

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Курс лекций для ММФ

А.А. Васильев, А. П. Ершов

1 семестр

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

2. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

20 августа 2006 г.

Глава 2

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

В течение XIX века было осознано (Фарадей, Максвелл, Герц и др.), что кроме вещества (того, что делится на атомы), есть в природе и другие сущности – **поля**, из которых предметом электродинамики являются **электрическое** и **магнитное** поле.

«На глаз» нельзя отличить провода «под током» и отключенные, что и приводит к электрическим поражениям. Но это не значит, что наши органы чувств не реагируют на поля. Электрическое поле мы прекрасно чувствуем: если оно присутствует в организме (одновременно идет ток), то непроизвольно сокращаются мышцы и возникают непривычные ощущения, памятные каждому, кто хоть раз хватался за провода. Менее сильное поле (от батарейки) ощущается на вкус. Связаны эти эффекты с тем, что управляющие сигналы в организме, в нервах и пр. – электрические. Магнитное поле человек не замечает: попробуйте отличить магнит и простой кусок железа, не прибегая к таким индикаторам, как гвозди. Однако некоторые птицы как будто ориентируются по довольно слабому земному магнитному полю. С другой стороны, свет – это чистое электромагнитное поле, больше в нем ничего нет, а именно свет мы только и видим. И вообще все наши ощущения на микроуровне формируются именно полями, в основном электрическое поле действует как передаточный ремень.

Видно, что восприятие полей какое-то косвенное, оно резко отличается от восприятия грубо материальных предметов. Потому-то понятие поля возникло достаточно поздно, приблизительно с работ Фарадея (первая треть XIX века). Если теплота как-то свелась к механике, правда не всегда обычной, то электродинамика – вещь принципиально не механическая. Хотя электромагнитное поле имеет энергию и импульс, может воздействовать на «обычные»¹ макроскопические предметы с некоторой силой, но это воздействие никак не главное, а сами поля не имеют ничего общего с основой ньютоновской механики – материальными точками. Это гораздо более тонкие вещи. Напротив, на микроскопическом уровне все вещество пронизано и «скреплено» полями: в атомах в основном электрическое поле не дает электронам разбежаться.

¹То есть не несущие заметного электрического заряда, см. п. 2.1.

2.1 Закон Кулона. Электрическое поле заряда. Принцип суперпозиции

Притяжение/отталкивание «наэлектризованных» тел известно с древности. В 1785 г. Кулон установил закон взаимодействия

$$F = \frac{q_1 q_2}{R^2}, \quad (2.1)$$

похожий на закон тяготения. Разница с тяготением в том, что **заряд** q может быть положительным и отрицательным: $(+,+)$ и $(-,-)$ отталкиваются, а $(+,-)$ притягиваются.

Из (2.1) размерность q : (сила)^{1/2} · длина. Заряд 1 (г)^{1/2} · (см)^{3/2}/сек взаимодействует с таким же зарядом на расстоянии 1 см с силой в 1 дину. Кратко его называют единицей заряда СГС, или 1 CGS(Q).

В системе СИ вводится единица заряда – кулон (Кл); 1 Кл = 3 · 10⁹ CGS(Q). Обратим внимание, что отличается не только единица заряда, но и форма записи закона:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{R^2} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{R^2}. \quad (2.2)$$

Электрическая постоянная ϵ_0 (она же диэлектрическая проницаемость вакуума) равна 8,854 · 10⁻¹² Кл²сек²/(кг · м³), так что коэффициент k в (2.2) равен 9 · 10⁹. Сила взаимодействия зарядов в 1 Кл на расстоянии 1 км будет 9 · 10³ Н, или 900 кГ. Часто полезность системы СИ видят в том, что в ней единицы «бытовой» величины. Видно, что кулон как единица нескомпенсированного заряда не подходит под это правило. В природе заряды порядка сотен кулон возникают в грозовых облаках. Заметим, что не только кулон гораздо больше единицы заряда СГС, но у него и размерность другая. Строго говоря, основная единица в СИ – ампер² (А), 1 Кл = (1 А) · (1 секунду).

Существует элементарный заряд $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ СГС = 1,6 · 10⁻¹⁹ Кл. Заряд электрона равен $-e$, протона $+e$. Любой заряд в природе «набирается» из таких единиц. Поскольку элементарный заряд мал, мы обычно не замечаем дробности заряда (так же как и дробности вещества), но достаточно чувствительные приборы реагируют на отдельный электрон.

Сейчас известно, что многие элементарные частицы (**адроны**) состоят из так называемых **кварков**, имеющих дробные заряды, конкретно $\pm e/3$ и $\pm 2e/3$. Но кварки живут не в свободном виде, а тройками (**барионы**, например протон и нейтрон) либо парами кварк-антикварк (**мезоны**, например π -мезон), так что заряд наблюдаемой частицы всегда получается целый³. Есть еще **лептоны** (электрон), которые кварков не содержат; их заряд целый без всяких усложнений.

²Ампер определяется как величина тока, который, проходя по двум тонким параллельным прямым проводникам, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывает между этими проводниками силу, равную 2 · 10⁻⁷ Н на каждый метр длины.

³Найдены более редкие четырех- и пятикварковые частицы, также имеющие в сумме целый заряд.

Заряд **сохраняется**. Сохранение заряда просто понять, учитывая его дробность: это означает, что электрон не может возникнуть из ничего или исчезнуть без следа. Однако возможно парное рождение в одной точке частиц с противоположными зарядами, например, электрона и позитрона из двух фотонов, либо обратный процесс – аннигиляция. Если в каком-то объеме изменился заряд, то он или прибыл извне (через границу), или удалился; и то и другое – в результате движения заряженных частиц.

В атомах электроны притягиваются к протонам. Атомы, молекулы, вирусы, медведи и т.п. сдерживаются вместе электрическими силами. В основном наш мир – электрическая система.

Электрическая сила между двумя протонами больше гравитационной в $e^2/(Gm_p^2) \approx 10^{36}$ раз (здесь m_p – масса протона, G – постоянная всемирного тяготения). Отсюда следует, что заряды электрона и протона близки с очень хорошей точностью (по современным представлениям, точно равны). Иначе в сколько-нибудь заметном куске вещества заряды компенсировались бы не совсем, и гравитационное притяжение планет могло бы «забываться» электрическим взаимодействием.

Правильнее считать, что не заряды взаимодействуют непосредственно, а каждый из них создает в пространстве **электрическое поле**. Это поле и действует на второй заряд. По определению, если на неподвижный пробный⁴ заряд q в некоторой области пространства действует сила, пропорциональная q и зависящая, вообще говоря, от времени и координат,

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E}, \quad (2.3)$$

то в этой области имеется электрическое поле напряженности $\mathbf{E}$. Чаше говорится короче: электрическое поле равно $\mathbf{E}$. Можно сказать, что $\mathbf{E}$ – это сила, действующая на единичный заряд. Поле может быть однородным (не зависеть от координат в некоторой конечной области), статическим (не зависеть от времени), но в общем случае $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. В этой главе мы рассматриваем простейший случай – **электростатические**, то есть не зависящие от времени, электрические поля. Строго говоря, это значит, что заряды должны быть неподвижны. На практике, однако, допустимы движения со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света (примерно такое же приближение представляет собой ньютоновская механика).

Поскольку заряд – явный скаляр, поле $\mathbf{E}$ – вектор. Из (2.2, 2.3) следует, что напряженность поля, созданного зарядом Q в точке, куда «смотрит» радиус-вектор $\mathbf{r}$, проведенный из этого заряда,

$$E = \frac{Q}{r^2}, \quad \mathbf{E} = \frac{Q \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.4)$$

Закон Кулона напоминает закон тяготения; аналогом электрического поля в гравитации является ускорение силы тяжести $\mathbf{g}$ (сила на единичную массу). Казалось бы, нет

⁴Пробным называют заряд, достаточно малый, чтобы не влиять на рассматриваемое поле.

разницы между набором уравнений (2.3), (2.4) и одним (2.1). И ее действительно нет в рамках электростатики. Позже (в главе 6) мы увидим, что поле может существовать совершенно отдельно от зарядов и поэтому является не лишним неизвестным, а реальным фактором. Например, при смещении одного из зарядов сила меняется не сразу, как можно ожидать из (2.1) (это называлось бы **дальнодействие**), а с некоторой задержкой. Сначала изменится поле в непосредственной близости от смещаемого заряда, а потом область этих изменений расширяется. Когда она «зацепит» второй заряд, изменится и сила (**близкодействие**). Мы установим, что изменения поля распространяются со скоростью света. Можно представлять себе поле как некие «резинки», через которые взаимодействуют заряды.

Принцип суперпозиции установлен на опыте и означает, что поля от нескольких зарядов складываются:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i = \sum \frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3}. \quad (2.5)$$

В электростатике электрическое поле создается зарядами и только ими (это также опытный факт). Любое электростатическое поле можно представить как сумму полей от некоторых зарядов. Говорят, что заряды – **источники** поля.

Примеры.

Кольцо радиуса R с зарядом q ; на расстоянии z от центра на оси кольца:

$E = qz/(R^2 + z^2)^{3/2}$, направление – вдоль оси кольца.

Нить с зарядом λ на единицу длины: поле направлено «от нити». Разделив нить на элементы длины dx , заряды которых λdx , суммируем проекции полей на поперечное к нити направление:

$$dE = \frac{\lambda \cdot dx}{(r^2 + x^2)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} \Rightarrow E = \lambda r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2\lambda}{r}.$$

Плоскость с зарядом σ на единицу площади: режем на кольца площади $dS = 2\pi R dR$.

Поле направлено по нормали и равно

$$dE = \frac{\sigma \cdot dS}{R^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \Rightarrow E = 2\pi\sigma z \int_0^{\infty} \frac{R dR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi\sigma$$

независимо от расстояния z до плоскости. Для оценки можно считать, что поле создает кусок плоскости размером z , скажем круг такого радиуса. Его заряд $\pi z^2 \sigma$, расстояние до точки наблюдения порядка z , и поле должно быть порядка $\pi z^2 \sigma / z^2 \sim \pi \sigma$. Получилась ошибка в два раза, чего и следует ожидать от оценки. Остальная часть плоскости имеет бесконечный заряд, но поля от удаленных участков направлены почти вдоль плоскости, поэтому их вклад невелик.

Важный случай – поле равномерно заряженной сферы. Эту задачу решил еще Ньютон (в гравитационном варианте). Легко показать, что внутри сферы поле равно нулю.

На рис. 2.1 показаны два узких конуса с вершинами в произвольной точке наблюдения A , которые опираются на два противоположных малых участка поверхности. Площади этих участков dS_1 и dS_2 относятся как квадраты расстояний r_1 и r_2 (обратите внимание на подобие узеньких треугольников). Поля от участков dS_1 и dS_2 в точке A направлены вдоль отрезков r_1 и r_2 , и результат их сложения можно записать как

$$\sigma \left(\frac{dS_1}{r_1^2} - \frac{dS_2}{r_2^2} \right) = 0.$$

Отсюда нулевым будет и суммарное поле сферы, так как ее поверхность исчерпывается такими малыми участками.

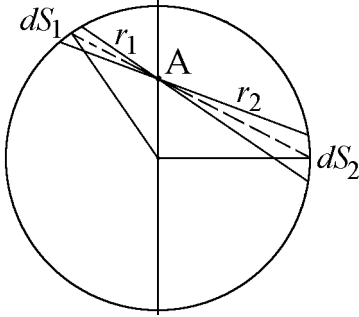


Рис. 2.1.

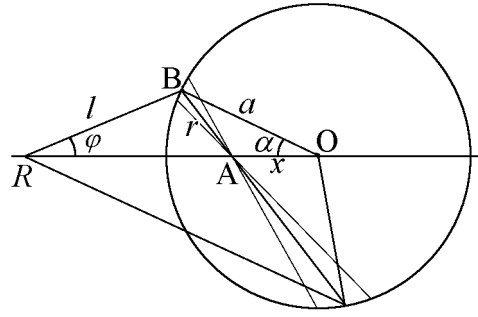


Рис. 2.2.

Более сложно найти поле снаружи сферы. Решение Ньютона – пример математического изящества. Приведем его в современных обозначениях. На рис. 2.2 на расстоянии R от центра сферы радиуса a расположена точка наблюдения (обозначенная также R). Внутри сферы имеется так называемая сопряженная точка A , на расстоянии $x = a^2/R$ от центра. Проведем через точку A прямую, пересекающую сферу в двух точках (верхняя обозначена B). Прямая будет осью двух узких конусов, с телесным углом $d\Omega$, вырезающих на сфере два участка поверхности. Треугольники AOB и BRO подобны, так как угол α у них общий, а отношения соответственных сторон равны: $x/a = a/R$. Тогда и отношение $r/l = a/R$, а угол OBA равен φ – углу BRO . Заряд верхнего участка $q_B = \sigma dS_B = \sigma r^2 d\Omega / \cos \varphi$, поскольку $r^2 d\Omega$ – элемент поверхности, перпендикулярной радиусу r ; деление на косинус учитывает наклон поверхности сферы к оси конуса. Поле в точке наблюдения из симметрии направлено горизонтально:

$$dE = \frac{q_B}{l^2} \cos \varphi = \frac{\sigma r^2 d\Omega}{l^2 \cos \varphi} \cos \varphi = \frac{\sigma a^2 d\Omega}{R^2}.$$

Теперь суммируется очень просто: полный телесный угол равен 4π , а $4\pi a^2 \sigma$ есть заряд сферы Q . Отсюда

$$E = \frac{Q}{R^2}.$$

Снаружи сфера действует, как будто весь заряд расположен в ее центре. Отсюда следует, что любое сферически симметричное распределение заряда создает снаружи такое же поле, как суммарный точечный заряд.

2.2 Потенциал. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

При движении пробного заряда в электростатическом поле изменяется его потенциальная энергия U . Поскольку электрическая сила – вторичное понятие, а основное – электрическое поле $\mathbf{E}$, или сила на единичный заряд, то в электростатике важна потенциальная энергия единичного заряда – **потенциал** φ . Для пробного заряда q по определению $U = q\varphi$.

В силовом поле изменение потенциальной энергии при смещении на малый вектор $d\mathbf{r}$ равно $dU = -(\mathbf{F}d\mathbf{r})$, откуда

$$d\varphi = -(\mathbf{E}d\mathbf{r}). \quad (2.6)$$

Для конечного перемещения из точки 1 до точки 2

$$\varphi(2) - \varphi(1) = - \int_L (\mathbf{E}d\mathbf{L}), \quad (2.7)$$

где L обозначает любой путь, соединяющий точки 1 и 2, а $d\mathbf{L}$ – векторный элемент длины этого пути. Такое выражение имеет определенное значение, если интеграл зависит от начальной и конечной точек, а не от пути между ними (**условие потенциальности**). Другая формулировка этого условия:

$$\oint (\mathbf{E}d\mathbf{L}) = 0, \quad (2.8)$$

причем (2.8) должно выполняться для любого замкнутого контура. В этом случае существует однозначно определенный потенциал.

Из (2.6) следует, что при известном потенциале проекция электрического поля на данное направление $d\mathbf{l}$ есть

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}, \quad (2.9)$$

где изменение потенциала $d\varphi$ берется вдоль $d\mathbf{l}$. В частности, проекции на декартовы оси

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Короче то же самое записывается в виде

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \equiv -\text{grad}\varphi = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \quad (2.10)$$

Здесь $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – единичные векторы по осям, ∇ и grad – различные обозначения **дифференциального оператора градиента**:

$$\nabla \equiv \text{grad} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Если нежелательно пользоваться координатами, то можно сказать, что градиент – это вектор, направленный в сторону быстройшего изменения потенциала и равный производной потенциала вдоль этого направления.

В силу (2.10) подынтегральные выражения в (2.7,2.8) пишутся в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

то есть в предположении существования потенциала представляют собой полный дифференциал, что и нужно для независимости от пути.

Пока ниоткуда не следовало, что потенциал – функция, которая обращает (2.10) в тождество – существует. В общем случае, для произвольного поля $\mathbf{E}$, это и неверно. Но в **электростатике** потенциал существует и даже (при известном расположении зарядов) выписывается явно. Именно, точечный заряд q на расстоянии r создает потенциал

$$\varphi = \frac{q}{r}. \quad (2.11)$$

Действительно,

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -q \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\partial x} = qx(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = \frac{qx}{r^3}.$$

Остальные компоненты отличаются тем, что x заменяется на y или z . Вектор поля

$$\mathbf{E} = q \left(\frac{\mathbf{i}x}{r^3} + \frac{\mathbf{j}y}{r^3} + \frac{\mathbf{k}z}{r^3} \right) = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}$$

в полном соответствии с (2.4). В силу принципа суперпозиции поле любого числа зарядов есть сумма элементарных полей вида (2.4), но тогда и потенциал суммарного поля можно найти как сумму элементарных потенциалов:

$$\varphi = \sum \varphi_i = \sum \frac{q_i}{r_i}. \quad (2.12)$$

Потенциальность поля точечного заряда легко установить и прямым интегрированием. Подставляя (2.4) в (2.7), можно заметить, что поперечные радиусу перемещения не дают вклада в интеграл, и его можно свести к интегралу вдоль радиуса. Для определенности выбираем $\varphi(\infty) = 0$ и получаем, с согласия с (2.11):

$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r \frac{qdr}{r^2} = \frac{q}{r}.$$

Как и потенциальная энергия в механике, потенциал определен с точностью до постоянной: выражение $\varphi = q/r + 2006$ даст точно такое же поле. Другими словами, существует свобода выбора «нуля потенциала» – точки, где $\varphi = 0$. В некоторых задачах нуль потенциала фиксируется из соображений удобства, но часто имеется естественный

выбор. Для точечного заряда не только удобно, но и естественно полагать потенциал равным нулю на бесконечности.

Отметим, что «на заряде» $\varphi = \infty$; реально заряд либо имеет размер, либо (на очень малых расстояниях) нарушается классическая электродинамика, то есть излагаемая теория; то же касается поля $\mathbf{E}$.

Из (2.10) видна выгода использования потенциала – в одной функции содержится та же информация об электрическом поле, как в трех функциях – компонентах напряженности поля. Правда, эта информация присутствует в «свернутом» виде: чтобы ее извлечь, надо вычислить три производных. Далее мы увидим, что потенциал полезен не только для сокращения, но и сам по себе, как физическая величина. Складывать же потенциалы по принципу суперпозиции (2.12) проще, чем поля, поскольку φ – скаляр. На оси кольца (пример 1 из п. 2.1) $\varphi = \sum \Delta q / \sqrt{R^2 + z^2} = q / \sqrt{R^2 + z^2}$. Проверим: $E_z = -\partial\varphi/\partial z = qz/(R^2 + z^2)^{3/2}$, как уже получалось выше.

Сложнее ситуация с потенциалом заряженной нити (пример 2 из п. 2.1):

$$\varphi = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{1/2}} = 2\lambda \int_0^{\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{1/2}} = 2\lambda \ln \left(\sqrt{x^2 + r^2} + x \right) \Big|_0^{\infty}.$$

Формально подставляя пределы, получим бесконечность (интеграл расходится). Но в природе бесконечных заряженных нитей не бывает. Пусть длина нити $2L$ велика, но конечна. Заменим предел с ∞ на L :

$$\varphi = 2\lambda \ln \left(\sqrt{x^2 + r^2} + x \right) \Big|_0^L = 2\lambda \ln \left(\frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{r} \right).$$

Потенциал обращается в бесконечность при $r = 0$ и $L = \infty$. Первая расходимость – это по существу бесконечность на точечном заряде, ослабленная размазанностью линейного распределения. Вторая вызвана бесконечной длиной нити и для реальных задач несущественна. Полученным выражением уже можно пользоваться, в частности, дифференцировать его:

$$E = -2\lambda \frac{d}{dr} \ln \left(\frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{r} \right) = \frac{2\lambda L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \cdot \frac{1}{r}.$$

При $L \rightarrow \infty$ получаем $E = 2\lambda/r$, как и при прямом суммировании полей. Можно также (при $r \ll L$) записывать потенциал в виде $\varphi = 2\lambda \ln(r_0/r)$, при любом значении радиуса фиксации нуля потенциала r_0 . Это как раз случай, когда «естественный» нуль потенциала (расстояния, значительно большие длины нити) не очень удобен.

Силовые линии и эквипотенциальные поверхности – это геометрические образы, нужные для наглядного изображения поля. От точечного заряда q проведем прямые лучи на ∞ . Это и будут **силовые линии** в простейшем случае (рис. 2.3). Полезно запомнить нехитрые правила: направление силовых линий совпадает с направлением

поля в каждой точке, а **густота** отображает величину поля. Густотой назовем число силовых линий, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную им, или отношение $\Delta N/\Delta S$. Убедитесь, что при таком определении для точечного заряда q силовые линии нигде не прерываются и не возникают (кроме как на самом заряде). Очевидно, силовые линии в общем случае не могут пересекаться (позднее это уточним).

Для двух зарядов разного знака и равной величины силовые линии выходят из «+» и входят в «−» (рис. 2.4). Число линий должно быть пропорционально величине заряда. При рисовании полезно следить сначала за картиной вблизи зарядов, затем на бесконечности, и наконец совместить изображения на средних расстояниях. Заряды одного знака из ∞ напоминают суммарный заряд, так что все силовые линии уходят на бесконечность (рис. 2.5). Опять видно, хотя пока не доказано, что силовые линии начинаются и кончаются только на зарядах.

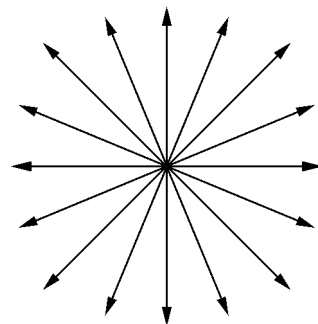


Рис. 2.3.

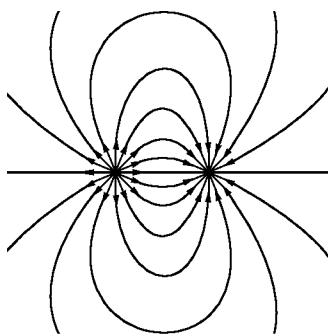


Рис. 2.4.

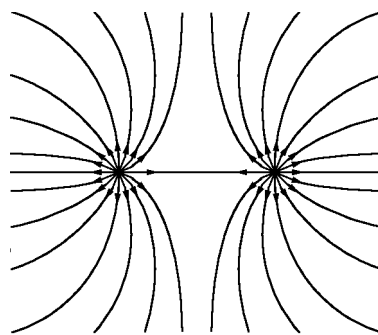


Рис. 2.5.

Уточнение. На рис. 2.5 между зарядами одного знака есть не только пересечение, а даже «столкновение» силовых линий. Легко видеть, что такая особая точка всего одна, а поле в ней нулевое. Нулевой вектор способен иметь любое направление. Строго говоря, в эту точку не следовало бы тянуть силовую линию, так как здесь их густота обращается в нуль; присутствие здесь линий – дань симметрии.

Эквипотенциальные поверхности – это поверхности одинакового потенциала. Для точечного заряда q это будут концентрические сферы. Если условиться рисовать их через одинаковое значение потенциала, допустим через 1 СГС, то эквипотенциали будут густо располагаться в областях, где поле велико. Поэтому для точечного заряда такая программа невыполнима, так как эквипотенциальных поверхностей понадобится бесконечное число. Здесь, как и при рисовании силовых линий, необходим компромисс между строгостью и выполнимостью. Применимы те же рекомендации, что и для силовых линий. Заметим, что эквипотенциальные поверхности перпендикулярны силовым линиям (опять кроме особых точек, см. рис. 2.6).

Единица потенциала в СГС имеет размерность $(\text{г})^{1/2} \cdot (\text{см})^{1/2}/\text{сек}$, в СИ – вольт. С учетом всех коэффициентов

$$1 \text{ CGS(U)} = 300 \text{ В.}$$

Это число легко запоминается и полезно для перевода других единиц. Пример: $q\varphi = U$; $1 \text{ Дж} = (1\text{В}) \cdot (1\text{Кл}) = (1/300) \cdot 1 \text{ Кл} = 10^7$; $\rightarrow 1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9$. В сети 220 В максимальное напряжение $220\sqrt{2} \approx 311 \text{ В} \approx 1 \text{ СГС}$. Поле в СИ выражают в В/м, часто используется внесистемная единица В/см. Воздух пробивается при $E \cong 30 \text{ кВ/см} = 100 \text{ СГС}$.

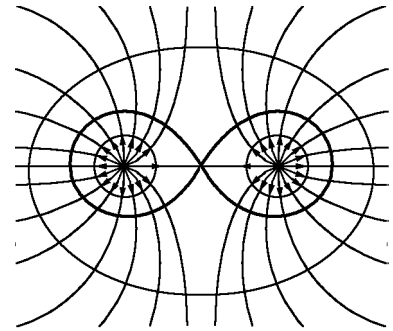


Рис. 2.6.

2.3 Теорема Гаусса. Уравнения Максвелла для электростатики

Напомним, что **поток**ом векторного поля $\mathbf{E}$ через поверхность S называется интеграл $\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S})$. Окружим точечный заряд q концентрической сферой радиуса R и вычислим поток электрического поля через поверхность сферы:

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi q.$$

Видим, что этот интеграл не зависит от радиуса сферы.

Более того, поток имеет то же значение для любой замкнутой поверхности S , содержащей внутри заряд q . Действительно, скалярное произведение $(\mathbf{E} d\mathbf{S}) = (q/R^2) \cdot R^2 d\Omega = q d\Omega$, где $d\Omega$ – элемент телесного угла, под которым виден элемент поверхности $d\mathbf{S}$ из точки, где находится заряд (рис. 2.7, слева). Суммирование по всей поверхности даст $\int d\Omega = 4\pi$. Форма поверхности при этом может быть как угодно замысловатой. Итак, для одного заряда q имеем

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = 4\pi q$$

для любой замкнутой поверхности S , содержащей в себе этот заряд. Если же заряд находится вне замкнутой поверхности, интеграл будет равен нулю (равные телесные углы будут вычитаться, см. рис. 2.7, справа).

Наконец, если заряд внутри поверхности не один, то полное поле – сумма полей отдельных зарядов q_i . Для каждого из них поток равен $4\pi q_i$, а для всех вместе

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = 4\pi \sum q_i = 4\pi Q, \quad (2.13)$$

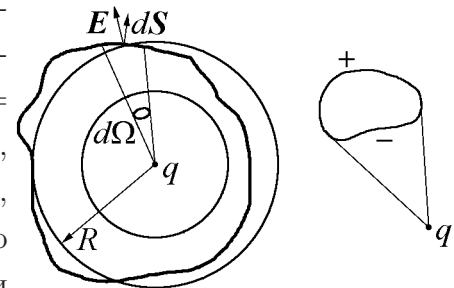


Рис. 2.7.

где Q – полный заряд внутри S . Это и есть **теорема Гаусса**.

Теорема Гаусса – первое из полученных нами **уравнений Максвелла**. Как видно из (2.13), это – **уравнение в интегральной форме**. Она основана на законе Кулона, но в отличие от него не является локальным уравнением, связывая значения поля на поверхности и заряд в ограниченном поверхностью объеме. Ниже мы получим **дифференциальную форму** этого же уравнения, которая уже локальна (связывает величины, относящиеся к данной точке пространства).

Примеры.

Известное уже поле нити с зарядом λ на единицу длины: выбираем в качестве поверхности S цилиндр радиуса r и длины L , для которого нить является осью. Из симметрии потока через «донышки» цилиндра нет. На боковой поверхности цилиндра поле всюду одинаково по величине и направлено по нормали. Отсюда

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = E \cdot 2\pi r L = 4\pi Q = 4\pi \lambda L \quad \Rightarrow \quad E = \frac{2\lambda}{r}.$$

Сфера радиуса a , равномерно заряженная по поверхности зарядом q : опять из симметрии поток равен $4\pi r^2 E$ через любую концентрическую сферу. При $r < a$ внутри контрольной сферы заряда нет, $\Rightarrow E = 0$, при $r > a$ весь заряд находится внутри контрольной поверхности, $\Rightarrow E = q/r^2$. Вспомним, что получить последний результат суммированием полей (п. 2.1) было не так просто. Заметим, что на поверхности сферы происходит скачок поля, равный $q/a^2 = 4\pi \cdot (q/4\pi a^2) = 4\pi\sigma$, где $\sigma = \Delta q/\Delta S = q/4\pi a^2$ – поверхностная плотность зарядов на сфере.

Если заряд q равномерно распределен по шару радиуса a , то снаружи шара поле точно такое же: $E = q/r^2$; вообще любое сферически симметричное распределение зарядов снаружи дает поле, как точечный суммарный заряд. Внутри шара поток по-прежнему записывается как $4\pi r^2 E$, а заряд внутри контрольной поверхности равен qr^3/a^3 из подобия; получаем $4\pi r^2 E = 4\pi qr^3/a^3 \Rightarrow E = qr/a^3$. На поверхности шара никакого скачка нет. И в общем случае для скачка поля необходима конечная поверхностная плотность заряда σ , т.е. бесконечная объемная плотность ρ .

Используя картину силовых линий, можно прояснить геометрический смысл теоремы Гаусса. Окружим точечный заряд q концентрической сферой радиуса R (рис. 2.8). Поскольку густота линий пропорциональна величине поля (для определенности можно принять равенство $E = \Delta N/\Delta S$), число линий, проходящих через 1 см^2 , равно $\Delta N/\Delta S \sim q/R^2$. Поток поля на геометрическом языке – число силовых линий, пронизывающих поверхность. Через всю сферу проходит $S \cdot \Delta N/\Delta S = 4\pi R^2 q/R^2 = 4\pi q$ силовых линий. Значит, число силовых линий, пересекающих сферу (выходящих из нее) не зависит от радиуса сферы, т.е. силовые линии, хотя бы в данном простом случае, не прерываются и не возникают в пустом месте. Пока мы видим, что это верно для концентрической сферы любого радиуса.

Но очевидно, что и для любой замкнутой поверхности S , содержащей внутри заряд q , число выходящих силовых линий **тоже** равно $4\pi q$. Это ясно из картины силовых линий, известной

нам в этом случае точно, см. рис. 2.8. Замкнутая поверхность обязательно пересечет их все, если заряд сидит внутри. Наоборот, если заряд находится вне замкнутой поверхности, каждая силовая линия, выходящая из поверхности, входит в нее в другом месте; число «чистых» выходящих линий (разница между выходящими и входящими) будет равно нулю. Переход к произвольному распределению зарядов теперь очевиден.

Пусть в каком-то месте силовые линии оборвались или, наоборот, возникли. Окружаем эту область замкнутой поверхностью. Так как числа входящих и выходящих линий не равны, имеется поток поля и внутри поверхности будет uncompensated заряд. Мы убедились, что силовые линии начинаются и оканчиваются только на зарядах.

Электростатическая теорема Гаусса тесно связана с **формулой Гаусса – Остроградского**, известной из векторного анализа:

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV, \quad (2.14)$$

где интеграл справа вычисляется по объему V , заключенному внутри замкнутой поверхности S . Напомним, что **дивергенция** вектора $\mathbf{E}$ в декартовых координатах есть⁵

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv (\nabla \mathbf{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Сравнивая (2.13) и (2.14), получим, что для электрического поля

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 4\pi q, \quad \text{причем} \quad q = \int_V \rho dV,$$

где ρ – объемная плотность заряда. Поскольку последние равенства выполняются для любого объема, должны быть равны подынтегральные выражения:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15), в отличие от (2.13), локально. Это также – одно из уравнений Максвелла, но в **дифференциальной форме**.

Задача. Вычислить дивергенцию поля точечного заряда $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^3$ и поля $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/a^3$ внутри равномерно заряженного шара радиуса a . Как результат для точечного заряда согласуется с формулой (2.14)?

Еще одно из уравнений Максвелла – уже известное нам из п. 2.2 условие потенциальности электрического поля:

$$\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0 \quad (2.16)$$

⁵Безотносительно к конкретной системе координат дивергенцию можно определить как предел отношения потока поля через поверхность, ограничивающую малый объем, к величине этого объема.

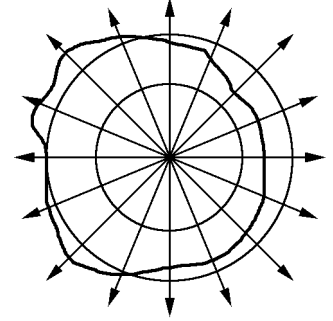


Рис. 2.8.

для любого замкнутого контура L . Его тоже можно представить в дифференциальной форме, используя формулу Стокса из векторного анализа:

$$\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = \int_S (\text{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S}), \quad (2.17)$$

где S – произвольная поверхность, опирающаяся на замкнутый контур L , а направление $d\mathbf{S}$ согласовано с направлением обхода L по правилу правого винта. Из (2.16, 2.17) и произвольности L и S следует

$$\text{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (2.18)$$

Это – второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

Напомним, что в декартовых координатах ротор – это вектор, компоненты которого составлены из производных поля по следующему правилу:

$$(\text{rot} \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (\text{rot} \mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (\text{rot} \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (2.19)$$

Встречается также обозначение с употреблением ∇ :

$$\text{rot} \mathbf{E} \equiv [\nabla \times \mathbf{E}].$$

Векторное произведение, записанное в виде определителя, помогает запомнить порядок расстановки производных в (2.19):

$$\text{rot} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

Для получения (2.19) определитель формально разлагают по первой строке. Наконец, безотносительно к координатной системе предел отношения циркуляции векторного поля по малому замкнутому контуру к площади этого контура есть компонента ротора, нормальная к указанной площади.

Выпишем для лучшей обозримости подсистему уравнений Максвелла в рамках электростатики:

$$\oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = 4\pi Q, \quad \oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0 \quad (2.20)$$

(интегральная форма; уравнения справедливы для любой замкнутой поверхности S и для любого замкнутого контура L ; заряд Q в объеме V , ограниченном S , можно записать как $Q = \int_V \rho dV$).

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \text{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (2.21)$$

(дифференциальная форма; уравнения справедливы в любой точке пространства).

Как уже говорилось, в электростатике поле $\mathbf{E}$ потенциально, и его можно выразить в виде $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Прямым вычислением легко убедиться, что (2.18) при этом выполняется автоматически (ротор всякого градиента равен нулю). Теорема Гаусса в терминах потенциала записывается в виде

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = -4\pi\rho.$$

Последовательность операций $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ обозначают еще как $(\nabla \cdot \nabla)$, или ∇^2 , или Δ . В декартовых координатах

$$\nabla^2\varphi \equiv \Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

$\nabla^2 = \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ называют **оператором Лапласа**, или **лапласианом**. Таким образом, основное **уравнение Пуассона** для потенциала имеет вид

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (2.22)$$

В случае, если в правой части стоит нуль (в «незаряженных» местах), имеем

$$\Delta\varphi = 0 \quad (2.23)$$

(**уравнение Лапласа**). В динамике вторые уравнения в (2.20,2.21) нарушаются, т.е. потенциальность электрического поля в общем случае не имеет места.

Уравнения (2.21) или (2.22,2.23) выписаны для случая поля в пространстве, свободном от вещества (в вакууме). Однако они с хорошей точностью выполняются и в достаточно разреженной среде (например, в земной атмосфере). При решении конкретных задач электростатики уравнения дополняются граничными условиями. Последние зависят от свойств сред, образующих границы расчетной области. Пример применения (2.23) для расчета электростатических задач рассмотрено в следующем параграфе.

Выражения для градиента, дивергенции, ротора и лапласиана в сферической и цилиндрической системах координат приведены в приложении. Формулы для более широкого круга координатных систем, а также для общего случая ортогональных координат можно найти в кн.: Батыгин Г.М., Топтыгин Ф.А. Сборник задач по электродинамике. М.: Физматлит, 1980.

Мы «вывели» теорему Гаусса из закона Кулона. Вне рамок электростатики закон Кулона перестает выполняться, однако теорема Гаусса остается верной и в электродинамике. Разумеется, никакого математического доказательства последнего утверждения дать нельзя. В физике истинность теории – это соответствие решений реальному миру. Теоретики вырабатывают интуитивное ощущение справедливости теории, основанное на логичности и красоте уравнений, но практика остается основным критерием. Считается, что система уравнений Максвелла – это своего рода образец физической теории, и с эстетических, и с практических позиций. И далее мы будем двигаться от частных примеров к общим уравнениям Максвелла – конечной цели раздела.

2.4 Проводники в электрическом поле. Метод изображений

Для симметричного распределения зарядов электрическое поле удастся найти с минимальными затратами, применяя уравнения Максвелла в интегральной форме. Такие случаи, разумеется, сравнительно редки.

При произвольном, но известном расположении зарядов нахождение поля требует только применения принципа суперпозиции. Для точечных зарядов используют формулы (2.5, 2.12), а для непрерывного распределения с известной плотностью ρ – их непосредственные аналоги

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d^3\mathbf{r}' = \int \frac{\rho \mathbf{R}}{R^3} dV, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d^3\mathbf{r}' = \int \frac{\rho}{R} dV, \quad (2.24)$$

где $dV = d^3\mathbf{r}'$ – элемент объема, пробегаемый радиус-вектором источников поля $\mathbf{r}'$.

Однако именно распределение зарядов на практике часто неизвестно, и приходится находить поле или потенциал из дифференциальных уравнений (2.21) или (2.22). Существует много частных приемов, каждый из которых применим в особом случае. Единственный общий способ – численное решение задачи. В расчетной области пространства строится достаточно мелкая сетка, производные аппроксимируются разностями и решается, обычно компьютерной программой, система алгебраических уравнений. При этом разностные уравнения «работают» внутри области, а на ее границах ставятся **граничные условия**. Особенно просты эти условия для границ, образованных проводниками.

В **проводниках** электрические заряды движутся свободно. Если внести проводник в поле, оно начнет перемещать заряды (другими словами, пойдет ток). Легко видеть, что заряды перемещаются так, чтобы компенсировать внешнее поле. Иначе в куске металла⁶ неопределенное время протекал бы ток из-за того только, что к нему поднесли заряд (вечный двигатель). Реально токи идут короткое время, пока не исчезнет поле внутри металла. После установления равновесия в проводнике $\mathbf{E} = 0$. Следовательно, в **электростатике** проводники будут эквипотенциалами при любой форме и независимо от распределения зарядов снаружи. (Конечно, конкретные значения потенциалов зависят от этих факторов). Типичная задача электростатики и состоит в нахождении поля и/или потенциала в области, по крайней мере часть границ которой образована проводниками с известными потенциалами. Электрическое поле всегда перпендикулярно поверхности проводника, как эквипотенциали. Это другая формулировка того же граничного условия.

Еще одно свойство проводников: внутри проводника не может находиться нескомпенсированный заряд. Действительно, плотность зарядов ρ пропорциональна дивергенции поля $\mathbf{E}$ и при нулевом поле также равна нулю. Это не значит, что проводник нельзя

⁶Металлы – это наиболее типичные проводники, но есть и много других видов проводников. В принципе, любой материал, хотя бы плохо, проводит ток, но не любой годится для изготовления проводов.

зарядить. Избыточные заряды на проводнике – совершенно обычное дело, но все они «выталкиваются» на поверхность проводника. Если в проводнике имеется полость, не содержащая зарядов, то и внутри полости поле равно нулю (экранировка).

Задача. Показать, что поле E вблизи поверхности проводника и плотность поверхностных зарядов σ связаны равенством $E = 4\pi\sigma$.

Пример. Пусть требуется найти потенциал в квадратной области с квадратным же вырезом, причем на внутренней границе $\varphi = 0$, а на внешней $\varphi = 1$ (рис. 2.9). Расчетная сетка содержит 40 внутренних узлов, в которых и требуется найти значения потенциала. Предполагается, что зарядов внутри области нет, и поле создается (заранее неизвестными) зарядами на поверхности проводников. Следовательно, надо решать двумерное уравнение Лапласа:

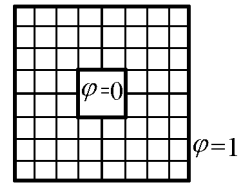


Рис. 2.9.

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Обозначим шаг сетки h ; числа φ_i^j обозначают потенциал в точке $x = ih$, $y = jh$. Аппроксимируем вторые производные:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{h} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i+1/2}} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i-1/2}} \right) \rightarrow \frac{1}{h} \left(\frac{\varphi_{i+1}^j - \varphi_i^j}{h} - \frac{\varphi_i^j - \varphi_{i-1}^j}{h} \right) = \frac{\varphi_{i+1}^j - 2\varphi_i^j + \varphi_{i-1}^j}{h^2}.$$

Получаем разностное уравнение, связывающее пять соседних точек:

$$\frac{\varphi_{i+1}^j - 2\varphi_i^j + \varphi_{i-1}^j}{h^2} + \frac{\varphi_i^{j+1} - 2\varphi_i^j + \varphi_i^{j-1}}{h^2} = 0.$$

Видно, что уравнений ровно столько, сколько внутренних точек сетки. Для решения обычно используют метод итераций. Предыдущее уравнение переписывают в виде

$$\varphi_i^j = \frac{1}{4}(\varphi_{i+1}^j + \varphi_{i-1}^j + \varphi_i^{j+1} + \varphi_i^{j-1}). \quad (2.25)$$

В каждой точке потенциал равен среднему по четырем ближайшим соседям значению⁷.

Вначале во внутренних точках задаются значения потенциала (в принципе не важно, какие, но лучше, если они будут лежать между крайними граничными значениями). Эти начальные значения могут быть не равны средним по ближайшим соседям, в том числе если эти соседи – граничные точки. Затем по формуле (2.25) вычисляются новые значения потенциалов внутри области. В граничных точках потенциал известен, и в них ничего менять не надо. С каждым таким циклом уравнение «выполняется» все лучше, и все лучше внутренние значения согласуются с граничными. Процедура повторяется, пока потенциал внутри не перестанет изменяться в рамках желаемой точности. При нынешней распространенности компьютеров расчет не представляет сложности.

Задача. Для конфигурации, изображенной на рис. 2.9, найти распределение потенциала. (Симметрия позволяет сократить число расчетных узлов). Построить эквипотенциали и силовые линии. Найти плотность заряда в граничных точках сетки.

⁷Это разностный аналог известного тождества: значение функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа, в данной точке равно среднему значению этой функции на окружности с центром в этой точке (в трех измерениях – среднему значению на сфере). См.: Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Т. 3. М.: Физматлит, 2002. Гл. XVI, п. 602; гл. XVIII, п. 654.

Разберем на простых примерах один из частных подходов электростатики проводников – **метод электростатических изображений**. Пусть заряд q находится возле металлического полупространства. Он притянет заряды обратного знака на обращенную к нему поверхность. Силовые линии выходят из заряда и оканчиваются на плоскости перпендикулярно к ней (рис. 2.10). Точно такая же картина поля будет у зарядов q и $-q$ (сравните с рис. 2.4). Посредине проходит плоская эквипотенциаль $\varphi = 0$. Если на ее место вставить металлическую пластину, поле не изменится. После этого $-q$ можно убрать. Следовательно, такая же картина поля получится и возле тонкой пластины (целое полупространство не обязательно).

Распределение зарядов на плоскости имитирует заряд $-q$, находящийся для наблюдателя с другой стороны плоскости – **изображение** заряда q . Например, наблюдатель, находящийся с той же стороны, что и q , чувствует воздействие настоящего q и фиктивного ($-q$) в симметричном положении за плоскостью. На рис. 2.10 линии поля справа, сходящиеся к фиктивному заряду, показаны пунктиром. На самом деле внутри металла поля и тем более заряда, симметричного q , нет. Наблюдатель, расположенный внутри проводника, «видит» настоящий q и $-q$, «наложенный» на него: в итоге получается 0, как и должно быть ($\mathbf{E} = 0$). Из теоремы Гаусса поле на границе $E = 4\pi\sigma$, откуда плотность поверхностных зарядов $\sigma = (1/2\pi)qh/(h^2 + r^2)^{3/2}$; здесь h – расстояние от q до плоскости, r – радиус из центра симметрии. Сила взаимодействия заряда с плоскостью такая же, как с фиктивным зарядом: $F = q^2/4h^2$. Попробуйте получить эту силу, интегрируя взаимодействия σ и q .

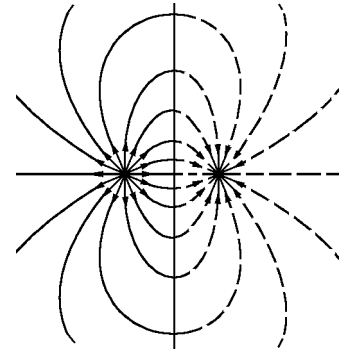


Рис. 2.10.

В общем, если удалось решить задачу с известным распределением зарядов и найдена форма эквипотенциалей, то тем самым решен еще ряд задач: о взаимодействии куска металла в форме любой из этих эквипотенциалей со всеми зарядами, кроме попавших внутрь этого куска. Последние теперь сидят на поверхности, но действуют в наружной области точно, как внутренние: «изображают» их. Говорят, что они являются «изображением» внешних зарядов, которые в куске металла видны, как в зеркале (в общем случае кривом).

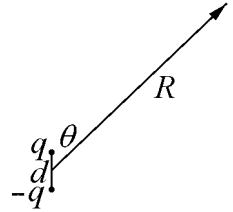
Например, что «видит» заряд q в металлическом шаре радиуса a , находясь на расстоянии $R > a$? Вначале рассмотрим шар с нулевым потенциалом, т.е. заземленный. Попробуем добиться эквипотенциальности, поместив внутрь шара, напротив q , заряд $-q'$ на некотором расстоянии x от центра. Взяв любую точку на шаре, расстояния от которой до зарядов r_1 и r_2 , запишем условие $\varphi = 0 = q/r_1 - q'/r_2$, откуда $r_1/r_2 = q/q'$. В п. 2.1 мы видели, что при $x = a^2/R$ отношение r_1/r_2 для любой точки на сфере одинаково и равно R/a . Получаем $q' = qa/R$. Мы выбрали изображение. Такое простое решение получилось благодаря счастливой форме шара; для куба, например, потребуется бес-

конечное число изображений. Еще раз отметим, что шар, имеющий нулевой потенциал (заземленный), имеет ненулевой заряд $-q'$. Этот заряд пришел из земли, притянутый зарядом q .

Незаряженный шар получим, поместив дополнительно в центр заряд $+q'$. При этом эквипотенциальность не нарушится. В действительности заряды обоих изображений сидят на поверхности шара, создавая некоторую плотность заряда, и кажутся точечными только снаружи. Заметим, что незаряженный шар притягивается к заряду q (изображение обратного знака находится ближе).

2.5 Поле и потенциал диполя

«Голый» заряд встречается в быту не так часто, иначе вокруг постоянно ударили бы молнии. Обычно заряд компенсирован (например, в атомах). Однако следы распределения заряда и в этом случае могут проявляться. На близких расстояниях не может быть общих и в то же время простых зависимостей, и мы займемся полем системы зарядов на больших расстояниях.



Рассмотрим **диполь**: два заряда q и $-q$ на расстоянии d (рис. 2.11). Рис. 2.11. На большом расстоянии R расстояния r_1 и r_2 от зарядов до точки наблюдения близки. Потенциал $\varphi = q \cdot (1/r_1 - 1/r_2) = q(r_1 - r_2)/r_1 r_2 \cong qd \cos \theta / R^2$. Произведение qd называют **дипольным моментом** p . Поскольку входит угол θ , естественно считать p вектором, направленным от $(-q)$ к $(+q)$: $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$. В векторном виде $\varphi = (\mathbf{pr})/R^3$. Поле считается как $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$; в сферических координатах

$$E_R = 2p \cos \theta / R^3, \quad E_\theta = p \sin \theta / R^3.$$

Иногда удобны проекции поля на направление вдоль оси диполя и перпендикулярное к нему:

$$E_z = p(3 \cos^2 \theta - 1)/R^3, \quad E_\perp = p \cdot (3 \cos \theta \sin \theta)/R^3.$$

Можно было бы получить $\mathbf{E}$ прямым сложением полей от зарядов, учитывая их почти одинаковую величину и почти противоположное направление. Заметим, что φ и E спадают с расстоянием быстрее, чем в кулоновском случае.

Для произвольной системы зарядов $\varphi = \sum q_i/r_i$. На больших по сравнению с размером системы расстояниях пишем (в том же приближении)

$$r_i = R - \frac{(\mathbf{R}\mathbf{X}_i)}{R},$$

где $\mathbf{X}_i$ – радиус-вектор заряда q_i . Получаем

$$\varphi = \frac{\sum q_i}{R} + \frac{\sum q_i(\mathbf{R}\mathbf{X}_i)}{R^3} = \frac{Q}{R} + \frac{(\mathbf{R} \sum q_i \mathbf{X}_i)}{R^3} = \frac{Q}{R} + \frac{(\mathbf{R}\mathbf{p})}{R^3}.$$

Видно, что дипольный момент системы дается суммой $\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{X}_i$. Проверьте, что для простейшей системы $(\pm q)$ $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$. Дипольный момент не зависит от положения начала координат (откуда отмеряются векторы $\mathbf{X}_i$), если полный заряд системы $Q = 0$. Если $Q \neq 0$, то зависимость будет. К счастью, в этом случае дипольный момент не так нужен, так как первое слагаемое на больших расстояниях преобладает.

Бывает, что и Q и $\mathbf{p}$ равны нулю (например, два навстречу направленных одинаковых диполя). Тогда поле спадает еще быстрее и надо учитывать так называемый квадрупольный момент, и т.д. В этом и состоит смысл утверждения, что разноименные заряды компенсируются. Полная компенсация будет только при сферически симметричном распределении заряда, а при любом отклонении поле просто спадает быстрее, чем кулоновское. По сравнению с кулоновским дипольные и более симметричные поля называют короткодействующими. Поэтому, скажем, водяной пар можно считать идеальным газом, хотя у молекул воды есть заметный дипольный момент.

2.6 Конденсаторы. Энергия электрического поля

Простейший – плоский – конденсатор состоит из двух разноименно заряженных пластин (заряды $\pm\sigma$ на см^2) площади S , разделенных расстоянием d . Снаружи системы поле нулевое, внутри $E = 4\pi\sigma$.

Найдем силу притяжения пластин: $F = qE/2 = 4\pi\sigma^2 S/2$. Пополам потому, что для каждой пластины надо брать внешнее поле – созданное другой пластиной; другая трактовка – на каждый q действует среднее поле по толщине слоя, в котором этот q распределен. От нуля до $4\pi\sigma$ как раз выйдет $2\pi\sigma$.

На единицу площади придется $F/S = 2\pi\sigma^2 = E^2/8\pi$. Эту величину, поскольку она зависит только от E , иногда называют электрическим давлением. Однако это «давление» отрицательно – сила направлена в ту сторону, где поле есть (пластины притягиваются).

Правильнее говорить о **натяжении электрического поля**. Можно представлять себе линии поля как некие резинки, растянутые с силой $E^2/8\pi$ на единицу площади.

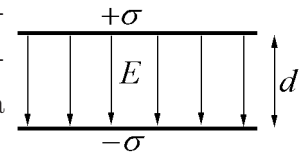


Рис. 2.12.

Пусть вначале конденсатор был «сплюснут», имея $d \cong 0$, а затем его растянули до зазора d . При этом придется произвести работу $W = PSd = E^2 Sd/8\pi = (E^2/8\pi) \cdot V$, где V – объем конденсатора. Поскольку в системе нет других изменений, кроме появления в объеме поля E , эту работу следует считать израсходованной на создание энергии электрического поля. Следовательно, энергия единицы объема поля E равна $w = E^2/8\pi$. Если E переменна в пространстве, полная энергия поля

$$U = \int \frac{E^2}{8\pi} dV . \quad (2.26)$$

Пример. Энергия поля сферы радиуса r , на поверхности которой равномерно рас-

пределен заряд q .

$$E = \frac{q}{R^2}, \quad U = \int \frac{q^2}{8\pi R^4} \cdot 4\pi R^2 dR = \frac{q^2}{2} \cdot \int_r^\infty \frac{dR}{R^2} = \frac{q^2}{2r}.$$

Как быть с точечными зарядами? Например, у электрона размера пока найти не удалось, а энергия поля в проверенном объеме гораздо больше, чем электрону полагается (забегая вперед: полагается mc^2). Реально на малых расстояниях и при больших полях неправильна электростатика (как и вообще классическая электродинамика; это уже отмечалось в п. 2.1).

Казалось бы, вместо (2.26) естественнее написать энергию поля как $U = \sum q\varphi = \int \rho\varphi dV$. Проверим: для сферы потенциал на поверхности $\varphi = q/r$, весь заряд при этом потенциале, $\rightarrow U = q^2/r$. Получилось вдвое больше, поскольку так мы каждое взаимодействие учитываем дважды. Окончательно в **рамках электростатики** формула

$$U = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV \quad (2.27)$$

тоже верна, если правильно выбран потенциал ($\varphi = 0$ на ∞). Подразумевается, что потенциал φ_i в месте расположения заряда q_i создается всеми зарядами, кроме него самого. Формула (2.26) обычно удобнее и к тому же верна и вне рамок электростатики. Заметим, что для рассмотренного примера $\rho\varphi/2$ «концентрировано» на поверхности сферы, совсем не там, где настоящая плотность энергии поля $E^2/8\pi$.

Для плоского конденсатора $U = 2\pi\sigma^2 Sd = q^2/2C$. Здесь $C = S/(4\pi d)$ – **емкость** конденсатора. Емкость имеет размерность длины (в СГС). Вместо пластин годятся любые два куска металла (обкладки), заряд q с одного переносится на другой и тоже получается конденсатор. Поле в пространстве в общем пропорционально q , а энергия опять $q^2/2C$, причем C зависит только от геометрии (формы и расположения обкладок). Для простой формы емкость будет порядка размеров; плоский конденсатор ($d \ll S^{1/2}$) не подходит под это правило.

Разность потенциалов (напряжение) между обкладками плоского конденсатора $V = Ed$, откуда $U = (S/4\pi d) \cdot V^2/2 = CV^2/2$. Справедливость равенства $q^2/2C = CV^2/2$ для любого конденсатора следует из эквивалентности двух определений энергии – через энергию поля и через заряды в потенциале. Для вычисления энергии через потенциал как $(1/2) \sum q\varphi$ выберем нуль потенциала на бесконечности, тогда потенциалы обкладок $\pm V/2$. Получаем $(1/2) \cdot (qV/2 + (-q)(-V/2)) = qV/2$. Сравнивая с $q^2/2C$, имеем полезное равенство $q = CV$. Можно рассмотреть еще процесс зарядки конденсатора. Если текущее напряжение V , то работа будет $\sum V\Delta q = \int Vdq$. Напряжение, очевидно, $\sim q$, откуда энергия снова $q^2/2C = CV^2/2$.

Чтобы найти емкость, конденсатор мысленно заряжают. Затем вычисляем напряжение и по связи $q = CV$ находим емкость. Можно действовать в обратном порядке, а также находить энергию.

Примеры:

Сферический конденсатор с концентрическими обкладками радиусов r и R . Надо интеграл в прошлом примере взять в пределах от r до R , $U = (q^2/2)(1/r - 1/R)$, откуда $C = rR/(R - r)$. Проверьте, что при малом зазоре $R - r$ это переходит в формулу для плоского конденсатора. При $R = \infty$ имеем $C = r$. Можно говорить о емкости шара (равной радиусу), имея в виду емкость между ним и землей, эквивалентной бесконечно удаленной второй сфере.

Цилиндрический конденсатор. Радиусы те же, длина L . Заряжаем зарядом q внутреннюю обкладку, на внешней $-q$. Внутри поле $2\lambda/r = 2q/(Lr)$, снаружи нуль. Напряжение $V = \int 2q/(Lr)dr = (2q/L) \ln(R/r)$. Емкость $C = L/(2 \ln(R/r))$.

В СИ емкость измеряется в **фарадах**. Ее⁸ можно найти, зная вольт: $\Phi \cdot B^2 = \text{Дж}$, откуда $1 \Phi = 10^7 \cdot 300^2 = 9 \cdot 10^{11}$ см. Емкость человека около $30 \div 50$ см или почти столько же пФ. Пико (10^{-12}) – это, без сомнения, довольно редкая приставка, т.е. фарада – крайне неудобная единица.

Последовательное соединение C_1 и C_2 : q один, а V складываются; $\rightarrow 1/C = 1/C_1 + 1/C_2$. Параллельное: $C = C_1 + C_2$. Еще бывают **никакие** соединения (не сводящиеся к параллельному и последовательному). Тогда нужно честно находить состояние каждого конденсатора в цепи, из тех условий, что суммарный заряд в узлах равен нулю (или заданному q для входного и выходного узла) и сумма напряжений по любому замкнутому контуру нулевая. Затем делим q на суммарное напряжение между входным и выходным узлом.

Способность конденсаторов накапливать энергию ограничена опасностью пробоя. Если между пластинами воздух, то предельное $E < 30$ кВ/см, или 100 СГС, откуда $w < 500$ эрг/см³ = 50 Дж/м³. Разные ухищрения увеличивают плотность энергии не более чем на $1 \div 2$ порядка. Зато конденсаторы содержат высококачественную энергию в отличие от дров и т.п. и развивают при разряде большую мощность.

Сейчас уместно вспомнить об элементарном заряде. Милликен помещал маленькие электрически заряженные капли в конденсатор. Без поля капли падают с постоянной скоростью, зависящей от вязкости среды, которую можно измерить непосредственно. Затем, включая поле, можно капли уравновесить или заставить их падать вверх. По величине напряжения на конденсаторе определяется уравнивающая сила qE . Оказалось, что заряд капли меняется только квантами величины $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ СГС.

Для более подробного знакомства с предметом рекомендуются книги [1, 2, 3].

⁸В последнее время (где-то между 1977 и 1980 г.) фарада «сменила пол» и теперь называется фарад. Мы предпочитаем женский род, как в старину, в основном потому, что дольные единицы: один микрофарад, один пикофарад звучат несколько дико.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Дифференциальные операции в ортогональных системах координат.

Сферические координаты:

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \alpha, \quad y = r \sin \theta \sin \alpha, \quad z = r \cos \theta; \\
 (\nabla \varphi)_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (\nabla \varphi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad (\nabla \varphi)_\alpha = \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \\
 \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha}; \\
 (\operatorname{rot} \mathbf{E})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (E_\alpha \sin \theta) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \alpha} \right), \\
 (\operatorname{rot} \mathbf{E})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\alpha)}{\partial r}, \quad (\operatorname{rot} \mathbf{E})_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta}; \\
 \Delta \varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.
 \end{aligned}$$

Цилиндрические координаты:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad z = z; \\
 (\nabla \varphi)_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (\nabla \varphi)_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad (\nabla \varphi)_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\
 \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_z}{\partial z}; \\
 (\operatorname{rot} \mathbf{E})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial z}, \quad (\operatorname{rot} \mathbf{E})_\alpha = \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}, \\
 (\operatorname{rot} \mathbf{E})_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\alpha)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \alpha}; \\
 \Delta \varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.
 \end{aligned}$$

Литература

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: ГИТТЛ, 1957. 620 с.
2. Парселл Э. Электричество и магнетизм. Берклевский курс физики, т. 2. М.: Наука, 1975. 440 с.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Электричество и магнетизм. Фейнмановские лекции по физике, вып. 5. М.: Мир, 1966. 296 с.