ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Лектор — Александр Анатольевич Егоров

Программа курса лекций
(2-й семестр, 32 лекции, 32 семинара, экзамен)

5. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Метрические и нормированные пространства. Определение арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, стандартного скалярного произведения и евклидова расстояния в нем. Определение метрики и метрического пространства. Определение нормы и нормированного пространства. Метрика, согласованная с нормой. Примеры нормированных и метрических пространств. Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые шары, сферы. Неравенства Коши — Буняковского и Минковского. Внутренние, внешние, граничные точки. Внутренность, внешность, граница и замыкание множества. Открытые и замкнутые множества, окрестности. Свойства открытых и замкнутых множеств. Критерий замкнутости. Компакты. Связные множества и области. Предел последовательности в $\mathbb{R}^n$. Предел в точке и непрерывность отображений арифметических конечномерных пространств.

Линейные отображения. Определение линейного отображения. Примеры. Матрица линейного отображения.

Дифференцирование функций многих переменных. Определение дифференциала. Определение частной производной и матрицы Якоби. Связь дифференциала с частными производными. Пример недифференцируемых функций с частными производными. Дифференцирование и алгебраические операции. Дифференцировании композиции, цепное правило. Производная по направлению. Градиент функции и его вид в декартовых координатах. Геометрический смысл градиента.

Старшие производные и формула Тейлора. Определение старших частных производных. Перестановочность частных производных. Определение пространства $C^k(\Omega)$. Формула Тейлора. Определение второго дифференциала и матрицы Гессе.

Локальный экстремум. Определение локального экстремума и критической точки. Необходимое условие локального экстремума. Достаточное условие локального экстремума.

Теорема об обратной функции. Разрешимость системы линейных уравнений. Теорема об обратной функции. Теорема о неявной функции. Примеры.

Замена переменных. Диффеоморфизмы. Криволинейные системы координат. Замена переменных в дифференциальных выражениях.

Многообразия в $\mathbb{R}^n$. Определение элементарного гладкого k-мерного многообразия в $\mathbb{R}^n$. Определение гладкого k-мерного многообразия (с краем или без) в $\mathbb{R}^n$. Край и граница. Явный и неявный способы задания многообразия. Примеры. Функции перехода.

Касательное пространство. Определение касательного вектора и пространства к многообразию. Касательное пространство неявно заданного многообразия.

Условный экстремум. Определение условного экстремума. Необходимые условия условного экстремума (принцип множителей Лагранжа). Достаточные условия условного экстремума.

6. Мера и интеграл

Интеграл Римана. Геометрическая интерпретация многомерного интеграла. Определение многомерного интеграла Римана через суммы Дарбу. Определение меры Жордана и множеств измеримых по Жордану. Свойства интеграла Римана (аддитивность, монотонность, интегрируемость непрерывных функций).

Мера Лебега. Определение элементарного множества (объединение n-мерных промежутков) и его стандартной меры. Свойства стандартной меры (аддитивность и счетная аддитивность). Определение внешней меры Лебега. Свойства внешней меры (конечность, субаддитивность). Определение измеримого множества в n-мерном промежутке. Определение меры Лебега на n-мерном промежутке. Определение измеримого множества и меры Лебега в $\mathbb{R}^n$. Свойства измеримых множеств (σ-алгебра). Свойства меры Лебега (счетная аддитивность). Измеримость $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ по Лебегу и неизмеримость по Жордану. Множества меры ноль. Свойства множеств меры ноль, связь со счетностью.

Интеграл Лебега. Определение измеримой функции. Определение «почти всюду». Свойства измеримых функций. Определение простой функции. Определение интеграла от простой функции. Определение интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега. Связь интегралов Римана и Лебега.

Вычисление многомерных интегралов. Определение кратного и повторного интегралов. Теоремы Фубини и Тонелли. Расстановка пределов интегрирования. Формула замены переменной. Геометрический смысл якобиана. Якобианы классических систем координат. Элементы площади и объема в криволинейных координатах. Интегрирование степенных особенностей. Доказательство формулы связи между эйлеровыми интегралами. Интегралы Френеля.

Интегралы, зависящие от параметра (ИЗОП). Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Непрерывность и дифференцируемость ИЗОП. Гладкость гамма-функции. Вычисление интеграла дифференцированием и интегрированием по параметру. Доказательство формулы дифференцирования ИЗОП с переменными пределами. Интеграл Дирихле. Потенциал простого слоя. Оператор дробного интегрирования.

7. Интеграл, векторные поля и дифференциальные формы на многообразиях в $\mathbb{R}^n$

Интеграл 1-го рода по многообразию. Определение интеграла по k-мерному многообразию. Длина кривой и элемент длины в различных системах координат. Площадь поверхности и элемент площади в различных системах координат. Независимость интеграла от параметризации.

Ориентация. Определение ориентации векторного пространства. Определение ориентации на многообразии. Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Лист Мёбиуса. Определение внешней нормали. Определение индуцированной ориентации края. Определение внешней нормали к $(n-1)$-мерному многообразию. Ориентация $(n-1)$-мерного многообразия при помощи нормали. Выражение внешней нормали через параметризацию.

Классические интегральные формулы. Формулы Грина, Гаусса — Остроградского, Стокса.

Элементы векторного анализа. Градиент, ротор, дивергенция и лапласиан в декартовых координатах. Оператора Гамильтона (набла). Работа поля вдоль кривой и циркуляция поля. Поток векторного поля через поверхность. Формула Гаусса — Остроградского в терминах дивергенции и потока. Формула Стокса в терминах ротора, потока и циркуляции. Физический смысл ротора и дивергенции. Потенциальное и безвихревое векторное поле. Условие потенциальности поля. Соленоидальное и бездивергентное векторное поле. Условие соленоидальности поля. Электростатическое поле точечного заряда. Магнитное поле элементарного тока. Приложения (уравнение теплопроводности, закон Кулона, теорема Гаусса, закон Био — Савара, сила Лоренца, закон Ампера).

Замена переменных в векторных дифференциальных выражениях. Правило для преобразования производных при замене. Правило для перехода от одного базиса касательного пространства к другому. Правило для преобразования координат векторов. Запись grad в полярной системе координат. Коэффициенты Ламе. Запись grad, rot и div в ортогональных координатах.

Дифференциальные формы. Определение внешней дифференциальной формы. Базис в пространстве 1-форм. Внешнее произведение 1-форм. Базис в пространстве форм. Соответствие между формами и полями (форма работы, форма потока, форма объема). Определение интеграла (2-рода) от формы по многообразию. Соответствия между интегралом от формы работы и работой поля, между интегралом от формы потока и потоком поля. Определение дифференциала формы. Связь дифференциала форм с векторными операциями. Обобщенная формула Стокса. Классические интегральные формулы как следствия обобщенной формулы Стокса.

Литература

Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Медведев Г. Н., Шишкин А. А. Математический анализ в вопросах и задачах.
Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.
Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих и её приложения к физике.
Зельдович Я. Б., Яглом И. М. Высшая математика для начинающих физиков и техников.
Зорич В. А. Математический анализ.
Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа.
Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа.
Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу.
Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления.
Смирнов В. И. Курс высшей математики.
Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.
Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа.

План семинаров

1-ый семинар: Линии уровня. Двойной и повторный пределы. Непрерывность.
2-ой семинар: Частные производные и дифференциал.
3-ый семинар: Цепное правило. Дифференцирование сложных функций. Формула Тейлора.
4-ый семинар: Градиент, производная по направлению, локальные экстремумы.
5-ый семинар: Дифференцирование неявных функций.
6-7-ой семинары: Замена переменных в дифференциальных выражениях
8-ой семинар: Гладкие многообразия. Касательное пространство.
9-10-ый семинар: Условный экстремум. Множители Лагранжа. Метод исключения дифференциалов.
11-ый семинар: Двойные и повторные интегралы.
12-ый семинар: Замена переменных в двойных интегралах. Полярная замена.
13-ый семинар: Тройные и повторные интегралы.
14-ый семинар: Замена переменных в тройных интегралах. Цилиндрическая и сферическая замены.
15-ый семинар: Несобственные двойные и тройные интегралы.
16-ый семинар: Интегралы, зависящие от параметра.
17-19-ый семинары: Криволинейные и поверхностные интегралы 1-го рода.
20-ый семинар: Операции векторного анализа
21-23-ый семинары: Работа и циркуляция векторного поля. Формула Грина и Стокса. Вычисление площади через формулу Грина.
24-25-ый семинары: Поток векторного поля. Формула Гаусса–Остроградского. Вычисление объема через формулу Гаусса–Остроградского.
26-ый семинар: Дифференциальные формы и их связь с векторными полями
27-ый семинар: Потенциальные векторные поля
28-ый семинар: Соленоидальные векторные поля.
29-ый семинар: Ортогональные криволинейные координаты.
Оставшееся время 3 семинаров распределяются на проведение проверочных работ и повторное изучение наиболее трудных тем.

Задания по основам математического анализа

2-й семестр

Задание 5 (сдать до 15 марта)

1. [5 баллов] Нарисовать линии уровня функции $f(x,y) = \frac{2}{x} - \frac{3}{y}$ на ее области определения.
2. [7 баллов] Найти частные производные, матрицу Якоби и дифференциал отображения $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, заданного формулой

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y + y\sin(z+x) - ze^y \\ -yx + 2\cos(z - xy) + \frac{y}{1+z} \end{pmatrix}$$

в точке $(0,1,1)$.
3. [5 баллов] Проверить, что функция $u(x,y) = \varphi(x + \psi(y))$, где φ, ψ — дифференцируемые функции, удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

4. [6 баллов] Оператора Лапласа Δ переводит каждую дважды гладкую функцию $u(x,y,z)$ в новую функцию

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Выяснить, как действует оператор Лапласа на сферически симметричные функции, т. е. функции вида $u = f(r)$, где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Найти все сферически симметричные функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.
5. [5 баллов] Разложить по формуле Тейлора до второго порядка в окрестности точки $(-1,0)$ функцию

$$f(x,y) = e^{\frac{1+x}{1+y}}.$$

6. [5 баллов] Найти точки локального экстремума функции

$$z = x^3 + 2xy - y^2 + x - y.$$

7. [5 баллов] Непрерывная функция $z = z(x,y)$ удовлетворяет условию

$$x^2 - y^2 + 2z^2 + xy - zy = 0$$

и условию $z(0,1) = 1$. Доказать, что в некоторой окрестности точки $(0,1)$ она бесконечно дифференцируема, а в самой точке найти dz и d^2z.

8. [5 баллов] Преобразовать к полярным координатам r и φ дифференциальное выражение

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

где $u = u(x, y), v = v(x, y)$.

9. [7 баллов] Показать, что уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

не изменяет своего вида при замене переменных

$$\tilde{x} = \frac{x}{y},\ \tilde{y} = -\frac{1}{y},\ u = \frac{\tilde{u}}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

где $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y})$.

10. [5 баллов] Найти и исследовать точки условного экстремума функции $x + 4y - 2z$, если ее переменные связаны соотношениями:

$$x^3 + 64y^3 + 8z^3 + 12x + 48y + 2z = 26, \quad x + 4y = 2.$$

11. [5 баллов] Доказать, что функция $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 2y$ достигает наибольшего и наименьшего значения на множестве точек плоскости, удовлетворяющих условию $2x^2 + 5y^2 \le 2xy + 25$, и найти эти значения.

Задание 6 (сдать до 15 апреля)

1. [5 баллов] Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int\limits_0^{4/5} dx \int\limits_{4(x-1/2)^2}^{1-x^2} f(x, y)\, dy.$$

2. [5 баллов] Указать область, в которую переходит треугольник $0 < x < 1$, $0 < y < 1 - x$, при замене переменных $x + y = u$, $y = uv$. С помощью координатных линий описать, как действует это преобразование. Выразить двойной интеграл по треугольнику от произвольной функции в координатах u и v.

3. [8 баллов] Изменить порядок интегрирования в тройном интеграле (всего 6 способов)

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x^2} dz \int\limits_0^{1-x} f(x, y, z)\, dy.$$

4. [6 баллов] Определить число витков (полных оборотов угла) спирали Архимеда $r = \frac{\varphi}{\pi\sqrt{2}}$, чтобы площадь, ограничиваемая последним витком этой спирали и осью OX, была не менее 2019.

5. [6 баллов] Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1, \quad z = \frac{x^2}{4} + y^2.$$

6. [10 баллов] По шару радиуса R распределена масса M с плотностью $\rho(x, y, z)$. Найти момент инерции шара относительно диаметра, если плотность в точке (а) пропорциональна, (б) обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до центра шара.

7. [5 баллов] Исследовать на сходимость двойной интеграл

$$\iint\limits_{\substack{x^5+4y^2\geq 1\\ x\geq 0, y\geq 0}} \frac{dxdy}{x^5 + 4y^2}.$$

8. [6 баллов] Ньютоновым потенциалом тела в точке (x, y, z) называется интеграл

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_V \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}},$$

где ρ — плотность тела, а V — занимаемая им область пространства. Доказать, что вне этой области u бесконечно дифференцируема; ее первые производные с точностью до постоянной равны компонентам силы, с которой тело притягивает материальную точку единичной массы с координатами x, y, z; а сумма вторых производных равна нулю, т. е. u — гармоническая функция.

Задание 7 (сдать до 30 мая)

1. [5 баллов] Найти центр масс контура сферического треугольника $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

2. [5 баллов] Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода $\iint_S \frac{x|y|dS}{\sqrt{5+4z}}$, где S — это "лента" , высекаемая из параболоида $z = x^2 + y^2 - 1$ двумя плоскостями $x + z = 1$ и $x + z = 3$.

3. [5 баллов] Найти работу векторного поля $F = (xz, y, z - 1)$ вдоль контура, задаваемого условиями: $z = 1 - x^2 - y^2, z - x = 1, y \geq 0$, и ориентированного направлением от точки $(0, 0, 1)$ к точке $(-1, 0, 0)$.

4. [5 баллов] Найти поток векторного поля $F = (ye^z, 2x, x)$ через прямоугольную площадку $ABCD$ с вершинами

$$A(3, 0, 1), B(-2, 0, 1), C(-2, 2, 0), D(3, 2, 0).$$

Ориентация площадки задается обходом края: $A \to B \to C \to D$.

5. [15 баллов] Доказать тождества

(а) $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$,

(б) $\operatorname{div}(uA) = u \operatorname{div} A + A \cdot \operatorname{grad} u$,

(в) $\operatorname{rot}(uA) = u \operatorname{rot} A - A \times \operatorname{grad} u$,

(г) $\operatorname{div}(A \times B) = B \cdot \operatorname{rot} A - A \cdot \operatorname{rot} B$,

где u и v — скалярные поля, а A и B — векторные.
6. [30 баллов] Выяснить, какие из перечисленных ниже векторных полей потенциальны, а какие — соленоидальны (и найти потенциалы):

(а) $(2xy+z)\mathbf{i}+(x^2-2y)\mathbf{j}+x\mathbf{k}$,
(б) $3y^2\mathbf{i}-3x^2\mathbf{j}-(y^2+2x)\mathbf{k}$,
(в) $z\mathbf{e}_\varphi-\cos\varphi\mathbf{e}_z/\rho$,
(г) $e^\rho\sin\varphi\mathbf{e}_\rho+e^\rho\cos\varphi\mathbf{e}_\varphi/\rho+2z\mathbf{e}_z$,
(д) $2r\mathbf{e}_r+\mathbf{e}_\theta/r+\mathbf{e}_\varphi/(r\sin\theta)$,
(е) $-\varphi\operatorname{ctg}\theta\mathbf{e}_r/r+\varphi\mathbf{e}_\theta/r+2\cos\theta\mathbf{e}_\varphi/r$.

7. [5 баллов] С помощью формулы Стокса найти циркуляцию векторного поля

$$F=\frac{1}{3x^2+y^2+z^2}\mathbf{i}+(y+x)\mathbf{j}+\sin z\mathbf{k}$$

вдоль окружности: $x^2+y^2=1, z=0$, ориентированной против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0,0,1)$.
8. [5 баллов] С помощью формулы Гаусса — Остроградского найти поток поля

$$x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$$

через внешнюю сторону симплекса, построенного по трем базисным векторам, которые приложены к началу координат.
9. [15 баллов] Посчитать циркуляцию вдоль границы плоской области: радиус-вектора $\mathbf{r}$ и поля $\mathbf{r}/r^2$. Для тех же векторных полей найдите их потоки через границу области. Для последнего из указанных полей разберите случаи, когда начало координат лежит вне области, внутри нее и на границе.
10. [6 баллов] Посчитать интегралы второго рода

$$\int\limits_{C_\pm}(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz,$$

где $C_\pm$ — окружности, по которым единичная сфера с центром у нуле пересекается вертикальными плоскостями $y=\pm x$ и которые пробегаются против часовой стрелки, если наблюдать за этим со стороны положительной полуоси абсцисс.
11. [5 баллов] Найти интеграл от дифференциальной формы

$$\int\limits_S zx\,dy\wedge dz+xy\,dz\wedge dx+yz\,dx\wedge dy,$$

где S — внешняя сторона части цилиндра $x^2+y^2=r^2$, $x\le 0$, $y\ge 0$, $0\le z\le H$.

Система оценивания по курсу «Основы математического анализа»

Итоговая оценка ставится по количеству набранных баллов за практическую часть и теоретическую часть. Практика состоит из работы на семинарах, решении ежемесячных заданий и потоковых работ. Теоретическая часть сдается на экзамене. В процентном соотношении максимальное возможное количество баллов за практику и за теорию составляет примерно 60% и 40% соответственно.

Работа на семинарах (оценивается каждым семинаристом индивидуально, мах 100 баллов).

Ежемесячные задания (5 задание содержит 11 задач, 6 задание — 8 задач, 7 задание — 11 задач, всего 30 задач, мах 212 баллов).

Потоковые работы (3 потоковых с 5+5+5=15 задач по 30 баллов за задачу, мах 450 баллов).

Теоретический экзамен (Пояснения даны ниже, мах 530 баллов).

К экзамену необходимо сдать в срок не менее половины каждого ежемесечного задания и набрать на потоковых контрольных не менее 90 баллов. Пока эти условия не выполнены студент не начинает сдавать теоретическую часть.

Экзаменационный билет состоит из трех частей:

1. Определения базовых понятий, формулировки базовых формул и базовых утверждений (4 базовых определения или факта).

2. Формулировки утверждений (теорем, лемм и т.п.) с определениями понятий, входящих в формулировки (2 утверждения).

3. Доказательство теоремы (при очной форме сдачи экзамена) или решение упражнения (при дистанционной форме сдачи экзамена) (1 доказательство или решение упражнения).

Студент отправляется на пересдачу, если он не ответил на первую часть билета, т.е. не знает хотя бы одного базового понятия, формулы или утверждения (базовые понятия, формулы и утверждения будут отмечены в списке вопросов к экзамену).

Баллы по каждой части билета следующие: Определения – 120 баллов, формулировки теорем – 160 баллов, доказательство – 250 баллов.

Итоговая оценка: «5» $\geq$ 1130 баллов «4» $\geq$ 820 балов «3» $\geq$ 400 баллов

Программу и задания
по основам математического анализа
составили доцент А. А. Егоров и доцент И. В. Подвигин