НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра общей физики

Контрольная работа по электродинамике для студентов 2 курса ФФ НГУ,

3 семестр, 2005-2006 учебный год

1.Оценить силу взаимодействия между заряженным (заряд q) металлическим изолированным шаром и маленькой росинкой-каплей с диэлектрической проницаемостью ε. Радиус росинки много меньше расстояния l между центрами рассматриваемых тел. (3 балла)

Решение Поле вблизи росинки можно считать однородным и равным $\vec{E} = \frac{q}{l^2}\vec{n}$, где $\vec{n} = \frac{\vec{l}}{l}$ - единичный вектор, направленный от шара к росинке. Рассматривая росинку как диэлектрический шар в однородном поле (зад 2.8а), можно записать создаваемый на этом шаре дипольный момент ($\varepsilon_1 = \varepsilon,\ \varepsilon_2 = 1$)

$$\vec{p} = \frac{q}{l^2}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}a^3\vec{n}.$$

Потенциал диполя в слабо неоднородном поле для «упругого> диполя, дипольный момент которого зависит от внешнего поля («Мешков, Чириков, т.1, стр. 13») можно записать в виде

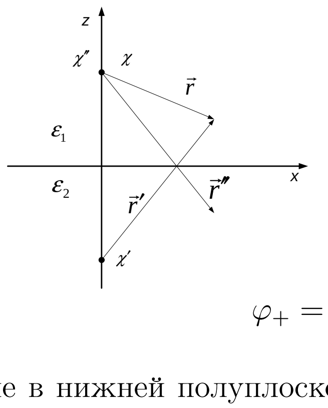
$$U = -\frac{1}{2}\left(\vec{p}\vec{E}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}a^3\left(\vec{E}\vec{E}\right).$$

Тогда сила

$$\blacktriangleleft\ \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial l}\vec{n} = -\frac{2q^2a^3}{l^5}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\ \blacktriangleright.$$

2.Параллельно плоской границе между вакуумом и диэлектриком с проницаемостью ε на высоте h от границы расположена бесконечная прямая нить с зарядом единицы длины $\varkappa$. Найти силу на единицу длины dF/dl нити. (2 балла)

Решение. Для решения этой задачи методом изображений можно предположить, что поле в верхней полуплоскости ($z > 0$) определяется суперпозицией полей нити с плотностью заряда $\varkappa$ и нити-изображения, размещенной в нижней полуплоскости симметрично верхней ($z = -h$) и имеющей плотность заряда $\varkappa'$, т.е.



$$\varphi_+ = \varphi_1\ +\ \varphi_2 = -2\varkappa\ln r_1 - 2\varkappa'\ln r_2.$$

А поле в нижней полуплоскости является полем нити, размещенной в верхней полуплоскости и имеющем плотность заряда $\varkappa''$.

$$\varphi_- = -2\frac{\varkappa''}{\varepsilon}\ln r_3,$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2+(z-h)^2}, \\ r_2 &= \sqrt{x^2+(z+h)^2}, \\ r_3 &= \sqrt{x^2+(z-h)^2}. \end{aligned}$$

Используя условие непрерывности потенциала при переходе через границу $\varphi_1 + \varphi_2|_{z=0} = \varphi_3$, получим

$$\varkappa + \varkappa' = \frac{\varkappa''}{\varepsilon}.$$

Из условия непрерывности $\vec{D}$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}|_{z=0},$$

откуда

$$\varkappa - \varkappa' = \varkappa''.$$

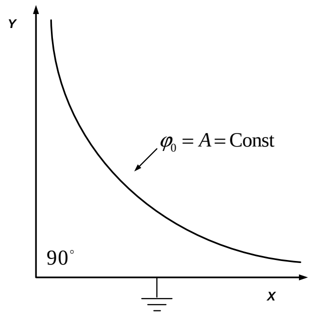
Разрешая уравнения относительно плотностей зарядов, получим

$$\varkappa'' = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}\varkappa; \;\; \varkappa' = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\varkappa.$$

Сила, действующая на нить, определяется полем, создаваемым нитью с плотностью $\varkappa'$ в нижней полуплоскости и равна

$$\blacktriangleleft \; \frac{dF}{dl} = \varkappa E = \frac{2\varkappa\varkappa'}{r} = \frac{\varkappa^2}{h}\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \; \blacktriangleright.$$

3. Один электрод системы заземлен и представляет собой двугранный угол 90°, а другой - имеющий потенциал φ_0 – это гиперболическая поверхность $xy = A = \text{Const}$. Найти потенциал $\varphi(x, y)$ в пространстве между электродами, удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta\varphi(x, y) = 0$ и граничным условиям. (4 балла)



Решение. Ищем решение в виде $\varphi(x, y) = C_1xy+C_2$. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа. Из условия равенства нулю потенциала на прямых сторонах получаем $C_1 = 0$. Подставляя решение в виде $\varphi(x, y) = C_1xy$ в граничное условие на гиперболической поверхности, получим

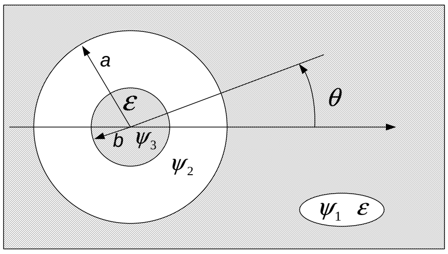
$$\varphi_0 = C_1 \cdot A,$$

откуда получаем $C_1 = \varphi_0/A$ и, следовательно, решение имеет вид

$$\blacktriangleleft \; \varphi(x, y) = \frac{\varphi_0}{A}xy \; \blacktriangleright.$$

4. Всё пространство было занято диэлектриком с проницаемостью ε и находилось в однородном электрическом поле напряженностью $\vec{E}_0$. В начале координат возникла сферическая вакуумная полость радиуса a, а внутри неё остался диэлектрический шар радиуса $b < a$ с центром в нуле. Найти поле $\vec{E}$, в зазоре между a и b (3 балла) и дипольный момент p, наведенный на шаре. (1 балл).

Решение. В каждой из областей скалярный потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению Лапласа и, следовательно можно предположить, что в каждой из областей решение имеет вид



$$\begin{aligned}
\psi_1 &= -E_0 r\cos\theta + \frac{P_0}{r^2}\cos\theta \\
\psi_2 &= -E_1 r\cos\theta + \frac{P_1}{r^2}\cos\theta \\
\psi_3 &= -E_2 r\cos\theta.
\end{aligned}$$

Граничные условия на обоих сферических поверхностях $r = a$ и $r = b$ – это непрерывность потенциала $\psi_1(a) = \psi_2(a), \psi_2(b) = \psi_3(b)$ и непрерывность нормальных компонент $\vec{D}_n = \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial r}$. Тогда получим четыре уравнения

$$\begin{aligned}
-E_0 a + \frac{P_0}{a^2} &= -E_0 a + \frac{P_0}{a^2}, \\
-E_1 b + \frac{P_1}{b^2} &= -E_2 b, \\
\varepsilon\left(E_0 + 2\frac{P_0}{a^3}\right) &= E_1 + 2\frac{P_1}{a^3}, \\
\varepsilon E_2 &= E_1 + 2\frac{P_1}{b^3}.
\end{aligned}$$

Разрешив эту систему уравнений, получим выражения для всех параметров.

5. Нижний конец длинного цилиндрического конденсатора, обкладки которого находятся под постоянным напряжением, погрузили в проводящую жидкость на заметную глубину h, при этом сопротивление конденсатора равно R. Если глубину увеличить вдвое, сопротивление станет равным $2R/3$. Найти сопротивление конденсатора при погружении нижнего конца на глубину в 4 раза большую первоначальной. Указание: обязательно учтите роль краевых эффектов. (5 баллов)

Решение. Вначале конденсатор, погруженный в жидкость, представляет собой два параллельных сопротивления - сопротивление R_h собственно конденсатора, погруженного на глубину h, и сопротивление R_0 за счет перетекания тока вне конденсатора (краевого эффекта). Погружение конденсатора на глубину вдвое больше является включением в цепь второго сопротивления R_h, параллельного двум предыдущим. Запишем полное сопротивление конденсатора в этих двух случаях

$$\frac{1}{R_h} + \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R}, \;\; \frac{2}{R_h} + \frac{1}{R_0} = \frac{3}{2R}.$$

После несложных преобразований получим $R_h = 2R, \;\; R_0 = 2R$. Записывая аналогичное уравнение для третьего случая - погружения конденсатора на глубину $4h$, получаем

$$\frac{1}{R_x} = \frac{4}{R_h} + \frac{1}{R_0} = \frac{5}{2R}.$$

$$\blacktriangleleft\ R_x = \frac{2}{5}R\ \blacktriangleright\ .$$

6.Через неоднородную среду с проницаемостью $\varepsilon(\vec{r})$ ($\mathrm{grad}\,\varepsilon \neq 0$) и проводимостью σ проходит пространственный ток с плотностью $\vec{j}$. Найти создавшийся в среде объёмный электрический заряд $\rho(\vec{r})$. (5 баллов) **Решение.** Объемный электрический заряд

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{div}\,\vec{D} = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{div}\,\varepsilon\vec{E} = \frac{1}{4\pi}\left[\varepsilon\,\mathrm{div}\,\vec{E} + \vec{E}\nabla(\varepsilon)\right] = \frac{\vec{j}}{4\pi\sigma}\nabla(\varepsilon).$$

$$\blacktriangleleft\ \rho(\vec{r}) = \frac{\vec{j}}{4\pi\sigma}\nabla(\varepsilon)\ \blacktriangleright$$

Предварительные баллы: 6 баллов $\leq$ удовлетворительно $\leq$ 8 баллов

9 баллов $\leq$ хорошо $\leq$ 11 баллов

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!