МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики физического факультета

Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Краевые задачи. Функция Грина.

учебно-методическое пособие

Новосибирск

2012

Настоящее пособие является четвертой частью цикла пособий, отражающих многолетний опыт проведения авторами практических занятий по курсу «Методы математической физики» на втором курсе отделения физической информатики физического факультета НГУ.

Разнообразные примеры и комментарии к ним знакомят студентов с идеями, лежащими в основе различных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, и помогают осваивать алгоритмы решения типовых задач.

Каждый параграф пособия является методической разработкой двухчасового занятия. В конце занятия предлагаются вопросы для самостоятельной работы и список задач для дальнейшего закрепления полученных практических навыков. Нумерация занятий единая для всего цикла пособий.

Целевая аудитория: студенты 2-го курса отделения физической информатики физического факультета и отделения геофизики и геомеханики геолого-геофизического факультета НГУ.

Авторы

Михайлова Т. Ю., Доманова Е. Д.

Учебно-методическое пособие подготовлено в рамках реализации

Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 г.г.

Занятие 20

Разделение переменных в уравнении Гельмгольца

Уравнением Гельмгольца называется уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varkappa^2 u = 0 \qquad (n = 2) \tag{20.1}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \varkappa^2 u = 0 \qquad (n = 3) \tag{20.2}$$

Это уравнение занимает центральное место в любом курсе методов математической физики, потому что к нему сводится большое число разнообразных задач.

Мы будем искать некоторые частные решения этого уравнения, а именно те решения, которые допускают представление в виде произведения функций, зависящих от одной переменной. Например, если для уравнения (20.1) попытаться найти решение в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$, то придём к

$$X''Y + XY'' + \varkappa^2 XY = 0,$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \varkappa^2 = 0.$$

Если положить $\dfrac{X''}{X} = -\alpha$, то функция Y будет удовлетворять уравнению $\dfrac{Y''}{Y} + \varkappa^2 - \alpha = 0$. Таким образом, мы придём к системе

$$\begin{cases} X'' + \alpha X = 0, \\ Y'' + (\varkappa^2 - \alpha)Y = 0. \end{cases}$$

Параметр α называется константой разделения.

Тот же подход для уравнения (20.2) даст

$$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

$$\begin{cases} X'' + \alpha X = 0, \\ Y'' + \beta Y = 0, \\ Z'' + (\varkappa^2 - \alpha - \beta)Z = 0. \end{cases}$$

И здесь мы имеем уже две константы разделения: α и β.

Описанный алгоритм и называется "разделением переменных".

Рассмотрим на плоскости другие системы координат. Говорят, что на плоскости задана криволинейная система координат, если декартовы координаты x, y являются взаимно однозначными функциями других переменных q_1, q_2:

$$x = x(q_1, q_2),$$
$$y = y(q_1, q_2),$$

при этом, якобиан $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(q_1,q_2)} \neq 0$ (за исключением, быть может, конечного числа точек, где $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(q_1,q_2)} = 0$)

Мы имеем два семейства координатных линий, где $q_1 = const$ или $q_2 = const$. При этом, мы будем рассматривать только ортогональные системы координат, то есть такие, для которых координатные линии ортогональны.

Рассмотрим элемент дуги координатной линии $dl = H_i dq_i$. Соответствующий коэффициент H_i называется коэффициентом Ламе. Их часто можно найти исходя из геометрических соображений, или же вычислить по формуле

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 \qquad i = 1, 2.$$

Уравнение Гельмгольца (20.1) в произвольной ортогональной системе координат имеет вид

$$\frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)\right] + \varkappa^2 u = 0.$$

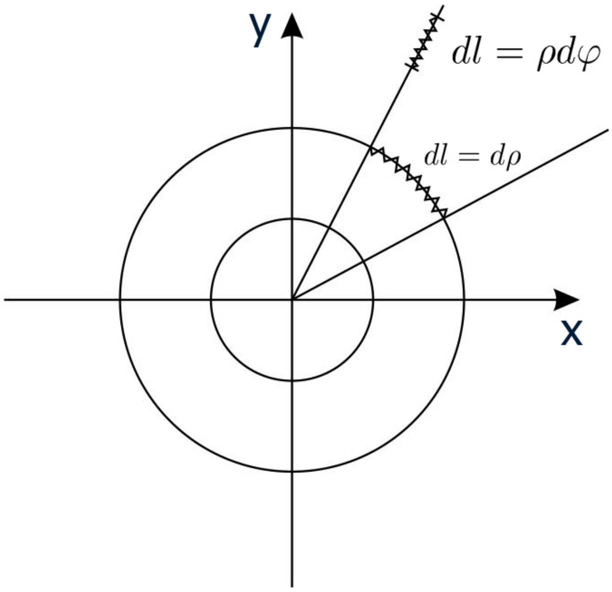


Рис. 20.1. Координатные линии полярной системы координат.

Говорят, что к некоторой системе координат уравнение Гельмгольца допускает "разделение переменных если можно найти частное решение этого уравнения в виде

$$u = F(q_1) \cdot G(q_2).$$

На плоскости уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных только в четырёх системах координат: декартовой, полярной, параболической и эллиптической. Сейчас мы опишем эти системы координат и произведём "разделение переменных".

Полярная система координат.

$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$

$$H_\rho = 1\,, \quad H_\varphi = \rho$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \varkappa^2 u = 0$$

$$u = F(\rho) \cdot G(\varphi)$$

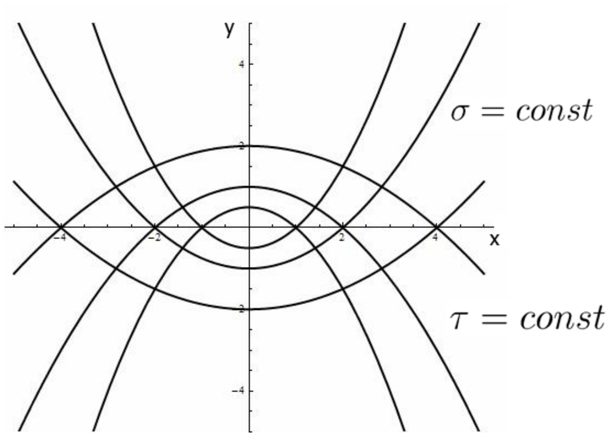


Рис. 20.2. Координатные линии параболической системы координат.

$$\frac{1}{F}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dF}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{G''}{G} + \varkappa^2 = 0$$

$$\begin{cases} G'' + \alpha G = 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dF}{d\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}F + \varkappa^2 F = 0 \end{cases}$$

Параболическая система координат.

$$x = \sigma\tau$$
$$y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$$

Координатные линии - параболы. Их уравнения:

$$\frac{x^2}{\sigma^2} = 2y + \sigma^2,$$
$$-\frac{x^2}{\tau^2} = 2y - \tau^2.$$

$$H_\sigma^2 = H_\tau^2 = \tau^2 + \sigma^2.$$

$$\frac{1}{\tau^2 + \sigma^2}(u_{\sigma\sigma} + u_{\tau\tau}) + \varkappa^2 u = 0$$

$$u = F(\tau)\cdot G(\sigma)$$

$$\frac{G''}{G} + \frac{F''}{F} + (\sigma^2 + \tau^2)\varkappa^2 u = 0$$

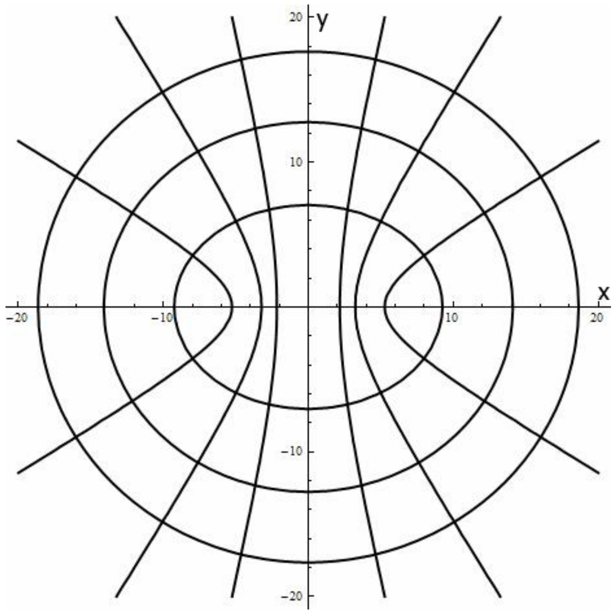


Рис. 20.3. Координатные линии эллиптической системы координат.

$$\begin{cases} G'' + (\sigma^2\varkappa^2 + \alpha)G = 0 \\ F'' + (\tau^2\varkappa^2 - \alpha)F = 0 \end{cases}$$

Эллиптическая система координат.

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\alpha \cdot \cos\beta$$

$$y = a\,\mathrm{sh}\,\alpha \cdot \sin\beta$$

Координатными линиями являются эллипсы

$$\frac{x^2}{(a\,\mathrm{ch}\,\alpha)^2} + \frac{y^2}{(a\,\mathrm{sh}\,\alpha)^2} = 1$$

и софокусные с ними гиперболы

$$\frac{x^2}{(a\cos\beta)^2} - \frac{y^2}{(a\sin\beta)^2} = 1$$

$$H_\alpha^2 = H_\beta^2 = a^2(sh^2\alpha + \sin^2\beta)$$

$$\frac{1}{a^2(\mathrm{sh}^2\alpha\sin^2\beta)}(u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta}) + \varkappa^2 u = 0$$

$$u = F(\alpha)\cdot G(\beta)$$

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} + \varkappa^2(\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta)a^2 = 0$$

$$\begin{cases} F'' + (a^2\varkappa^2\operatorname{sh}^2\alpha + \lambda)F = 0 \\ G'' + (a^2\sin^2\beta - \lambda)G = 0 \end{cases}$$

Здесь λ - константа разделения.

В пространстве заданы криволинейные координаты, если декартовы координаты x, y, z являются взаимно-однозначными функциями других трёх переменных q_1, q_2, q_3.

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)} \neq 0 \\ z &= z(q_1, q_2, q_3), \end{aligned}$$

Для каждой такой системы координат существуют три семейства координатных поверхностей, где $q_i = const$, $i = 1, 2, 3$. Пересечение двух координатных поверхностей образует координатную линию, вдоль которой меняется только одна координата. При этом, вдоль координатной линии

$$dl = H_i dq_i,$$

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2 \quad \text{— коэффициент Ламе.}$$

Уравнение Гельмгольца в произвольной ортогональной системе координат имеет вид

$$\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_1^2}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_2^2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_3^2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)\right] + \varkappa^2 u = 0.$$

Если можно найти решение уравнения Гельмгольца вида

$$u = F(q_1)\cdot G(q_2)\cdot H(q_3),$$

то говорят, что в этой системе координат уравнение Гельмгольца допускает "разделение переменных". Всего существует 11 таких систем координат, мы рассмотрим две из них — сферическую и цилиндрическую, которые используются особенно часто.

Цилиндрическая система координат.

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, z = z, \qquad H_\rho = 1\,, \quad H_\varphi = \rho\,, \quad H_z = 1.$$

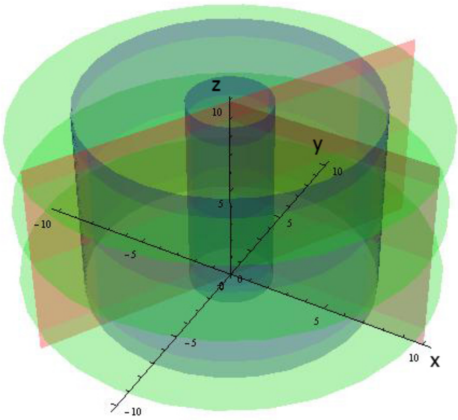


Рис. 20.4. Координатные поверхности цилиндрической системы координат.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \varkappa^2 u = 0$$

$$u = R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)\cdot F(z)$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{F''}{F} + \varkappa^2 = 0$$

$$\begin{cases} \Phi'' + \alpha\Phi = 0, \\ F'' + \beta F = 0, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\rho\dfrac{dR}{d\rho} - \dfrac{\alpha}{\rho^2}R - \beta R + \varkappa^2 R = 0. \end{cases}$$

Сферическая система координат.

$$\begin{aligned} &x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ &y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad H_r = 1\,, \quad H_\theta = r\,, \quad H_\varphi = r\sin\theta. \\ &z = r\cos\theta, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \varkappa^2 u = 0.$$

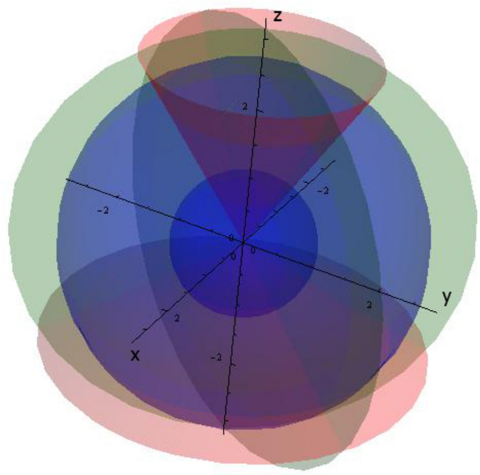


Рис. 20.5. Координатные поверхности сферической системы координат.

$$u = R(r)\cdot\Phi(\varphi)\cdot F(\theta).$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{F}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dF}{d\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}\right]+\varkappa^2=0$$

$$\begin{cases}\Phi''+\alpha\Phi=0,\\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\sin\theta\dfrac{dF}{d\theta}-\dfrac{d}{\sin^2\theta}+\beta F=0,\\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}r^2\dfrac{dR}{dr}-\dfrac{\beta}{r^2}R+\varkappa^2R=0.\end{cases}$$

Самостоятельная работа

1. В результате вращения вокруг оси Ox эллиптической системы координат на плоскости, мы получили в трёхмерном пространстве систему координат

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta,$$

$$y = a\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta\cos\varphi,$$

$$z = a\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta\sin\varphi.$$

Нарисуйте эскиз координатных поверхностей, укажите координатные линии, найдите коэффициенты Ламе.

2. В результате вращения вокруг оси Oy эллиптической системы координат на плоскости, мы получили в пространстве систему координат

$$
\begin{aligned}
x &= a \operatorname{ch} \alpha \cos \beta \cos \varphi, \\
y &= a \operatorname{sh} \alpha \sin \beta, \\
z &= a \operatorname{ch} \alpha \cos \beta \sin \varphi.
\end{aligned}
$$

Выполните то же задание, что и в предыдущем пункте.

3. Покажите, что уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных в описанных системах координат.

Домашняя работа

Если проделать те же манипуляции с параболической системой координат на плоскости (то есть совершить вращение вокруг оси Ox или вокруг оси Oy), то мы получим системы координат в трёхмерном пространстве. Покажите, что с одном случае уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных, а в другом — нет.

Занятие 21

Линейные уравнения с переменными коэффициентами второго порядка.

При разделении переменных в уравнении Гельмгольца мы приходили к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям второго порядка

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x). \tag{21.1}$$

Функции $a(x)$, $b(x)$ и $f(x)$ являются непрерывными функциями на каком-то интервале. Мы знаем, что общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0(x),$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — некоторые частные решения однородного уравнения, образующие фундаментальную систему решений (Ф.С.Р.), а $y_0(x)$ — частное решение неоднородного уравнений, которое можно найти методом вариации.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют Ф.С.Р. на некотором интервале, если определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

не обращается в ноль на этом интервале.

Функция $W(x)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{dW}{dx} = -a(x)W(x). \tag{21.2}$$

Если мы знаем одно частное решение однородного уравнения $y_1(x)$, то второе можно найти используя функцию $W(x)$. Из

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

следует

$$\frac{W(x)}{y_1^2(x)} = \frac{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}{y_1^2(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right). \tag{21.3}$$

Из формулы (21.3) мы находим функцию $y_2(x)$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$x^2(x+1)y'' - 2y = 0.$$

Заметим, что если это уравнение переписать в виде, разрешенном относительно старшей производной

$$y'' - \frac{2}{x^2(x+1)}y = 0,$$

то коэффициент при y имеет две точки разрыва $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$. Поэтому следует рассматривать решение на интервалах $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$.

Уравнение Лиувилля имеет вид

$$\frac{d}{dx}W(x) = 0,$$

откуда $W(x) = const$.

Проверим, что функция $y_1(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ удовлетворяет исходному уравнению. Находим $y_2(x)$, решая уравнение (21.3).

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{1+1/x}\right) = \frac{1}{(1+1/x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

(Мы положили $W(x) \equiv 1$, что совершенно не существенно, поскольку мы ищем частное решение.)

Найдём какую-нибудь первообразную функции $\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$.

$$\int \frac{x^2dx}{(1+x)^2} = \int \left(1 - \frac{2x+1}{(1+x)^2}\right) dx =$$
$$= \int \left(1 - \frac{2(x+1)}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2}\right) dx = x - 2\ln|1+x| - \frac{1}{1+x}.$$

Итак,

$$y_2(x) = \frac{x+1}{x}\left(x - 2\ln|1+x| - \frac{1}{1+x}\right) = x + 1 - \frac{2(x+1)}{x}\ln|1+x| - \frac{1}{x}.$$

(Обратите внимание, что функция $y_2(x)$ имеет разрывы в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$.)

Ответ: $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

Таким образом, мы видим, что основной проблемой является нахождение одного частного решения, далее работает простой алгоритм. В некоторых случаях частное решение можно подобрать. Рассмотрим примеры.

Попробуем искать решение уравнения $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$ в виде $y = e^{kx}$, тогда

$$xk^2 - (2x+1)k + (x+1) = 0.$$

Если $k^2 - 2k + 1 = 0$ и $-k + 1 = 0$, то есть $k = 1$, то функция $y = e^x$ является частным решением.

Для уравнения
$$x^2 \ln xy'' - xy' + y = 0$$

частное решение $y = x$ угадывается без труда.

Ищем частное решение уравнения

$$x(x^2+6)y'' - 4(x^2+3)y' + 6xy = 0$$

в виде многочлена. Сначала надо понять, какой степени может быть этот многочлен. Если $y = x^n + \ldots$, то должен обратиться в ноль коэффициент при старшей степени, которая в нашем случае равна $n+1$:

$$n(n-1) - 4n + 6 = 0.$$

Отсюда $n_1 = 2$, $n_2 = 3$. Ищем частное решение в виде $y = Ax^2 + Bx + C$ и приходим к $y_1 = x^2 + 2$. (Заметим, что второе решение можно было бы искать в виде многочлена третьей степени. Мы получили бы $y_2 = x^3$.) Таким образом, $y = C_1(x^2 + 2) + C_2x^3$.

Использование формулы Лиувилля привело бы здесь к значительным техническим сложностям. К сожалению, общего правила для определения частного решения нет. Говорят, что линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами "бросает вызов искусству аналитика". Оказывается, что целесообразно дать новое название функциям, образующим Ф.С.Р. уравнения, которое часто встречается в приложениях, чем пытаться выразить эти функции через уже известные. Мы ещё вернёмся к этим вопросам в занятии 26.

Далее мы рассмотрим искусственные приёмы, позволяющие в некоторых случаях найти решение уравнения (21.1).

1. Замена $y(x) = \rho(x) \cdot z(x)$ приводит к уравнению на функцию $z(x)$, которое не содержит первую производную (для такого уравнения $W(x) \equiv const$). Наша цель — подобрать подходящим образом функцию $\rho(x)$.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y - 0.$$

Полагаем $y = \rho(x)z(x)$, тогда

$$x^2(\rho''z + 2\rho'z' + \rho z'') - 2x(\rho'z + \rho z') + (x^2 + 2)\rho z = 0.$$

Если $2x^2\rho' - 2x\rho = 0$, то есть $\rho(x) = x$, то

$$x^3z'' - 2xz + (x^2 + 2)xz = 0.$$

Функция $z(x)$ удовлетворяет уравнению

$$z'' + z = 0,$$

которое мы легко решим: $z = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Ответ: $y = C_1 x \sin x + C_2 x \cos x$.

2. Замена независимого переменного $t = \varphi(x)$ приводит к уравнению, которое также не содержит слагаемое с первой производной.

Пример 3. Решить уравнение

$$xy'' - y' - 4x^3 y = 0.$$

Будем обозначать производные функции y по переменной t точкой. Имеем

$$y'(x) = \dot{y}(t)\varphi'(x),$$

$$y'' = \ddot{y}(t)(\varphi'(x))^2 + \dot{y}(t)\varphi''(x).$$

Тогда

$$x(\ddot{y}(\varphi')^2 + \dot{y}\varphi'') - \dot{y}\varphi' - 4x^3 y = 0.$$

Найдём функцию $\varphi(x)$ такую, что $x\varphi'' - \varphi' = 0$. Это уравнение можно решить понижая порядок. Придём к

$$\varphi(x) = C_1 x^2 + C_2.$$

Мы можем выбрать любую замену $t = \varphi(x)$. Положим, например, $t = x^2$. Тогда

$$x(2x)^2\ddot{y} - 4x^3 y = 0,$$

$$\ddot{y} - y = 0.$$

Решение этого уравнения: $y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

Итак, исходное уравнение имеет решение

$$y = C_1 e^{x^2} + C_2 e^{-x^2}.$$

Напомним метод вариации.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$xy'' - (1+2x^2)y' = 4x^3 e^{x^2}.$$

Находим два частных решения однородного уравнения

$$xy'' - (1+2x^2)y' = 0.$$

Понижая порядок $y' = u$, придём к

$$xu' - (1+2x^2)u = 0.$$

$$u = Cxe^{x^2}, \quad y = C_1 e^{x^2} + C_2.$$

Ищем частное решение в виде $y = C_1(x)e^{x^2} + C_2(x)$. На функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ получаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} e^{x^2} & 1 \\ 2xe^{x^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4x^2 e^{x^2} \end{pmatrix}.$$

(Напоминаем, что уравнение должно быть приведено к виду, разрешенному относительно старшей производной $y'' - \dfrac{1+2x^2}{x}y' = 4x^2 e^{x^2}$.)

Итак,

$$\begin{aligned} &C_1' e^{x^2} + C_2' = 0, \\ &2xe^{x^2} C_1' = 4x^2 e^{x^2}. \end{aligned}$$

Откуда $C_1 = x^2$, $C_2 = -e^{x^2}$. Частное решение неоднородного уравнения найдено.

$$y_{\text{част}} = x^2 e^{x^2} - e^{x^2} = e^{x^2}(x^2 - 1).$$

Ответ: $y = C_1 e^{x^2} + C_2 + e^{x^2}(x^2 - 1)$.

В заключение рассмотрим один пример линейного уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами.

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$xy''' - y'' - xy' + y = 0. \tag{21.4}$$

Это уравнение имеет два частных решения $y_1 = x$ и $y_2 = e^x$. Чтобы найти третье частное решение, необходимо, с одной стороны, найти функцию $W(x)$ из уравнения Лиувилля

$$\frac{dW(x)}{x} = -a_1(x)W(x),$$

где $a_1(x)$ — коэффициент при второй производной в приведённом уравнении. В нашем случае $a_1(x) = -1/x$.

С другой стороны, надо записать функцию $W(x)$, пользуясь её определением.

$$\begin{pmatrix} x & e^x & y_3(x) \\ 1 & e^x & y_3'(x) \\ 0 & e^x & y_3''(x) \end{pmatrix}.$$

Решая уравнение Лиувилля, находим

$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{x}W\,, \quad W = Cx.$$

Итак, третье частное решение можно найти из уравнения

$$e^x(x-1)y_3'' - xe^x y_3' + e^x y_3 = Cx. \tag{21.5}$$

Действуя стандартными методами, мы свели решение однородного уравнения третьего порядка к решению неоднородного уравнения второго порядка, но мы знаем, что это отнюдь не тривиальная задача.

При $c = 2$ уравнение (21.5) имеет частное решение $y_3 = e^{-x}$, но это опять подбор и угадывание, то есть совершенно не формализованный подход.

Вернёмся к уравнению (21.4) и сделаем замену $u = y'' - y$. Тогда оно примет вид
$$xu' - u = 0.$$
Его решение $u = C_1 x$. Теперь найдём y из уравнения
$$y'' - y = C_1 x.$$

Это — линейное уравнение с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Как видите, всё оказалось значительно проще. Итак, $y = -C_1 x + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.

Самостоятельная работа

1. Найти общее решение
$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0.$$

2. Найти общее решение
$$x^2 \ln x y'' - xy' + y = x \ln^2 x.$$

3. Решите уравнение, сделав подходящую замену $y = \rho(x) \cdot z(x)$.
$$(1 + x^2)y'' + 4xy' + 2y.$$

4. Решите уравнение, сделав подходящую замену независимого переменного $t = \varphi(x)$.
$$y'' + y' + 4e^{-2x} y = 0$$

5. Найдите одно частное решение в виде многочлена. Найдите функцию $W(x)$.

$$(-2x^2 + 2)y'' + 3xy' + 3y = 0.$$

Какому уравнению первого порядка удовлетворяет второе частное решение? На каких интервалах определены и непрерывны оба частных решения?

Домашняя работа

№№ 684, 687, 702, 710, 712

Занятие 22

Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка. Условия разрешимости.

Мы приступаем к рассмотрению нового типа задач для дифференциальных уравнений. До сих пор мы решали, как правило, задачу Коши, то есть искали решение дифференциального уравнения, которое удовлетворяло дополнительным условиям, заданным в одной точке. Сейчас ситуация изменится и мы будем задавать условия на концах некоторого интервала. Такие задачи мы будем называть краевыми. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$y'' + y = 1, \tag{22.1}$$

удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Общее решение имеет вид

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 1. \tag{22.2}$$

Для определения констант C_i получаем систему

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 \cdot 0 + C_2 + 1 = 0, \\ y(\frac{\pi}{2}) &= C_1 + C_2 \cdot 0 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Откуда $C_2 = -1$, $C_1 = -1$.

Ответ: $y = -\sin x - \cos x + 1$.

Пример 2. Найти решение уравнения (22.1), удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Из формулы общего решения (22.2) получаем систему для определения констант

$$y(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 + 1 = 0,$$
$$y(\pi) = C_1 \cdot 0 - C_2 + 1 = 0,$$

которая, очевидно, не имеет решения. Таким образом, нам не удалось решить поставленную задачу.

Пример 3. Найти решение уравнения

$$y'' + y = 2x - \pi$$

удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Общее решение и система уравнений на константы имеют вид

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2x - \pi,$$

$$y(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 - \pi = 0,$$
$$y(\pi) = C_1 \cdot 0 - C_2 + \pi = 0,$$

откуда получаем, что $C_2 = \pi$, а константа C_1 может быть любая.

Итак, $y = \pi \cos x + 2x - \pi + C \sin x$.

Анализируя рассмотренные примеры, мы видим, что в одном случае задача имела единственное решение, в другом не имела решений, и в третьем решений было бесконечно много. Заметим, что речь шла об одном уравнении $y'' + y = f(x)$. Менялась правая часть (функция $f(x)$) и дополнительные условия.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$y'' + y = f(x)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y(\tfrac{\pi}{2}) = 0. \tag{22.3}$$

Будем искать частное решение, удовлетворяющее краевым условиям методом вариации.

$$y = C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x$$

При этом функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ должны удовлетворять условиям $C_1(\frac{\pi}{2}) = 0$, $C_2(0) = 0$. Из системы

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

получаем

$$C_1' = \cos x \cdot f(x)\,, \quad C_2' = -\sin x \cdot f(x),$$

откуда

$$C_1(x) = -\int\limits_x^{\pi/2} \cos s \cdot f(s) ds,$$
$$C_2(x) = -\int\limits_0^{x} \sin s \cdot f(s) ds.$$

Итак,

$$y(x) = -\int\limits_0^x \cos x \sin s \cdot f(s) ds - \int\limits_x^{\pi/2} \sin x \cos s \cdot f(s) ds.$$

Полученное решение запишем в компактной форме, используя интегральный оператор с ядром $G(x,s)$:

$$y(x) = \int\limits_0^{\pi/2} G(x,s) f(s) ds. \tag{22.4}$$

Здесь функция $G(x,s)$ задаётся формулами

$$G(x,s) = \begin{cases} -\cos x \sin s\,, & 0 \leqslant x \leqslant s; \\ -\sin x \cos s\,, & s \leqslant x \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

Мы будем пользоваться следующей удобной диаграммой (Рис. 22.1).

Таким образом, краевая задача (22.3) при любой правой части $f(x)$

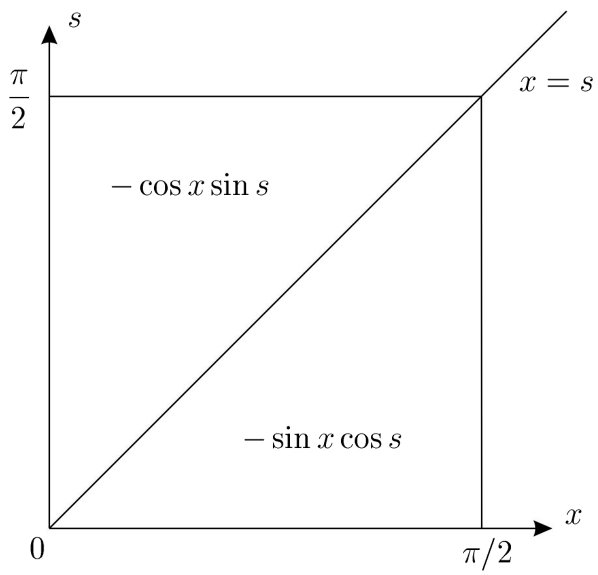


Рис. 22.1. Диаграмма функции $G(x, s)$.

имеет единственное решение, которое задаётся формулой (22.4). Функция $G(x, s)$, возникшая в ходе решения, называется функцией Грина.

Для того, чтобы разобраться с ситуацией, возникшей в примерах 2 и 3, нам надо вспомнить теоремы Фредгольма, изучаемые в курсе функционального анализа и применить их в нашем случае.

Рассмотрим оператор $L[y]$, определённый на некотором множестве функций $y \in \mathcal{D}_L$. Пусть на этом множестве задано скалярное произведение. Оператор называется самосопряжённым, если $\forall\ u, u \in \mathcal{D}_L$ имеем

$$(L[u], v) = (u, L[v]).$$

Нас интересуют условия разрешимости функционального уравнения

$$L[y] = f\,, \quad y \in \mathcal{D}_L\,, \quad f \in E_L. \tag{22.5}$$

Альтернатива Фредгольма гласит, что или уравнение (22.5) имеет единственное решение для любой функции f, или однородное уравнение $L[y] = 0$ имеет нетривиальное решение. Другими словами, альтернатива Фредгольма утверждает, что оператор L может быть вырожденным (существует ненулевая функция $e_0(x)$, принадлежащая ядру оператора L)

или не вырожденным. Во втором случае оператор L имеет обратный и

$$y = L^{-1}[f]$$

для любой функции f. Именно это и удалось нам сделать в примере 1. Покажем, что оператор $L[y] = y'' + y$ вырожден на множестве функций, удовлетворяющих условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$. Очевидно, что $e_0(x) = \sin x \in \operatorname{Ker} L$. Таким образом, становится понятно, почему мы имели проблемы в примерах 2 и 3.

Если оператор L вырожден, то уравнение (22.5) (в случае *самосопряжённого оператора*) имеет решение если и только если функция $f(x)$ ортогональна ядру оператора L.

Можно показать, что линейный дифференциальный оператор

$$L[y] = \frac{d}{dy} p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y$$

(где функция $p(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой на (a, b), $p(x) \neq 0$ на $[a, b]$, $q(x)$ — непрерывна на (a, b)) является самосопряжённым на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям

$$\begin{aligned} &\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0\,, \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \\ &\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0\,, \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Краевые условия такого вида мы будем называть стандартными.

При этом мы рассматриваем традиционное для функционального анализа скалярное произведение

$$(u, v) = \int\limits_a^b u(x) v(x) dx.$$

Давайте убедимся, что оператор $L[y] = y'' + y$ является самосопряжённым, если $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$. Покажем, что

$$(L[u], v) = \int\limits_0^\pi (u + u'')v dx = \int\limits_0^\pi u(v + v'')dx = (u, L[v]).$$

Имеем

$$(L[u], v) = \int\limits_0^\pi u(x)v(x) + \int\limits_0^\pi u''v dx.$$

Займёмся вторым слагаемым и проинтегрируем по частям.

$$\int\limits_0^\pi v du'(x) = v(x)u'(x)\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi v'u'dx = -\int\limits_0^\pi v'(x)du =$$

$$= v'(x)u(x)\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi uv''dx = \int\limits_0^\pi uv''dx.$$

Внеинтегральные члены обращаются в ноль, поскольку функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют краевым условиям.

Особенностью линейного дифференциального оператора, который мы рассматриваем, является то, что его ядро может быть только одномерным, то есть если $\operatorname{Ker} L \neq \varnothing$, то существует единственная ненулевая функция $e_0(x) \in \operatorname{Ker} L$.

Итак, чтобы полностью разобраться с рассмотренными в начале занятия примерами, нам осталось только проверить ортогональность функций 1 и $2x - \pi$ ядру оператора, то есть функции $\sin x$. Имеем:

$$\int\limits_0^\pi \sin x \cdot 1 dx \neq 0.$$ Соответствующее уравнение не имеет решений.

$$\int\limits_0^\pi \sin x \cdot (2x - \pi)dx = 0.$$ Соответствующее уравнение имеет решение.

Если оператор L вырожден, но уравнение $L[y] = f$ всё же имеет решение, то понятно, что оно обязательно будет не единственным

$$y = y_1(x) + Ce_0(x),$$

где $y_1(x)$ — какое-нибудь решение уравнения $L[y_1] = f$. (Например, его можно выбрать ортогональным функции $e_0(x)$.)

Пример 4. При каких значениях параметра α краевая задача

$$(x^2y')' = f(x)\,, \quad y(1) = 0\,, \quad y(2) + \alpha y'(2) = 0 \tag{22.6}$$

а) разрешима при всех $f(x)$

б) имеет бесконечно много решений

в) не имеет решения

Найдём, при каких α оператор вырожден. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2.$$

Чтобы эта функция удовлетворяла краевым условиям, необходимо определить константы $C_1,\ C_2$ из системы

$$\begin{aligned} &y(1) = C_1 + C_2 = 0, \\ &y(2) + \alpha y'(2) = \frac{C_1}{2} + C_2 + \alpha\left(-\frac{C_1}{4}\right). \end{aligned}$$

Система

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) C_1 + C_2 = 0, \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение, если

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 - \alpha/4 & 1 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4} = 0\,, \quad \alpha = -2.$$

При этом значении параметра можно положить $C_1 = -C_2$ и мы получим нетривиальное решение однородного уравнения, удовлетворяющее краевым условиям

$$e_0 = 1 - \frac{1}{x}.$$

Итак: а) Краевая задача (22.6) при $\alpha \neq -2$ имеет единственное решение при всех $f(x)$.

б) Если $\int\limits_0^2 f(x)(1-1/x)dx = 0$, то краевая задача имеет бесконечно много решений.

в) Если $\int\limits_0^2 f(x)(1-1/x)dx \neq 0$, то краевая задача не имеет решений.

Рассмотрим краевую задачу для оператора более общего вида

$$L[y] = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \tag{22.7}$$

Всегда можно найти такую функцию $\rho(x) \neq 0$ на (a, b), что

$$\rho(x)\left[a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y\right] = \frac{d}{dx}p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y.$$

Тогда уравнение (22.7) перейдёт в

$$\frac{d}{dx}p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = \rho(x)f(x).$$

Условие разрешимости краевой задачи пример вид

$$\int\limits_a^b \rho(x)f(x)e_0(x)dx = 0, \tag{22.8}$$

где $e_0(x) \in \operatorname{Ker} L$.

В этом случае говорят, что правая часть ортогональна ядру в скалярном произведении с весом $\rho(x)$

$$(u, v) = \int\limits_a^b \rho(x)u(x)v(x)dx.$$

Продемонстрируем сказанное на примере.

Пример 5. Найти условия разрешимости краевой задачи

$$x^2y'' - xy' + y = f(x)\,, \qquad \begin{aligned} &y(1) - y'(1) = 0, \\ &y(2) - 2y'(2) = 0. \end{aligned}$$

Убедимся, что оператор $L[y] = x^2y'' - xy' + y$ действительно вырожден. Общее решение однородного уравнения есть

$$y = C_1x + C_2x\ln x.$$

Функция $e_0(x) = x$ удовлетворяет однородному уравнению и краевым условиям. Приведём оператор к самосопряжённому виду.

$$\rho(x)x^2y'' - \rho(x)xy' + \rho(x)y = (\rho(x)x^2y')' - (\rho(x)x^2)'y' - \rho(x)xy' + \rho(x)y.$$

Функцию $\rho(x)$ найдём из условия

$$(\rho(x)x^2)' + \rho(x)x = 0.$$

Обозначим $\rho(x)x^2 = u(x)$, тогда

$$u' + \frac{u(x)}{x} = 0 \qquad \text{и} \qquad u = \frac{C}{x}.$$

Отсюда $\rho(x) = 1/x^3$. (Мы выбрали $C = 1$). Уравнение перепишется в виде

$$\frac{y''}{x} - \frac{y'}{x^2} + \frac{1}{x^3}y = \frac{f(x)}{x^3},$$

$$\left(\frac{y'}{x}\right)' + \frac{1}{x^3}y = \frac{f(x)}{x^3}.$$

Условие разрешимости

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{x^3}f(x)xdx = \int\limits_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx = 0.$$

Для любителей "готовых"формул приведём уравнение для функции $\rho(x)$, которая даёт вес в скалярном произведении (22.8).

$$(a_0(x)\rho(x))' - a_1(x)\rho(x) = 0.$$

Если положить $a_0(x)\rho(x) = u(x)$, то

$$u'(x) - \frac{a_1(x)}{a_0(x)}u(x) = 0.$$

Следует сначала найти функцию $u(x)$, а затем $\rho(x)$.

Рассмотрим несколько примеров с нестандартными краевыми условиями.

Пример 6. Найти условие разрешимости краевой задачи

$$y'' + y' = f(x)\,, \qquad \begin{array}{c} y(0) + y'(0) = 0, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0. \end{array}$$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 + C_2e^{-x}$. Функция $e_0(x) = e^{-x}$ удовлетворяет краевым условиям. Найдём вес $\rho(x)$:

$$(\rho(x))' - \rho(x) = 0\,, \quad \rho(x) = e^x.$$

Условие разрешимости:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^x f(x)e^{-x}dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

Пример 7. При каких $f(x)$ уравнение

$$y'' + y' = f(x)$$

имеет решение, ограниченное при всех x?

Функция $e_0(x) = 1$ является ограниченной функцией и удовлетворяет однородному уравнению. Функцию $\rho(x) = e^x$ мы уже нашли. Условие разрешимости:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^x dx = 0.$$

В общей теории краевых задач для уравнения $L[y] = f$ обычно требуется, чтобы функция $p(x)$, фигурирующая в записи самосопряжённого оператора

$$L[y] = \frac{d}{dx}p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y,$$

не обращалась в ноль на отрезке $[a, b]$. Но в приложениях часто оказывается, что $p(x) \neq 0$ на (a, b), но обращается в ноль, например, при $x = a$ (или при $x = b$, или на обоих концах). В этом случае в качестве краевого условия обязательно выступает требование ограниченности решения. Например, для уравнения

$$xy'' + y' = f(x)$$

следует рассмотреть краевую задачу

$$\begin{aligned} &y(0) \text{ — ограниченно},\\ &y'(1) = 0. \end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения $y = C_1 + C_2 \ln x$. Функция $e_0(x) = 1$ принадлежит ядру оператора. Так как оператор самосопряжён

$$(xy')' = f(x),$$

то условия разрешимости имеют вид

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = 0.$$

Самостоятельная работа

1. Решить краевую задачу

$$y'' + y' = 1\,, \qquad \begin{aligned} y'(0) &= 0, \\ y'(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

2. Показать, что оператор

$$L[y] = x^2y'' + 2xy' - 2y$$

не вырожден на множестве функций, ограниченных на $[0, +\infty)$.

3. Показать, что оператор L

$$L[y] = y'' + y$$

вырожден на множестве функций, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} y(0) - y'(0) &= 0, \\ y(\pi) + y'(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

4. Найти условие разрешимости краевой задачи

$$\left(\frac{y'}{x}\right)' = f(x)\,, \qquad \begin{aligned} y(1) - y'(1) &= 0, \\ 4y(2) - 5y'(2) &= 0. \end{aligned}$$

5. При каких значениях параметра α краевая задача

$$y'' + 2y' - 3y = f(x)\,, \qquad \begin{aligned} y(0) + \alpha y'(0) &= 0, \\ \lim_{x\to-\infty} y(x) &= 0. \end{aligned}$$

а) имеет решение при любой правой части

б) не имеет решений

в) имеет бесконечно много решений

Домашняя работа

№№ 751, 758, 761, 763

Занятие 23

Построение функции Грина.

Если оператор L невырожденный, то краевая задача

$$L[y] = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{23.1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{aligned} \tag{23.2}$$

имеет единственное решение при любой функции $f(x)$. Это решение выражается формулой

$$y(x) = L^{-1}[f] = \int\limits_a^b G(x,s)f(s)ds. \tag{23.3}$$

Функция $G(x,s)$, которая является ядром обратного интегрального оператора, называется функцией Грина.

Функция Грина определена на квадрате $[a,b] \times [a,b]$, удовлетворяет уравнению

$$L[G(x,s)] = \delta(x-s) \tag{23.4}$$

и краевым условиям (23.2) (при этом, мы считаем $G(x,s)$ функцией от x, рассматривая s как параметр).

Чтобы функция $G(x,s)$ удовлетворяла уравнению (23.4), необходимо, чтобы при $x \neq s$ она удовлетворяла уравнению $L[G(x,s)] = 0$, при $x = s$ была непрерывна, а её первая производная имела при $x = s$ скачок, равный $1/a_0(s)$. То есть

$$\begin{aligned} &G(s+0,s) = G(s-0,s), \\ &G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = 1/a_0(s). \end{aligned}$$

Эти свойства функции Грина и лежат в основе алгоритма её построения.

Рассмотрим пример.

Пример 1. $xy'' - y' = f(x)\,,\quad y'(1) = 0\,,\quad y(2) = 0.$

<u>1 шаг</u>. Найдём общее решение однородного уравнения $xy'' - y' = 0$. (Можно сделать понижение порядка или заметить, что это — уравнение Эйлера).

$$y = C_1x^2 + C_2.$$

<u>2 шаг</u>. Находим функцию, удовлетворяющую левому краевому условию $y'(1) = 0$.

$$y' = 2C_1x\Big|_{x=1} = 2C_1 = 0\,,\quad y(x) = 1.$$

Следовательно, общий вид функций, удовлетворяющих однородному уравнению и левому краевому условию будет

$$y_{\text{л}}(x,s) = A(s).$$

Проделаем то же самое для правого краевого условия.

$$y(2) = C_14 + C_2 = 0\,,\quad y(x) = x^2 - 4,$$

$$y_{\text{п}}(x,s) = B(s)(x^2 - 4).$$

<u>3 шаг</u>. Мы определяем функции $A(s)$ и $B(s)$, требуя, чтобы выполнялось

$$y_{\text{л}}(x,s)\Big|_{x=s} = y_{\text{п}}(x,s)\Big|_{x=s},\ \text{то есть}\ A(s) = B(s)(s^2-4)\ \text{и}$$

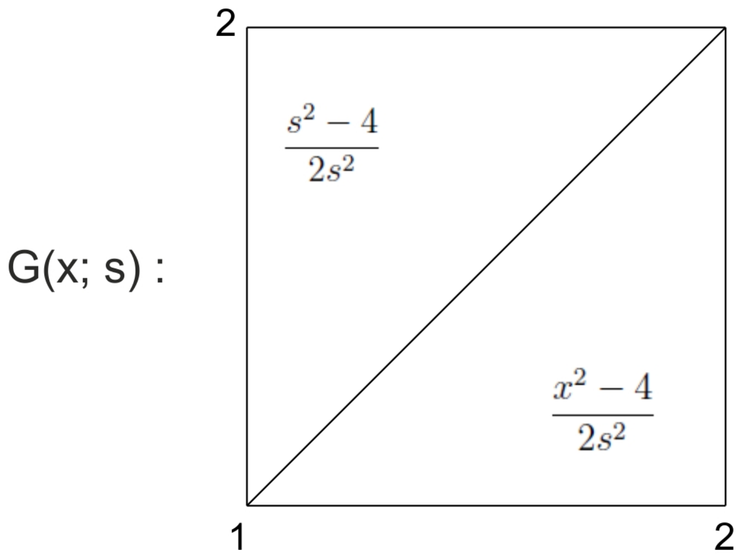
$$y'_{\text{п}}(x,s)\Big|_{x=s} - y'_{\text{л}}(x,s)\Big|_{x=s} = \frac{1}{s},\ \text{то есть}\ B(s)2x\Big|_{x=s} - 0 = \frac{1}{s}.$$

Таким образом, мы получили систему

$$\begin{aligned}&A(s) = B(s)(s^2-4),\\ &B(s)2s = 1/s,\end{aligned}$$

откуда $B(s) = 1/2s^2$, $A(s) = \dfrac{s^2-4}{2s^2}$.

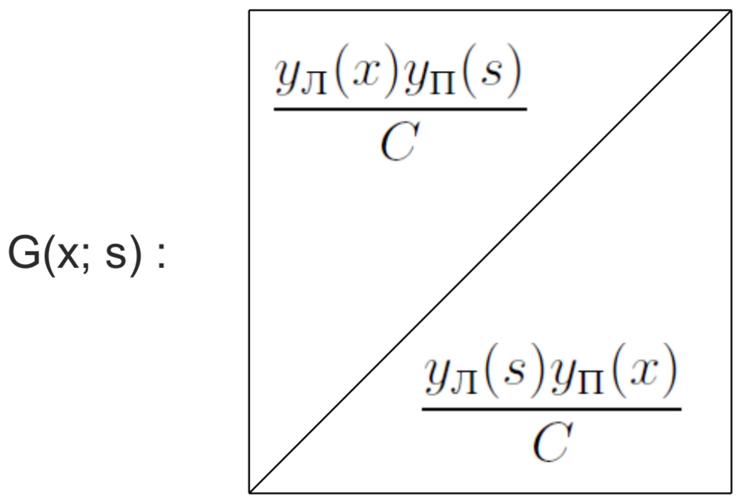
<u>4 шаг</u>. Запишем функцию $G(x, s)$ с помощью диаграммы.



Если оператор L имеет самосопряжённый вид

$$L[y] = \frac{d}{dx}p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y,$$

то функцию Грина можно найти по следующим формулам.



Здесь $y_{\text{л}}(s)$ и $y_{\text{п}}(s)$ — функции, удовлетворяющие однородному уравнению и левому или правому краевому условию соответственно. Константа C определяется из соотношения $C = W(x)p(x)$, где

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{\text{л}}(x) & y_{\text{п}}(x) \\ y'_{\text{л}}(x) & y'_{\text{п}}(x) \end{vmatrix}.$$

Заметим, что в этом случае уравнение Лиувилля имеет вид

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{p'(x)}{p(x)} W \text{ и } p(x)W' + p'(x)W = 0,$$

то есть $p(x)W(x) = const$. Рассмотрим пример.

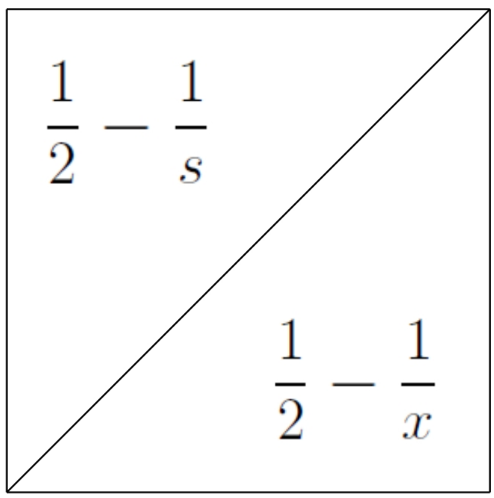
Пример 2. $x^2 y'' + 2xy' = f(x)\,, \quad y'(1) = 0\,, \quad y(2) = 0.$

$$(x^2 y')' = f(x).$$

Общее решение $y = C_1 + C_2/x$.

$$y_{\text{л}}(x) = 1\,, \quad y_{\text{п}}(x) = \frac{2}{x} - 1\,, \quad W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{x} - 1 \\ 0 & -\frac{2}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x^2}\,, \quad W(x)p(x) = -2.$$

G(x; s) :



Если оператор L был самосопряжённый, то функция $G(x, s)$ в этом случае будет симметричной и, следовательно, интегральный оператор тоже будет самосопряжённым. Построим функцию Грина для совсем простой краевой задачи и посмотрим, как она работает.

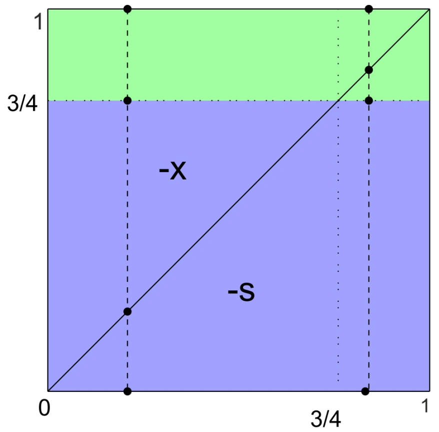
Пример 3. $y'' = f(x)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(1) = 0$

$$y_{\text{О.Р.О.}} = C_1 + C_2 x\,, \quad y_{\text{Л}} = x\,, \quad y_{\text{П}} = 1.$$

Оператор самосопряжённый, поэтому действуем далее также, как и в примере 2. Найдём

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\,, \quad p(x) = 1\,, \quad C = -1.$$

$G(x, s)$



Итак, $y(x) = \int\limits_0^1 G(x,s) f(s) ds = -\int\limits_0^x s f(s) ds + \int\limits_x^1 x f(s) ds.$

Пусть функция $f(x)$ имеет следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leqslant x \leqslant 3/4, \\ 3, & 3/4 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

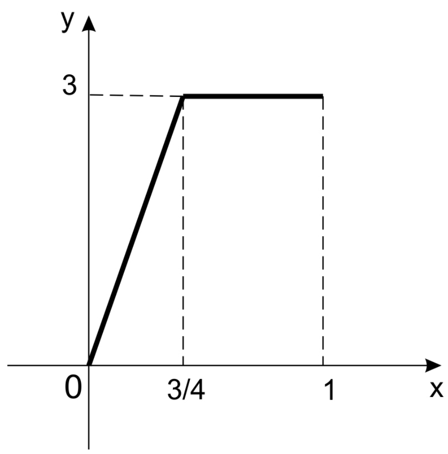


Рис. 23.1. Вид функции $f(x)$.

Фиксируем $0 \leqslant x \leqslant 3/4$, тогда

$$y(x) = -\int\limits_0^x s\cdot 4sds - \int\limits_x^{3/4} x\cdot 4sds - \int\limits_{3/4}^1 3xds = -\frac{4}{3}s^3\Big|_0^x - 2xs^2\Big|_x^{3/4} - 3xs\Big|_{3/4}^1 =$$

$$= -\frac{4}{3}x^3 - 2x\left(\frac{9}{16} - x^2\right) - 3x\frac{1}{4} = \frac{2}{3}x^3 - \frac{15}{8}x.$$

Если $3/4 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$y(x) = -\int\limits_0^{3/4} s\cdot 4sds - \int\limits_{3/4}^x 3\cdot sds - \int\limits_x^1 3xds = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{32}.$$

Рассмотрим построение функции Грина для оператора более высокого порядка.

Пример 4. $y^{IV} = f(x)\,,\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0\,,\quad y'''(1) = 0.$

Общее решение однородного уравнения

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3.$$

Функция, удовлетворяющая левым краевым условиям, есть $y = C_4x^3$. Следовательно, общий вид таких функций

$$y_{\text{л}}(x, s) = A(s)x^3.$$

Функция, удовлетворяющая правому краевому условию, есть $y = C_1 + C_2x + C_3x^2$, следовательно

$$y_{\text{п}}(x, s) = B(s) + C(s)x + D(s)x^2.$$

Чтобы добиться того, что $L[G(x, s)] = \delta(x - s)$, следует обеспечить непрерывность функции $G(x, s)$ и её производных первого и второго порядка на диагонали $x = s$, то есть

$$
\begin{aligned}
&y_{\text{п}}(x,s)\Big|_{x=s} = y_{\text{л}}(x,s)\Big|_{x=s} \qquad && B(s) + C(s)s + D(s)s^2 = A(s)s^3\\
&y'_{\text{п}}(x,s)\Big|_{x=s} = y'_{\text{л}}(x,s)\Big|_{x=s} \qquad && C(s) + 2D(s)s = 3A(s)s^2\\
&y''_{\text{п}}(x,s)\Big|_{x=s} = y''_{\text{л}}(x,s)\Big|_{x=s} \qquad && 2D(s) = 6A(s)s
\end{aligned}
$$

Третья производная должна терпеть скачок.

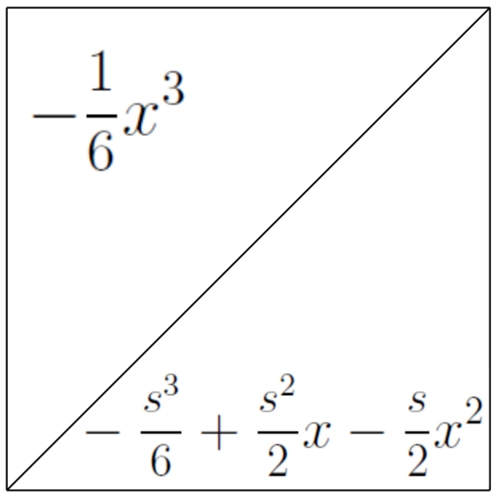
$$
y'''_{\text{п}}(x,s)\Big|_{x=s} - y'''_{\text{л}}(x,s)\Big|_{x=s} = \frac{1}{a_0(s)}\,, \qquad -6A(s) = 1.
$$

Из этой системы определяем функции $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $D(s)$:

$$
A(s) = -\frac{1}{6}\,, \quad D(s) = -\frac{s}{2}\,, \quad C(s) = \frac{s^2}{2}\,, \quad B(s) = -\frac{s^3}{6}.
$$

Итак,

G(x; s) :



Обратимся к краевым задачам с неоднородными краевыми условиями

$$
L[y] = f\,, \qquad
\begin{aligned}
\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A,\\
\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B.
\end{aligned}
$$

Ищем решение в виде суммы $y(x) = u(x) + v(x)$, где функция $u(x)$ является решением неоднородного уравнения с однородными граничными условиями

$$L[u] = f\,, \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \end{array}$$

Такую задачу мы умеем решать и

$$u(x) = \int\limits_a^b G(x,s) f(s) ds.$$

А функция $v(x)$ является решением однородного уравнения $L[v] = 0$ и удовлетворяет неоднородным краевым условиям. Можно показать, что если оператор L невырожден, то мы всегда можем найти такую функцию. Рассмотрим пример

Пример 5. $xy'' - y' = f(x)\,, \quad y'(1) = 1\,, \quad y(2) = -1$

$$y(x) = u(x) + v(x).$$

Функцию Грина для этого оператора мы уже нашли в примере 1, поэтому

$$u(x) = \int\limits_1^2 G(x,s) f(s) ds.$$

Найдём функцию $v(x)$.

$$v(x) = C_1 x^2 + C_2,$$

$$\begin{cases} v'(1) = 2C_1 = 1, \\ v(2) = 4C_1 + C_2 = -1. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 1/2$, $C_2 = -3$ и $v(x) = x^2/2 - 3$. Итак,

$$y(x) = \int\limits_1^2 G(x,s) f(s) ds + x^2/2 - 3.$$

Напомним, что реализуемый здесь подход называется принципом суперпозиции.

Если оператор L вырожден, то, как мы помним, существует ненулевая функция $e_0(x) \in \operatorname{Ker} L$. Оказывается, если рассмотреть множество функций, удовлетворяющих краевым условиям и ортогональных функции $e_0(x)$ $(y \in \mathcal{D}_L^0)$, то на этом множестве оператор оказывается невырожденным и мы можем построить обратный. Обратный оператор будет опять интегральным оператором и его ядро называется обобщённой функцией Грина.

Итак, если

$$L[y] = f(x)\,, \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{array}$$

оператор L вырожден, $e_0(x) \in \operatorname{Ker} L$, $f(x)$ ортогональна $e_0(x)$, то функция

$$y_0(x) = \int\limits_a^b G_{\text{об}}(x,s) f(s) ds$$

даёт решение поставленной краевой задачи. Это решение ортогонально функции $e_0(x)$ и определяется однозначно. Мы знаем, что в этом случае краевая задача имеет бесконечно много решений

$$y(x) = y_0(x) + C \cdot e_0(x).$$

Мы приведём алгоритм нахождения обобщённой функции Грина только для самосопряжённого оператора

$$L[y] = \frac{d}{dx} p(x \frac{dy}{dx} + q(x)y.$$

<u>1 шаг</u>. Найти функцию $e_0(x) \in \operatorname{Ker} L$.

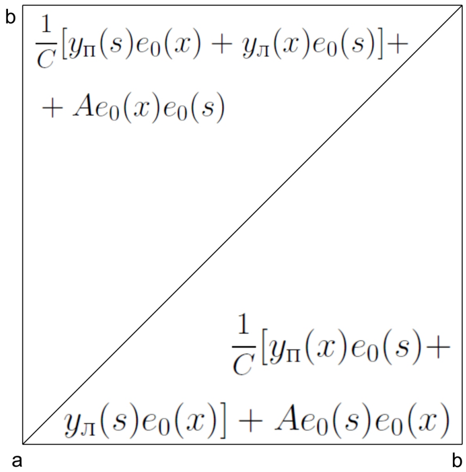
<u>2 шаг</u>. Найти решения неоднородного уравнения $L[y] = e_0(x)$, удовлетворяющие правому $(y_{\text{п}}(x))$и левому $(y_{\text{л}}(x))$ краевым условиям.

<u>3 шаг</u>. Вычислить константу $C = W(x) \cdot p(x)$, где

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_л(x) - y_п(x) & e_0(x) \\ y_л'(x) - y_п'(x) & e_0'(x) \end{vmatrix}.$$

<u>4 шаг</u>. Записать диаграмму для функции $G_{об}(x, s)$.

$G_{об}(x, s)$



<u>5 шаг</u>. Найти константу A из условия ортогональности

$$\int_a^b G_{об}(x, s)e_0(s)ds = 0.$$

Построим обобщённую функцию Грина для краевой задачи, которую мы рассматривали на предыдущем занятии.

Пример 6. $y'' + y = f(x)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y(\pi) = 0$

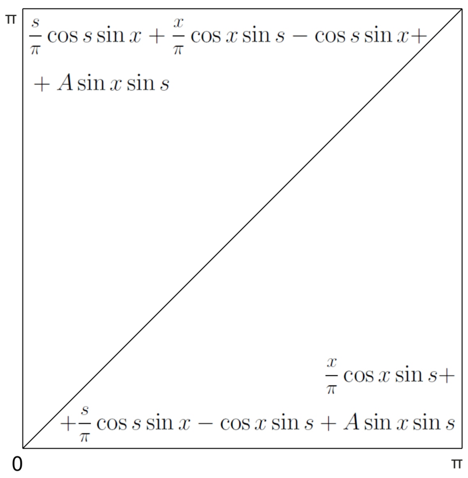
Функция $e_0(x) = \sin x \in \operatorname{Ker} L$. Условие разрешимости: $\int\limits_0^\pi f(x)\sin x dx = 0$. Мы ищем решение краевой задачи, ортогональное функции $e_0(x)$. Уравнение $y'' + y = \sin x$ имеет общее решение

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{x}{2}\cos x,$$

$$y_л(x) = -\frac{x}{2}\cos x\,, \quad y_п(x) = \frac{\pi}{2}\cos x - \frac{x}{2}\cos x.$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} -\frac{\pi}{2}\cos x & \sin x \\ \frac{\pi}{2}\sin x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\pi}{2}\,, \qquad C = -\frac{\pi}{2}.$$

$G_{\text{об}}(x, s)$



Запишем функцию $G_{\text{об}}(x, s)$ в следующем виде, удобном для отыскания константы A.

$$G_{\text{об}}(x, s) = A\sin x\sin s +$$
$$+\frac{s}{\pi}\cos s\sin x + \frac{x}{\pi}\cos x\sin s + \begin{cases} -\cos s\sin x, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ -\cos x\sin s, & s \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Найдём константу A из условия

$$\int\limits_a^b G_{\text{об}}(x, s)\sin s ds = 0.$$

Имеем

$$A\sin x\int\limits_0^\pi \sin^2 s ds + \sin x\int\limits_0^\pi \frac{s}{\pi}\cos s\sin s ds + \frac{x}{\pi}\cos x\int\limits_0^\pi \sin^2 s ds -$$
$$-\cos x\int\limits_0^x \sin^2 s ds - \sin x\int\limits_x^\pi \cos s\sin s ds = 0.$$

Вычислим интегралы:

$$\int\limits_0^\pi \sin^2 s ds = \frac{\pi}{2}, \qquad \int\limits_0^\pi \frac{s}{\pi}\cos s\sin s ds = -\frac{1}{4}$$

$$\int_0^\pi \sin^2 s ds = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\,, \quad \int_x^\pi \cos s \sin s ds = \frac{\cos 2x - 1}{4}.$$

Итак,

$$A \sin x \frac{\pi}{2} - \sin x \frac{1}{4} + \frac{x}{\pi} \cos x \frac{\pi}{2} - \cos x \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) - \sin x \left(\frac{\cos 2x - 1}{4} \right) = 0$$

$$A \sin x \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} (\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x) + \frac{1}{4} \sin x = 0$$

$$A \sin x \frac{\pi}{2} + \frac{14}{\sin} x = 0.$$

Откуда $A = -\frac{1}{2\pi}$. Обобщённая функция Грина найдена.

Самостоятельная работа

Найти функцию Грина. Записать решение краевой задачи.

1. $y'' = f(x)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y(1) = 0.$
2. $(xy')' = f(x)\,, \quad y(0)$ — ограничена $, \quad y(1) = 0.$
3. $y'' - y' = f(x)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(1) = 0.$
4. $y'' + y = f(x)\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y(\pi) = 0.$
5. $y''' = f(x)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(1) = 0\,, \quad y''(1) = 0.$

Домашняя работа

№№ 767, 772, 774, 775, 778, 780

Занятие 24

Задача Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова.

Ненулевая функция $e(x)$ называется собственной функцией оператора L

$$L[y] = \frac{d}{dx}p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y, \tag{24.1}$$

если она принадлежит области определения оператора L, то есть дважды непрерывно дифференцируема, подчинена краевым условиям

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,$$

и удовлетворяет уравнению

$$L[e] = \lambda e. \tag{24.2}$$

Число λ при этом называется собственным числом. Задача отыскания собственных чисел и собственных функций оператора L и называется задачей Штурма-Лиувилля. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $y'' = \lambda y\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y(l) = 0.$

Если $\lambda = 0$, то $y = C_1 + C_2 x$. Из краевых условий имеем

$$\begin{aligned} &C_1 = 0, \\ &C_1 + C_2 l = 0, \end{aligned}$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ и $y \equiv 0$. То есть число $\lambda = 0$ не является собственным, другими словами, мы показали, что оператор невырожден.

Если $\lambda = a^2$, то $y = C_1 \operatorname{sh} ax + C_2 \operatorname{ch} ax$. Из краевых условий

$$\begin{aligned} &C_2 = 0, \\ &C_1 \operatorname{sh} al + C_2 \operatorname{ch} al = 0, \end{aligned}$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ и мы опять не получили собственную функцию.

Если $\lambda = -a^2$, то $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax$. Из краевых условий

$$\begin{aligned} &C_2 = 0, \\ &C_1 \sin al + C_2 \cos al = 0, \end{aligned}$$

откуда $C_2 = 0$ и, если мы хотим, чтобы выполнялось $C_1 \neq 0$, то должны положить, что

$$\sin al = 0,$$

откуда $al = \pi n$ и $a = \dfrac{\pi n}{l}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Итак, мы нашли бесконечно много собственных чисел $\lambda_n = -\dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}$ и соответствующих им собственных функций

$$e_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что мы не рассматриваем $n = 0$, так как $\lambda = 0$ не было собственным числом, кроме того, отрицательные значения параметра n дают то же самое собственной число и ту же собственную функцию.

Можно строго доказать, что если в (24.1) функция $p(x) > 0$ на $[a, b]$, а $q(x) \leqslant 0$ на $[a, b]$, то собственные числа оператора L будут неположительны. Если функция $q(x)$ меняет знак на $[a, b]$, то у оператора L могут быть положительные собственные числа, но их обязательно конечное число. Это обстоятельство позволяет сэкономить время при поиске собственных чисел.

Пример 2. $y'' = \lambda y\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y'(l) = 0.$

В этом примере число $\lambda = 0$ является собственным и ему соответствует собственная функция $e_0(x) = 1$ (оператор оказывается вырожденным). Далее сразу рассматриваем $\lambda = -a^2$, $a \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} &y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax, \\ &y' = C_1 a \cos ax - C_2 \sin ax. \end{aligned}$$

Из краевых условий имеем

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= C_1 a = 0,\\
y'(l) &= C_1 a \cos al - C_2 a \sin al = 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, так как $a \neq 0$, $C_2 \neq 0$, должно выполняться $\sin al = 0$ и $al = \pi n$. Итак,

$$
\lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\,, \quad e_n = \cos\frac{\pi n}{l}x\,, \quad n = 0, 1, \ldots .
$$

Пример 3. $y'' = \lambda y\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y(l) - y'(l) = 0.$

Рассматриваем $\lambda = 0$, тогда $y = C_1 + C_2 x$. Из краевых условий

$$
\begin{aligned}
&C_1 = 0,\\
&C_1 + C_2 l - C_2 = 0,
\end{aligned}
$$

следует, что если $l = 1$, то мы имеем собственное число $\lambda = 0$ и собственную функцию $e_0 = x$, если же $l \neq 1$, то $\lambda = 0$ не является собственным числом. Рассматриваем далее $\lambda = -a^2$, $a \neq 0$, тогда

$$
y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax.
$$

Из краевых условий найдём, что

$$
\begin{aligned}
&C_2 = 0,\\
&C_1 \sin al - C_1 a \cos al = 0.
\end{aligned}
$$

Так как $C_1 \neq 0$, то для определения параметра a получаем трансцендентное уравнение

$$
\sin al = a \cos al.
$$

Обозначив $al = \tau$, придём к

$$
\operatorname{tg}\tau = \frac{\tau}{l}.
$$

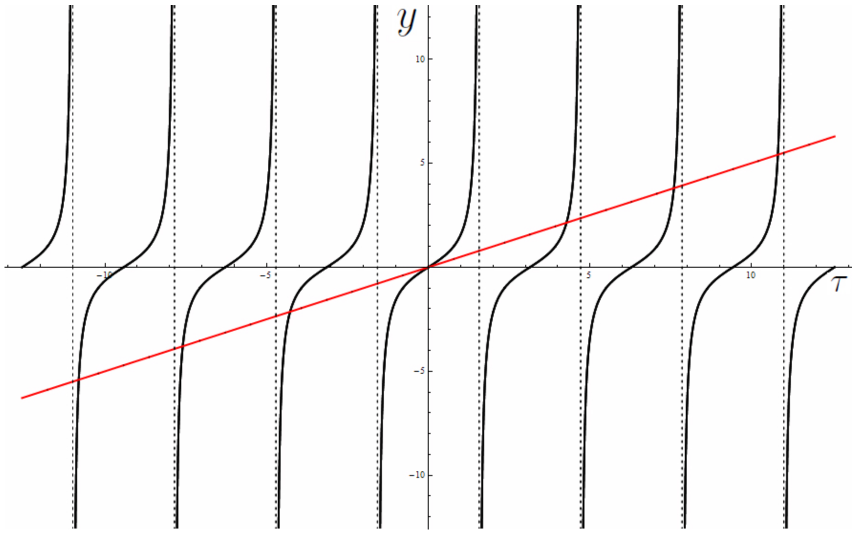


Рис. 24.1. Трансцендентное уравнение на τ имеет бесконечно много положительных корней (на рисунке $l = 1/2$).

Это уравнение имеет бесконечно много корней (корень $\tau = 0$ мы должны исключить, так как рассматривали этот случай выше). Обозначив через τ_k положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\tau = \tau/l$, получим, что исходный оператор имел собственные числа $\lambda_n = -\frac{\tau_n^2}{l^2}$ и собственные функции $e_n(x) = \sin\frac{\tau_n x}{l}$.

Пример 4. $y'' = \lambda y\,,\qquad \begin{matrix} y(0) + y'(0) = 0, \\ y(l) - y'(l) = 0. \end{matrix}$

Рассматриваем $\lambda = 0$, тогда $y = C_1 + C_2 x$. Из краевых условий получим систему уравнений на C_1 и C_2.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + C_2 l - C_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение если $l = 2$, иначе $C_1 = C_2 = 0$. Итак, если $l = 2$, то мы имеем собственное число $\lambda = 0$ и собственную функцию $e_0 = x - 1$. Иначе $\lambda = 0$ не является собственным числом.

Если $\lambda = -a^2,\ a \neq 0$, то

$$y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax$$

и из краевых условий получим систему для определения C_1 и C_2.

$$\begin{cases} C_2 + aC_1 = 0, \\ C_1 \sin al + C_2 \cos al - C_1 a \cos al + C_2 a \sin al = 0. \end{cases}$$

Система имеет нетривиальное решение, если определитель соответствующей матрицы равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ \sin al - a\cos al & \cos al + a \sin al \end{vmatrix} = 0.$$

Мы получаем уравнение для определения параметра a

$$(a^2 - 1)\sin al + 2a \cos al = 0.$$

Вводя параметр $\tau = al$, получим

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{2\tau l}{\tau^2 - l^2}.$$

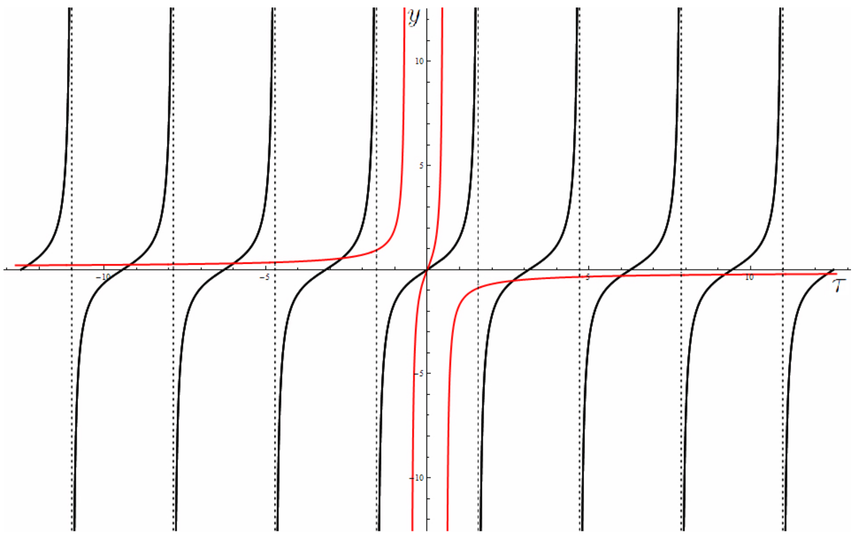


Рис. 24.2. Трансцендентное уравнение на τ имеет бесконечно много положительных корней (на рисунке $l = 1/2$).

Обозначим через τ_n положительные корни этого уравнения. Тогда оператор L имеет собственные числа

$$\lambda_n = -\frac{\tau_n^2}{l^2},\ n = 1, \ldots$$

и собственные функции

$$e_n(x) = \sin\frac{\tau_n}{l}x - \frac{\tau_n}{l}\cos\frac{\tau_n}{l}x.$$

(Мы положили $C_1 = 1,\ C_2 = -a$.)

Анализируя рассмотренные примеры, мы видим, что в каждом случае мы смогли найти бесконечно много собственных чисел и соответствующих им собственных функций. По ходу вычислений (на этапе нахождения собственных чисел) возникают достаточно трудные трансцендентные уравнения. Хотелось бы иметь гарантии, что они действительно имеют решения. Эти гарантии даёт теорема Штурма-Лиувилля:

Оператор L (24.1) имеет всегда бесконечно много собственных чисел и соответствующих им собственных функций. Эти собственные функции ортогональны в скалярном произведении

$$(u, v) = \int\limits_a^b u(x)v(x)dx.$$

Ортогональность собственных функций, полученных в примерах 1 и 2 очевидна, но доказать непосредственно ортогональность функций в примерах 3 и 4 достаточно трудно. И тут на помощь приходит функциональный анализ. Мы знаем общий факт, что любые две собственные функции самосопряжённого оператора, отвечающие различным собственным числам, ортогональны. Вооружившись знанием теоремы Штурма-Лиувилля, рассмотрим ещё один пример.

Пример 5. Найти собственные функции оператора $L[y] = (x^2y')'$, подчинённые краевым условиям $y(1) = 0,\ y'(2) = 0$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$(x^2y')' - \lambda y = 0.$$

Это уравнение Эйлера. Ищем его частное решение в виде $y = x^k$, тогда на параметр k получаем квадратное уравнение

$$k^2 + k - \lambda = 0.$$

Его решения $k_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}$. Далее рассмотрим три случая.

a) $1 + 4\lambda = 0$, тогда $k_1 = k_2 = -1/2$ и $y = C_1 x^{-1/2} + C_2 x^{-1/2} \ln x$. Краевые условия приведут к уравнениям на C_i.

$$\begin{cases} y(1) = C_1 = 0, \\ y'(2) = -\dfrac{1}{2} C_1 2^{-3/2} + C_2 \left(-\dfrac{1}{2} 2^{-3/2} \ln 2 + 2^{-3/2} \right) = 0. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 0,\ C_2 = 0$.

b) Если $1 + 4\lambda > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных вещественных корня. Пусть $k_2 > k_1$ и $y = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_2}$. Краевые условия приведут к

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 k_1 2^{k_1} + C_2 k_2 2^{k_2} = 0. \end{cases}$$

Чтобы эта система имела нетривиальное решение, должно выполняться условие

$$k_1 2^{k_1} = k_2 2^{k_2}\,, \quad k_2 > k_1,$$

что, очевидно, невозможно (так как $\dfrac{k_1}{k_2} \neq 2^{k_2 - k_1}$). Итак, и в этом случае $C_1 = 0,\ C_2 = 0$.

c) Если $1 + 4\lambda < 0$, то обозначив $1 + 4\lambda = -4a^2,\ a \neq 0$, придём к $k_{1,2} = -1/2 \pm ia$, что даст нам

$$y = C_1 x^{-1/2} \sin(a \ln x) + C_2 x^{-1/2} \cos(a \ln x).$$

Краевые условия приведут к системе уравнений

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 \left(-\frac{1}{2} 2^{-3/2} \sin(a \ln 2) + 2^{-3/2} \cos(a \ln 2) a \right) = 0, \end{cases}$$

откуда получаем условие на a.

$$2a \cos(a \ln 2) = \sin(a \ln 2).$$

Обозначив $a \ln 2 = \tau$, приходим к уравнению

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{2\tau}{\ln 2},$$

которое нам уже знакомо. Если τ_n — положительные корни этого уравнения, то собственные числа λ_n имеют вид

$$\lambda_n = -\left(\frac{\tau_n}{\ln 2} \right)^2 - \frac{1}{4}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

а собственные функции суть

$$e_n(x) = x^{-1/2} \sin \left(\frac{\tau_n}{\ln 2} \ln x \right).$$

Рассмотрим теперь задачу об отыскании собственных функций не самосопряжённого оператора

$$L[y] = a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y.$$

Пример 6. Найти собственные функции оператора

$$L[y] = y'' + 2y',$$

удовлетворяющие условиям $y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$.

Решаем уравнение

$$y'' + 2y' = \lambda y.$$

Это — линейное однородное уравнение. Ищем частные решения в виде

$y = e^{kx}$ и приходим к уравнению на k

$$k^2 + 2k - \lambda = 0,$$

откуда $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\lambda + 1}$. Далее опять рассматриваем три случая.

Если $\lambda + 1 = 0$, то есть $\lambda = -1$, то $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. Краевые условия приведут к системе на константы C_1, C_2.

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 e^{-\pi} + C_2 \pi e^{-\pi} = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = C_2 = 0$, то есть $\lambda = -1$ не является собственным числом.

Если $\lambda + 1 = a^2$, $a \neq 0$, то уравнение имеет два различных вещественных корня k_1, k_2. Тогда $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ и краевые условия приводят к системе

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{k_1 \pi} + C_2 e^{k_2 \pi} = 0, \end{cases}$$

которая при $k_1 \neq k_2$ имеет только тривиальное решение.

Если $\lambda + 1 = -a^2$, $a \neq 0$, то $y = C_1 e^{-x} \sin ax + C_2 e^{-x} \cos ax$. Краевые условия приводят к системе

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\pi} \sin a\pi + C_2 e^{-\pi} \cos a\pi = 0, \end{cases}$$

откуда получаем условие

$$\sin a\pi = 0\,, \quad a = n,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Итак, собственные числа $\lambda_n = -1 - n^2$ и собственные функции $e_n = e^{-x} \sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$. Но остаётся открытым вопрос об ортогональности этих функций.

Если оператор L привести к самосопряжённому виду, то мы получим следующее уравнение на собственные функции:

$$(p(x)y')' + q(x)y = \lambda\rho(x)y.$$

Можно показать, что в этом случае собственные функции ортогональны с весом, то есть

$$\int_a^b \rho(x)e_n(x)e_m(x)dx = 0,\ n \neq m.$$

Найдём функцию $\rho(x)$, которая даст нам вес, с которым ортогональны функции в последнем разобранном примере. Имеем

$$\rho(x)(y''+2y') = \rho(x)y''+2\rho(x)y' = (\rho(x)y')'-\rho'(x)y'+2\rho(x)y' = (\rho(x)y')',$$

если $\rho' = 2\rho$, то есть $\rho(x) = e^{2x}$. Таким образом,

$$\int_0^\pi e^{-x}\sin nx \cdot e^{-x}\sin mx \cdot e^{2x}dx = \int_0^\pi \sin nx \cdot \sin mx dx = 0,\ n \neq m.$$

Собственные функции операторов вида (24.1) имеют огромное прикладное значение благодаря тому, что они образуют полную систему функций, точнее имеет место следующая теорема Стеклова.

Если $e_n(x)$ — собственные функции некоторого оператора L

$$L[y] = \frac{d}{dx}p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y,$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{aligned}$$

то любая функция $f(x)$, которая дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет тем же краевым условиям, допускает разложение в равномерно сходящийся ряд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x), \text{ где } c_n=\frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)}=\int\limits_a^b f(x)e_n(x)dx \Bigg/ \int\limits_a^b e_n^2(x)dx\,. \tag{24.3}$$

Если оператор не самосопряжённый, то теорема остаётся справедливой, но скалярное произведение вводится с весом $\rho(x)$.

Боле общая теорема утверждает, что система функций $\{e_n(x)\}$ полна в $L_2[a,b]$, то есть если $f(x)\in L_2[a,b]$, то $f(x)$ допускает представление в виде ряда (24.3), но сходимость этого ряда понимается уже как сходимость по норме в пространстве $L_2[a,b]$. Сформулируем, например, теорему Стеклова для оператора из примера 6.

Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и $f(0)=0$, $f(\pi)=0$, то она может быть представлена равномерно сходящимся рядом

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-x}\sin nx, \text{ где}$$

$$c_n=\int\limits_0^{\pi} f(x)\cdot e^{-x}\sin nx\cdot e^{2x}dx \Bigg/ \int\limits_0^{\pi}(e^{-x}\sin nx)^2\cdot e^{2x}dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{pi} f(x)e^{x}\sin nx dx.$$

Самостоятельная работа

1. Найти собственные функции оператора. Сформулировать теорему Стеклова.

$$L[y]=y''\,,\quad \begin{aligned} &y(0)=0,\\ &y'(1)=0. \end{aligned}$$

2. Найти собственные функции оператора. Сформулировать условие ортогональности. Сформулировать теорему Стеклова.

$$L[y]=x^2y''+xy'\,,\quad \begin{aligned} &y'(1)=0,\\ &y'(l)=0. \end{aligned}$$

Домашняя работа

№№ 782, 783, 784, 785