2)}\,|_\Gamma\,.$$

Из первого граничного условия сразу получим

$$A\sin\frac{\omega}{c} l_1\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} = -B\sin\frac{\omega}{c} l_2\sqrt{\varepsilon_2\mu_2} \tag{2}$$

Для удовлетворения второго граничного условия обратимся к уравнениям Максвела (закону Фарадея)

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E})_z = -\frac{i\omega}{c}B_z = \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

или

$$H_z = \frac{ic}{\mu\omega}\frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Тогда второе граничное условие можно переписать в виде

$$\frac{1}{\mu_1}\left.\frac{\partial E_y^{(1)}}{\partial x}\right|_{\Gamma} = \frac{1}{\mu_2}\left.\frac{\partial E_y^{(2)}}{\partial x}\right|_{\Gamma},$$

или

$$A\frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\mu_1}\cos\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}l_1\right) = B\frac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\mu_2}\cos\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}l_2\right) \qquad (3)$$

Разделив правые и левые части уравнения (2) на соответствующие выражения уравнения (3), получим дисперсионное уравнение

$$\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}tg\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}l_1\right) = -\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}tg\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}l_2\right), \qquad (4)$$

решение которого даст дискретный набор частот ω_n. Если $\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2}$, то уравнение (4) приймет вид

$$tg\,(\alpha) = -tg\,(\beta)\,.$$

Это уравнение имеет решение

$$\frac{\omega_n}{c}\left(\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}l_1 + \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}l_2\right) = n\pi,$$

откуда получаем для частот

$$\omega_n = \frac{nc\pi}{\left(\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}l_1 + \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}l_2\right)}.$$

1.48. 3. В волноводе с металлическими стенками квадратного сечения $a \times a$ область $z < 0$ заполнена диэлектриком с $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$, а область $z > 0$ — диэлектриком с $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$. По диэлектрику ε_1 к плоской границе идёт волна H_{10}. В каком диапазоне частот $\omega_1 \div \omega_2$ должна находиться частота волны, чтобы произошло полное отражение волны. (3 б)

Решение Общее решение для H_{10}-волны имеет вид

$$H_{10} \simeq \cos\frac{\pi x}{a}.$$

Тогда дисперсионные соотношения в левой ($z < 0$) и правой ($z < 0$) половинах волновода будут иметь вид

$$3\varepsilon_0\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - (k_z)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = 0,$$

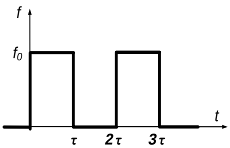
$$\varepsilon_0\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - (k_z)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = 0,$$

откуда, минимальные частоты для прохождения волны в левой и правой половинах имеют вид $\omega_{\min}^{(2)} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\pi}{a}$, $\omega_{\min}^{(1)} = \frac{c}{\sqrt{3\varepsilon}}\frac{\pi}{a}$. Поскольку $\omega_{\min}^{(1)} < \omega_{\min}^{(2)}$, то частота, с которой H_{10}-волна будет отражаться от границы раздела должна удовлетворять неравенству

$$\frac{c}{\sqrt{3\varepsilon}}\frac{\pi}{a} < \omega < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\pi}{a}.$$

1.49. 4. Для сигнала, заданного функцией $f(t)$ (см. рис.) найти спектральную плотность f_ω. (2 б)

Решение Сигнал представляет собой два прямоугольных импульса, показанных на рис. Можно, конечно, записать преобразование Фурье в виде интеграла и вычислить его, но эффективнее использовать линейность преобразования и теорему о сдвиге.



$$\begin{aligned} f_\omega &= f_\omega^{(1)} + f_\omega^{(2)} = e^{i\omega\frac{\tau}{2}} f_\omega^0 + e^{i\omega\frac{5\tau}{2}} f_\omega^0 = \\ &= e^{i\omega\frac{\tau}{2}}\left(1 + e^{2i\omega\tau}\right) f_\omega^0 = e^{i\omega\frac{\tau}{2}} e^{i\omega\tau}\frac{\left(e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau}\right)}{2} f_\omega^0 = \\ &= 2e^{\frac{3}{2}i\omega\frac{\tau}{2}}\cos\omega\tau f_\omega^0, \end{aligned}$$

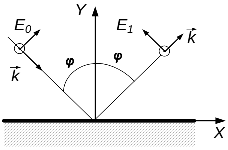
где f_ω^0 - Фурье-образ одного центрированного импульса.

$$f_\omega^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{i\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{i\omega}\frac{e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega}{2}\tau}\tau = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}}\sin c\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

$$f_\omega = \frac{2f_0\tau}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{3}{2}i\omega\frac{\tau}{2}}\cos\omega\tau\sin c\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

1.50. 5. На идеально проводящее полупространство $y \le 0$ из пустоты падает плоская монохроматическая ТМ-волна с амплитудой E_0 и частотой ω под углом ϕ к оси y (yx — плоскость падения). Найти распределение поверхностной плотности зарядов $\sigma(x,t)$ и тока $i_0(x,t)$ на поверхности проводника. (3 б)

Решение В плоской падающей волне амплитуды электрического и магнитного



поля равны, т.е. $E_0 = H_0$. В идеально проводящем пространстве электрическое и магнитное поле равны 0, поэтому граничные условия на границе раздела вакуум-металл будут иметь вид

$$B_{1n} = 0,$$

которое выполняется автоматически (ТМ-волна и, следовательно, магнитное поле касательно поверхности). Из-за поворота вектора электрического поля при отражении (иначе нельзя удовлетворить граничным условиям при нормальном падении) нормальная составляющая электрического поля на границе ($y = 0$) испытывает скачок. Вектор электрического поля в падающей плоской волне имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)},$$

а скачок нормальной составляющей электрического поля

$$\Delta E_{1n} = 2E_0 \sin\varphi \cdot e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x \sin\varphi\right)}.$$

Если скачок нормальной составляющей не равен нулю, то на поверхности будет поверхностная плотность заряда σ, которая находится из уравнений

$$\Delta E_{1n} = 4\pi\sigma/$$

Тогда

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} 2E_0 \sin\phi \cos\left[\omega\left(t - \frac{x\sin\phi}{c}\right)\right].$$

Скачок касательной составляющей магнитного поля приводит к появлению поверхностного тока i, который определяется из граничных условий

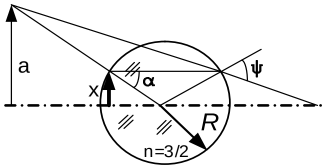
$$\mathbf{H}_{2\tau} - \mathbf{H}_{1\tau} = \mathbf{H}_{1\tau}\big|_{y=0} = -\mathbf{e}_z E_0 e^{i(\omega t - k_x x)} = \mathbf{e}_y \times \mathbf{i}\frac{4\pi}{c},$$

откуда

$$\mathbf{i} = \frac{c}{4\pi} E_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x}{c}\sin\varphi\right)} \mathbf{e}_x.$$

1.51. 6. Внутри стеклянного шарика с показателем преломления 3/2 вблизи поверхности находится мелкий предмет. Найти увеличение предмета, если его рассматривать с обратной стороны шарика. (3 б)

Решение Задачу можно решать как матричным методом, так и геометрическим



построением (см. рисунок). Так как предмет находится внутри стекла, то луч, проведенный из конца предмета параллельно оси дойдет до границы шара изнутри и преломится. При этом для углов α и ψ будет выполняться соотношение (закон Снелиуса) $n \sin\alpha = \sin\psi$, или, используя параксиальное приближение, $n\alpha = \psi$. Продолжение этого луча влево даст одну из линий для построения мнимого изображения предмета. Луч, проведенный из центра шара через вершину рассматриваемого предмета не преломляется (поскольку это луч - нормаль к поверхности шара) и его пересечение с проведенным ранее лучом даст мнимое изображение предмета длиной a. Используя очевидные соотношения для углов $\alpha = \frac{x}{R}$ и $\frac{a}{L} = \psi - \alpha$ и выполняя очевидные преобразования, получим

$$\frac{a}{L - R - \frac{x}{\psi - \alpha}} = \alpha,$$

$$\frac{a}{L - R - \frac{xR}{(n-1)x}} = \frac{x}{R},$$

$$\frac{a}{L} = \psi - \alpha = (n-1)\,\frac{x}{R},$$

$$L = \frac{a \cdot R}{(n-1)\,x},$$

$$aR = x\left\{\frac{aR}{(n-1)\,x} - R - \frac{R}{n-1}\right\}$$

$$a = x\left\{\frac{a}{(n-1)\,x} - \left(-\frac{n}{n-1}\right)\right\}$$

$$\frac{a}{x} - \frac{a}{(n-1)\,x} = -\frac{n}{n-1}$$

$$\frac{a}{x}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) = -\frac{n}{n-1}$$

$$\frac{a}{x}\frac{n-2}{n-1} = -\frac{n}{n-1}.$$

В результате получим увеличение

$$\frac{a}{x} = \frac{n}{2-n} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3.$$