

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Курс лекций для ММФ

А.А. Васильев, А. П. Ершов

1 семестр

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

3. ДИЭЛЕКТРИКИ

4. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

20 августа 2006 г.

Глава 3

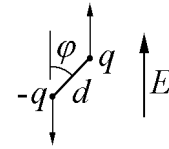
ДИЭЛЕКТРИКИ

Противоположностью проводникам являются **изоляторы**, или **диэлектрики**, в которых заряды не могут свободно двигаться по всему объему. Однако любой атом или молекула состоят из электрических зарядов, которые, разумеется, реагируют на электрическое поле. Поэтому и диэлектрик как целое взаимодействует с полем. Механизмы такого взаимодействия и его следствия рассмотрены в этой главе.

3.1 Диполь во внешнем поле. Наведенная поляризация. Поляризуемость

Некоторые диэлектрики **полярны** – состоят из молекул, имеющих дипольный момент. Естественный масштаб дипольного момента – произведение заряда электрона $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ СГС на атомный размер $a \simeq 10^{-8}$ см¹. Реально «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов разнесены на меньшее расстояние, и типичное значение p порядка 10^{-18} СГС. Эта внесистемная единица называется **дебай**. Например, дипольный момент молекулы воды 1,85 дебая.

На диполь в поле $\mathbf{E}$ будет действовать пара сил, разворачивающая его вдоль поля. Момент сил $\tau = qEd \sin \varphi = pE \sin \varphi$ (рис. 3.1). Потенциальная энергия диполя, отсчитанная от «нейтрального» положения поперек поля:



$$U = -q(d/2) \cos \varphi \cdot E - q(d/2) \cos \varphi \cdot E = -pE \cos \varphi = -(\mathbf{pE}).$$

Рис. 3.1.

Отдельно взятый, свободный и произвольно направленный диполь при включении внешнего поля начнет колебаться. С учетом взаимодействия молекул в дипольном газе установится некоторое равновесие², причем возникнет ненулевая средняя компонента $\mathbf{p}$ вдоль поля, так как положение вдоль энергетически выгоднее. Теоретические расчеты и

¹Единица длины 10^{-8} см, удобная для атомных явлений, называется ангстрем (Å).

²Как показывает статистическая физика, равновесным является распределение Больцмана: число молекул с энергией U пропорционально $\exp(-U/kT)$.

опыт показывают, что средняя проекция $\langle p \rangle$ (в полях, имеющих практическое значение) мала по сравнению с истинным дипольным моментом p и пропорциональна полю:

$$\langle p \rangle = \alpha E, \quad \text{или} \quad \langle \mathbf{p} \rangle = \alpha \mathbf{E}. \quad (3.1)$$

Здесь α – коэффициент, в СГС имеющий размерность см^3 . Для простейшего случая газа из дипольных молекул $\alpha = p^2/3kT$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/градус – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура³. Степень ориентации молекул $\langle p \rangle/p = pE/3kT$, т.е. порядка отношения энергии ориентации диполя pE к характерной тепловой энергии kT . В поле 30 кВ/см диполь будет ориентирован на $\cong 10^{-3}$. Эта малая, по видимости, доля достаточна, чтобы существенно изменить поле в среде, из-за относительно большой величины дипольного момента p .

Есть также **неполярные** диэлектрики, молекулы которых не имеют собственного дипольного момента. Таковы, например, симметричные молекулы типа H_2 , O_2 , CO_2 . Однако во внешнем поле заряды неизбежно «разъедутся», и некоторый дипольный момент появится (**наведенная** поляризация).

Простая модель – атом Томсона: электрон e^- сидит в центре шара, равномерно заряженного зарядом e^+ . Внешнее поле E сместит электрон из центра на расстояние x . В равновесии $E = ex/a^3$, где a – радиус атома. Смещение $x = Ea^3/e$, а наведенный дипольный момент $p = ex = Ea^3$.

Другая модель – металлический шарик радиуса a . Внешнее поле E создает на его поверхности потенциал $\varphi_E = -Ea \cos \vartheta$. Помещаем в духе метода изображений внутрь диполь p , создающий на поверхности $\varphi_p = p \cos \vartheta/a^2$. Суммарный потенциал занулится при $p = Ea^3$ – то же значение. Как ни странно, такие грубые модели дают результат, близкий к истине. Реально для атома водорода $p = (9a_0^3/2)E$, если a_0 – боровский радиус ($0,53 \cdot 10^{-8}$ см). Коэффициент 4,5 не так мал, но и атом на самом деле не имеет четко определенного размера.

У дипольной молекулы наведенная поляризация тоже есть, но она несущественна: собственный $p \simeq ea$, $\langle p \rangle \simeq e^2 a^2 E/kT$, наводится $p' = Ea^3$. Отношение их порядка $(e^2/a)/kT$ – отношения химической энергии связи атома к тепловой. При комфортной температуре ориентационная поляризация превышает наведенную приблизительно на два порядка. При высоких же температурах атомов нет как таковых.

Следовательно, в обоих типах диэлектриков во внешнем поле E молекула приобретает дипольный момент $p = \alpha E$. **Поляризуемость** α для неполярных веществ порядка объема молекулы, для полярных гораздо больше; p тогда имеет смысл среднего в тепловом равновесии.

В однородном поле суммарная сила, действующая на диполь, нулевая. В неоднородном, например вблизи заряда q , диполь ориентируется так, чтобы притягиваться к

³См. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1969.

q (а вообще – втягиваться в область сильного поля). Сила будет $e\Delta E = ed \cdot |\nabla E| = p \cdot |\nabla E| = (\alpha/2) \cdot \nabla(E^2)$.

3.2 Поле в среде. Векторы поляризации и электростатической индукции

Каждая молекула диэлектрика в поле E приобретет момент $p = \alpha E$. Если молекулы заметно не влияют друг на друга, то дипольный момент единицы объема

$$\mathbf{P} = n\alpha\mathbf{E} = \chi\mathbf{E}. \quad (3.2)$$

Здесь n – плотность молекул, или концентрация (штук в см^3). $\mathbf{P}$ называется **вектором поляризации**; его размерность такая же, как у поля. Безразмерная величина χ – **диэлектрическая восприимчивость**. В следующем параграфе мы увидим, что χ не точно равно $n\alpha$ из-за взаимного влияния молекул, но равенство $\chi = n\alpha$ не так существенно. Важно, что $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$.

Поляризовать диэлектрик можно, внося его в заряженный конденсатор (рис. 3.2). Пластины создают поле E_{out} ; в диэлектрике возникнет поляризация P . Суммарный дипольный момент диэлектрика будет $PV = PSd$, где S – площадь, d – толщина образца диэлектрика. С другой стороны, если каждая молекула поляризуется, т.е. заряды в ней разойдутся, то справа на поверхности диэлектрика «вылезет» поляризационный поверхностный заряд $+\sigma_p$, а слева будет $-\sigma_p$. Внутри же диэлектрик будет нейтральным. Дипольный момент образца можно написать и как $(\sigma_p \cdot S) \cdot d$, откуда $\sigma_p = P$. Если вектор $\mathbf{P}$ направлен под углом к поверхности, надо брать нормальную составляющую; окончательно

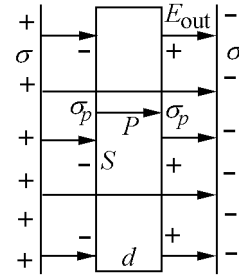


Рис. 3.2.

$$\sigma_p = P_{\perp}. \quad (3.3)$$

Из рис. 3.2 ясно, что поляризационные заряды ослабляют поле в диэлектрике. Снаружи⁴ $E_{\text{out}} = 4\pi\sigma$, а внутри $E_{\text{in}} = 4\pi(\sigma - \sigma_p)$. Вспомним, что $\sigma_p = P$ и что в вакууме $P = 0$, так как вакуум не поляризуется. Тогда можно записать равенство:

$$(E + 4\pi P)_{\text{out}} = (E + 4\pi P)_{\text{in}}$$

то есть вектор $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ в данном случае одинаков внутри диэлектрика и вне его. В то время как на поле $\mathbf{E}$ действуют поляризационные заряды, $\mathbf{D}$ их «не чувствует». Рассмотрим теорему Гаусса для поверхностей, показанных пунктиром на рис. 3.3. Для поля $\mathbf{E}$ считается **весь** заряд, сидящий внутри, включая поляризационный (случай а):

$$ES = 4\pi Q = 4\pi(\sigma S - \sigma_p S) .$$

⁴Снаружи диэлектрика, но, конечно, внутри конденсатора.

Если поверхность не захватит диэлектрик, в правой части будет другая величина: $4\pi\sigma S$ (случай b). Теперь напишем то же для вектора $\mathbf{D}$:

$$D S = (E S + 4\pi P S) = 4\pi(\sigma S - \sigma_p S) + 4\pi\sigma_p S = 4\pi\sigma S$$

независимо от того, захватывает замкнутая поверхность диэлектрик или нет. Вектор $\mathbf{D}$ устроен так, что его источниками являются только **свободные** заряды. Окончательно теорема Гаусса для $\mathbf{D}$ имеет вид:

$$\oint (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) = 4\pi Q_{\text{своб}}, \quad (3.4)$$

где $Q_{\text{своб}}$ – полный свободный заряд внутри S . Если внутри S проходят поверхности диэлектриков с поляризационными зарядами на них, это никак не влияет на правую часть теоремы Гаусса для **вектора электростатической индукции** (или просто вектора индукции) $\mathbf{D}$.

Чтобы получить это уравнение в общем виде, безотносительно к конкретной геометрии, возьмем диэлектрическое тело произвольной формы, ограниченное поверхностью S и находящееся во внешнем поле. Поляризация приведет к «высыпанию» зарядов на поверхности. Суммарный поверхностный заряд из (3.3)

$$q_S = \int_S (\mathbf{P} d\mathbf{S}) \equiv \int_V \text{div} \mathbf{P} dV.$$

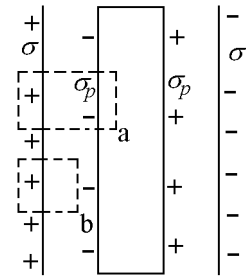


Рис. 3.3.

Поверхностный интеграл равен объемному по формуле Гаусса-

Остроградского. С другой стороны, внутри тела тоже возможны поляризационные заряды с объемной плотностью ρ_p , всего внутри $q_V = \int \rho_p dV$. Суммарно заряд, связанный с поляризацией тела, разумеется, нулевой:

$$q_V + q_S = 0, \quad \text{или} \quad \int_V \text{div} \mathbf{P} dV + \int_V \rho_p dV = 0. \quad (3.5)$$

Теперь рассмотрим произвольный объем, граница которого может частью проходить по поверхности диэлектрического тела, а частью (возможно, целиком) находится внутри тела. Внутри, конечно, никаких поверхностных зарядов не выступит, но мы вправе рассмотреть заряд, **прошедший** через элемент границы $d\mathbf{S}$ при поляризации, можем обозначить его $\sigma_p dS$, понимая под σ_p заряд, прошедший через единицу поверхности, и по-прежнему $\sigma_p dS = (\mathbf{P} d\mathbf{S})$. На той части поверхности, которая совпадает с поверхностью диэлектрика, ничего не изменится. Тогда условие нейтральности выделенного объема по-прежнему имеет вид (3.5). Мы показали, что (3.5) выполняется для любого⁵

⁵Часть контрольного объема может «высовываться» в пустое пространство. В этой части $\mathbf{P} = \rho_p = 0$, и поэтому выступающая часть не даст вклада; попавшую же внутрь объема заряженную поверхность можно рассматривать как тонкий слой с большой объемной плотностью заряда.

объема V и поэтому в любой точке диэлектрика должно быть

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (3.6)$$

Часто в объеме диэлектрика $\rho_p = \operatorname{div} \mathbf{P} = 0$, так что весь поляризационный заряд располагается на поверхности; но это не обязательное условие. Например, поляризационные заряды имеются внутри неоднородного диэлектрика (крайний случай – резкая граница двух веществ). Для поля $\mathbf{E}$ выполняется дифференциальное уравнение (2.15):

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \text{где} \quad \rho = \rho_{\text{своб}} + \rho_p,$$

то есть источником является плотность всех зарядов. Заменяя $\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}$ из (3.6), получаем уравнение для $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{своб}}, \quad (3.7)$$

где источник – уже плотность только свободных зарядов. Это – дифференциальный аналог (3.4). Из (3.7) следует (3.4) для любой замкнутой поверхности.

3.3 Уравнения электростатики в присутствии диэлектриков. Диэлектрическая проницаемость. Условия на границе двух сред. Энергия поля в среде

Введение нового неизвестного $\mathbf{D}$ упрощает решение некоторых задач. Например, пусть заряд q окружен диэлектрическим шаром радиуса R . Как найти поле, сразу не ясно: оно зависит в том числе от неизвестных заранее поверхностных зарядов. Индукция же $\mathbf{D}$ находится легко из теоремы Гаусса (3.4): $D = q/r^2$ как внутри, так и вне шара.

Чтобы найти поле $\mathbf{E}$, запишем $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \mathbf{E} + 4\pi\chi\mathbf{E} = (1 + 4\pi\chi)\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}$. Видно, что вещество удобнее характеризовать не диэлектрической восприимчивостью χ , а **диэлектрической проницаемостью** $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$. У вакуума $\varepsilon = 1$, у воды 80, у воздуха 1,00057. В нашем примере внутри шара с проницаемостью ε : поле $\mathbf{E} = q/(\varepsilon r^2)$, вне его $\mathbf{E} = q/r^2$. В конденсаторе из предыдущего параграфа $D = 4\pi\sigma$, $\rightarrow \mathbf{E} = 4\pi\sigma$ вне диэлектрика, $\mathbf{E} = 4\pi\sigma/\varepsilon$ внутри диэлектрика.

Простота этих примеров позволяет легко впасть в заблуждения, вроде того, что индукция вообще не зависит от диэлектрика и равна полю, которое создавали бы свободные заряды в вакууме. Рассмотрим диэлектрический шар в однородном внешнем поле $\mathbf{E}_0$. Шар поляризуется, и на его поверхности возникают поляризационные заряды; внутри поле будет ослаблено. Попробуем аналогию с металлическим шаром. Для него снаружи поле было суммой внешнего $\mathbf{E}_0$ и дипольного, а внутри нулевое.

Теперь внутри, конечно, не нуль; предположим, что будет однородное поле $\mathbf{E}_1$ (рис. 3.4). Тогда вектор поляризации $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}_1$ и дипольный момент шара $\mathbf{p} = 4\pi R^3 \chi \mathbf{E}_1/3$.

Потенциал снаружи у поверхности: $\varphi(R+0) = -E_0 R \cos \theta + p \cos \theta / R^2$. Внутри $\varphi(R-0) = -E_1 R \cos \theta$. Приравняем их и учтем выражение для p ; имеем $E_1 = E_0 / (1 + 4\pi\chi/3) = 3E / (\varepsilon + 2)$. Поскольку $\varepsilon > 1$, поле ослабляется, но отнюдь не в ε раз; соответственно индукция $D = \varepsilon E = 3\varepsilon E_0 / (\varepsilon + 2)$ вовсе не равна полю свободных зарядов E_0 .

Неверно, что индукция не зависит от поляризационных зарядов; правильнее сказать, что поляризационные заряды **не являются ее источниками** (не входят в теорему Гаусса). Отсюда следует, что на поверхности раздела диэлектриков нормальная (перпендикулярная) составляющая $\mathbf{D}$ остается непрерывной. Это легко показать, поместив границу внутрь замкнутой поверхности и применив теорему: поток $\mathbf{D}$ нулевой, так как нет свободных зарядов. Параллельная (тангенциальная) компонента $\mathbf{D}$ может испытывать скачок на границе раздела. Наоборот, тангенциальная компонента обычного поля $\mathbf{E}$ непрерывна (иначе можно сделать вечный двигатель, гоняя заряд по замкнутому контуру вблизи поверхности). Выпишем условия на границе раздела:

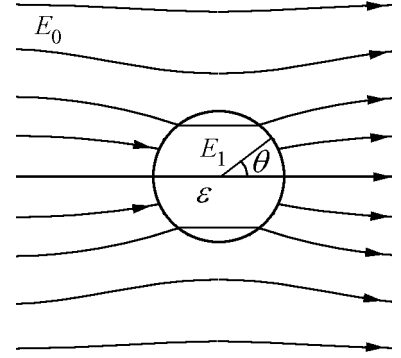


Рис. 3.4.

$$D_{n1} = D_{n2} \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \quad (3.8)$$

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2} \quad . \quad (3.9)$$

Второе условие мы использовали уже в прошлом примере, приравнявая потенциалы.

Еще часто думают, что диэлектрик всегда ослабляет поле внутри себя, а снаружи не меняет. Но у полюсов того же шара снаружи поле усиливается: подобно металлу, диэлектрик собирает на себя часть силовых линий и выдает их с другой стороны. Проводник можно трактовать как диэлектрик с $\varepsilon = \infty$.

Не лишне добавить, что индукция $\mathbf{D}$ – это не настоящее поле, а величина, вводимая для удобства, чтобы решать задачи. Настоящее среднее поле в веществе $\mathbf{E}$; в частности потенциал φ связан именно с ним: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$.

Интересно поле внутри полости в диэлектрике. Если имеется узкая щель поперек поля, то по первому из условий (3.9) внутри $E_{in} = \varepsilon E = E + 1 \cdot 4\pi P$; в случае узкой продольной щели из второго условия $E_{in} = E = E + 0 \cdot 4\pi P$. Для сферической полости будет нечто среднее, а именно

$$E + 4\pi P/3 = E + (\varepsilon - 1)E/3 = (\varepsilon + 2)E/3.$$

Покажите это в качестве упражнения. Коэффициент при $4\pi P$ не так важен, но ясно, что поле в полости **больше** среднего в диэлектрике. Примерно такое поле действует на молекулу внутри вещества. Тогда дипольный момент этой молекулы $p = \alpha(\varepsilon + 2)E/3$, а дипольный момент единицы объема – вектор поляризации $\mathbf{P}$ – будет $n\alpha(\varepsilon + 2)E/3$.

Он также равен $(\varepsilon - 1)E/4\pi$, откуда получаем формулу Клаузиуса-Мосотти, она же Лорентц-Лоренца:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi n\alpha}{3} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{1 + 8\pi n\alpha/3}{1 - 4\pi n\alpha/3}.$$

При большой плотности n проницаемость ε может быть гораздо больше, чем примитивное приближение $1 + 4\pi n\alpha$ (знаменатель может быть близок к нулю: в конденсированных веществах доля объема, занимаемая молекулами, $n\alpha \sim 1$). В некоторых кристаллах – сегнетоэлектриках – достигается ε порядка 10000.

Рассмотрим конденсатор, заполненный диэлектриком с проницаемостью ε . При заряде q поле будет $E = 4\pi q/\varepsilon S$, напряжение $V = 4\pi qd/\varepsilon S$. Емкость $C = q/V = \varepsilon S/4\pi d$ возросла в ε раз. (Поэтому-то некоторые конденсаторы имеют неожиданно, для их размеров, большую емкость).

Если на конденсаторе имелось напряжение V , то увеличение заряда на Δq требует работы $\Delta A = V\Delta q$, а работа по зарядке конденсатора от нуля

$$A = \int_0^q V dq = \frac{1}{C} \int_0^q q dq = \frac{q^2}{2C}.$$

Эта формула не чувствительна к присутствию диэлектрика. Учитывая теперь зависимость C от ε , получим, что при том же заряде q (который определяет индукцию D) энергия уменьшается в ε раз, так что на 1 см^3

$$w = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \quad (3.10)$$

Второе равенство показывает, что при заданном напряжении V (которое определяет поле E) энергия конденсатора с диэлектриком в ε раз больше. Выражение $w = \varepsilon E^2/(8\pi)$ нетривиально. Раз настоящее среднее поле – это E , как будто должна быть энергия $E^2/8\pi$. Здесь влияют два фактора: средний квадрат больше квадрата среднего, а кроме того, w по смыслу вычисления включает работу растяжения диполей. Например, в газе уместно пренебречь концентраторами поля типа Клаузиуса-Мосотти; электрическая энергия $w_e = E^2/8\pi$, а упругая $w_y = nkx^2/2$, если диполи растягиваются как пружинки. Но $eE = kx$, $w_y = neEx/2 = npE/2 = n\alpha E^2/2 = (\varepsilon - 1)E^2/8\pi$. Полная $w = w_e + w_y = \varepsilon E^2/8\pi$.

Силы в диэлектриках тоже изменяются. Возьмем конденсатор с вертикально расположенными пластинами размера $a \times b$, частично заполненный (снизу до уровня x) жидким диэлектриком. Емкость его

$$C(x) = \frac{\varepsilon xb}{4\pi d} + \frac{(a-x)b}{4\pi d} = C_0 \cdot \left(1 + \frac{(\varepsilon - 1)x}{a}\right).$$

Зарядим конденсатор зарядом q . При смещении уровня жидкости на dx изменение энергии $dU = (dU/dx) \cdot dx$. Сила $F = -dU/dx = (q^2/2C^2) \cdot dC/dx$, или $(V^2/2) \cdot C_0(\varepsilon - 1)/a =$

$(\varepsilon - 1) \cdot (E^2/8\pi) \cdot bd$. Диэлектрик втягивается в конденсатор (сила положительна, энергия уменьшается при увеличении x). Можно усмотреть разность электрических давлений, приложенную на площади bd : E одинаково, сверху $E^2/8\pi$, снизу $\varepsilon E^2/8\pi$. Обратите внимание, что проводник (меньших габаритов) тоже втягивался бы, но по другой причине: появились бы заряды на верхней грани. Диэлектрик этих зарядов не имеет (E параллельно поверхности); у него зато диполи втягиваются в поле (в нижней части конденсатора, где поле неоднородно).

Если начать с формулы $U = CV^2/2$, считая V постоянным, сила будет другого знака (при втягивании энергия растет). Это потому, что не учтена работа источника, поддерживающего разность потенциалов V : $\Delta A = V\Delta q = V^2\Delta C$. Если ее учесть, все будет в порядке.

Уменьшенное значение энергии $q^2/2C_0\varepsilon$ мы должны получить, растягивая заряженный конденсатор, залитый диэлектриком. Значит, при том же заряде q сила притяжения пластин уменьшится в ε раз. Это верно и для любых зарядов в неограниченной диэлектрической среде.

В заключение напомним основные уравнения в присутствии диэлектриков:

$$\oint_S (\mathbf{D} d\mathbf{S}) = 4\pi q_{\text{своб}} \quad \text{по любой замкнутой поверхности } S, \text{ или} \quad \text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{своб}}$$

$$\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0 \quad \text{по любому замкнутому контуру } L, \text{ или} \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (3.11)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

Это – два из **уравнений Максвелла** (случай электростатики); последнее равенство называют не уравнением, а материальным (в смысле: относящимся к материалу) соотношением. Подразумевается, что на границах между различными диэлектриками выполняются условия (3.9). Можно вместо поля перейти к потенциалу. В наиболее важном случае однородного диэлектрика (или для участка пространства, занятого таковым)

$$\varepsilon \Delta \varphi = -4\pi \rho_{\text{своб}}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (3.12)$$

$$\text{причем} \quad \varepsilon_1 (\nabla \varphi)_{n1} = \varepsilon_2 (\nabla \varphi)_{n2} \quad \text{на границах диэлектриков.} \quad (3.13)$$

По существу, в однородном диэлектрике решается то же уравнение Пуассона (или Лапласа в областях, где нет свободных зарядов), что использовалось и в вакууме, а существенно другими будут граничные условия. Если диэлектрик неоднороден, коэффициент ε будет дифференцироваться: вместо $\varepsilon \Delta \varphi$ будет $\text{div}(\varepsilon \nabla \varphi)$ (появятся объемные поляризационные заряды).

Дальше мы увидим, как уравнения Максвелла изменятся в более общем случае и как к ним добавятся новые.

Рекомендуемая литература та же, что упоминалась в предыдущей главе.

Глава 4

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

4.1 Электрический ток. Сопротивление. Закон Ома

Ток через некоторую площадь S (допустим, сечение проводника) определяется, как заряд, проходящий сквозь S в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

В СИ как раз основная единица не кулон, а ампер: $1 \text{ А} = 1 \text{ Кл/с} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГС}$. **Плотность тока** j – это ток через 1 см^2 ,

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S}, \quad \text{или} \quad I = \int_S (j d\mathbf{S}).$$

Поверхность S , через которую идет ток, обычно (но не всегда) **не** замкнутая. Из второй формулы видно, что $\mathbf{j}$ – это вектор; первая же определяет, собственно, перпендикулярную к площадке $\Delta \mathbf{S}$ компоненту $\mathbf{j}$. Ток I – скаляр, тем более что S не обязательно плоская (для которой велико искушение считать ток вектором). Например, ток может растекаться вообще во все стороны от заряда, помещенного в проводящую среду. Легко заметить, что

$$\mathbf{j} = nev,$$

где n – концентрация шт/см³ носителей заряда величины e ; $\mathbf{v}$ – их средняя скорость.

В поле $\mathbf{E}$ на электрон действует сила $e\mathbf{E}$. За время t электрон наберет скорость $v = eEt/m$. В каждом нормальном проводнике имеется время свободного пробега τ , после чего происходит соударение с решеткой и электрон «забывает» направление скорости. Средняя скорость $\langle v \rangle$ будет порядка $a\tau = eE\tau/m$. Плотность тока $j = ne\langle v \rangle = (ne^2\tau/m) \cdot E = \sigma E$. **Электропроводность** σ – свойство вещества – измеряется (в СГС) в обратных секундах. Равенство

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

называется **законом Ома** в **дифференциальной** форме.

В проводе сечения S ток $I = jS$, напряжение $V = EL$, так что

$$I = V \cdot (\sigma S/L) = V/R.$$

Это – **интегральная** форма закона Ома. Сопротивление $R = L/\sigma S$ в СГС имеет размерность обратной скорости (с/см). Удельное сопротивление $\rho = 1/\sigma$.

В металле, казалось бы, из-за тесноты электропроводность должна быть мала (сопротивление велико). Но оказывается, что электроны рассеиваются не на атомах, а на колебаниях решетки. Поэтому сечение рассеяния $s \sim x^2$ (x – амплитуда колебаний атомов) гораздо меньше квадрата атомных размеров. Энергия колебаний (т.е. x^2) пропорциональна абсолютной температуре T . Поэтому в чистых металлах электропроводность обратно пропорциональна T . Для меди при нормальных условиях $\sigma = 5,5 \cdot 10^{17}$ 1/с. Провод в 1 м сечением 1 мм² имеет сопротивление $2 \cdot 10^{-14}$ с/см.

Форма закона Ома в СИ такая же, как в СГС; единица сопротивления Ом = В/А = 1/(9 · 10¹¹) с/см; сопротивление рассмотренного выше провода будет $2 \cdot 10^{-2}$ Ом, т.е. при токе 1 А на проводе будет напряжение 0,02 В. Медь – один из лучших проводников.

Рассмотрим ток через замкнутую поверхность S , ограничивающую объем V :

$$I = \oint_S (\mathbf{j} d\mathbf{S}) = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV,$$

(второе равенство – это формула Гаусса – Остроградского). По закону сохранения заряда этот ток есть скорость убыли заряда в объеме:

$$\oint_S (\mathbf{j} d\mathbf{S}) = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad \text{или} \quad \int_V \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0. \quad (4.1)$$

Поскольку это выполняется для любого объема, получаем закон сохранения заряда в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (4.2)$$

В (4.1) замкнутая поверхность S может, например, заключать в себе пластину конденсатора, разряжающегося через собственный диэлектрик или внешнюю цепь. Если же ограничиваться стационарным случаем, когда заряды и токи не зависят от времени, закон сохранения заряда упрощается:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (4.3)$$

Уравнения вида (4.2, 4.3) иногда называют **уравнениями неразрывности** (в данном случае – для тока), по аналогии с гидромеханикой. Если ρ есть плотность жидкости, $\mathbf{v}$ – ее скорость, то всегда выполняется (4.2), где $\mathbf{j}$ заменяется на поток $\rho \mathbf{v}$. В гидромеханике важную роль играет случай несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$), когда уравнение неразрывности упрощается до $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, аналогичного (4.3).

Пусть два хороших проводника помещены в среду, электропроводность которой σ сравнительно невелика. На проводниках имеются заряды $\pm q$, создающие поле $\mathbf{E}$ и, значит, ток $I = \oint \sigma \mathbf{E} d\mathbf{S} = \sigma \cdot 4\pi q$. Напряжение $V = q/C$. Получаем $I = (4\pi\sigma C) \cdot V$, то есть сопротивление R связано с емкостью C :

$$4\pi\sigma RC = 1 \quad .$$

Если измерить R между проводниками, тогда легко находится и C (которую измерять обычно сложнее).

Оценим время Δt рассасывания скопления избыточного заряда Δq внутри однородного проводника. Ток опять будет $\sigma \cdot 4\pi \Delta q = dq/dt \sim \Delta q/\Delta t$. Время $\Delta t = 1/(4\pi\sigma)$. Даже в таких плохих проводниках, как дистиллированная вода ($\sigma \sim 10^{-6} \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1} \simeq 10^6 \text{ 1/сек}$) это будет мгновенно, а в хороших диэлектриках могут быть часы. Зная время разрядки статических зарядов, можно оценить электропроводность изоляторов. Абсолютных изоляторов не бывает, в отличие от абсолютных проводников. В любом изоляторе, хотя бы в малом количестве, имеются носители заряда, которые и приводят к постепенной разрядке.

4.2 Сторонняя эдс. Источники тока. Правила Кирхгофа

В электростатике работа $\mathbf{E}$ по замкнутому контуру нулевая. Аналогично при катании на санках нельзя по замкнутому пути все время ехать под действием тяжести. Нужно внешнее воздействие (например, канат подъемника), чтобы вернуть сани на гору.

В источниках тока именно и действует внешняя, или сторонняя, сила неэлектростатического происхождения. Например, в батареях сторонние силы возникают за счет химических процессов. Работа сторонней силы в расчете на единичный заряд, прошедший через источник, называется **электродвижущей силой**, кратко эдс. Размерность эдс – как у напряжения. «Неправильным» названием не надо смущаться, так как еще недавно кинетическую энергию называли живой силой.

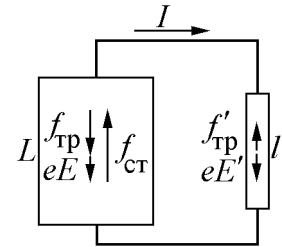


Рис. 4.1.

Вне источника трение (сопротивление) уравнивается электрическим полем. Внутри, поскольку $\oint (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0$, электрическое поле направлено против тока, а движение зарядов против трения и поля $\mathbf{E}$ обеспечивает эдс, т.е. сторонняя сила (рис. 4.1).

Обозначаем стороннюю силу на один электрон $f_{\text{ст}}$, силу трения в источнике $f_{\text{тр}}$. Постоянство тока требует равновесия сил:

$$f_{\text{ст}} = eE + f_{\text{тр}} \quad .$$

Деля на e и умножая на толщину L слоя, где генерируется сторонняя сила в источнике, получаем

$$f_{\text{СТ}}L/e = EL + f_{\text{ТР}}L/e .$$

EL – это напряжение, набранное в источнике; из потенциальности электрического поля оно такое же, как $E'l$ на внешней цепи. Если источник замкнут на сопротивление R , то напряжение на этом сопротивлении $E'l = RI$ по закону Ома. Так как в сопротивлении уравновешены электрическая сила и трение: $eE' = f'_{\text{ТР}}$, это же напряжение RI можно записать как $E'l = f'_{\text{ТР}}l/e$. Поэтому слагаемое $f_{\text{ТР}}L/e$ естественно обозначить rI ; r называется **внутренним сопротивлением** источника. Наконец, $f_{\text{СТ}}L/e$ – это и есть эдс $\mathcal{E}$. Выходит так называемый закон Ома для замкнутой цепи:

$$\mathcal{E} = I \cdot (R + r) .$$

Мощность, развиваемая при прохождении тока I через ветвь, на которой имеется напряжение V , будет $N = I \cdot V$, поскольку V – это работа на единичный заряд, а I – заряд в единицу времени. Если ток идет через сопротивление R , получаем закон Джоуля-Ленца:

$$N = RI^2 = V^2/R$$

Для простейшей замкнутой цепи на сопротивлении нагрузки R

$$N = \mathcal{E}R/(R + r)^2 .$$

Она достигает максимума при $R = r$. Максимум кпд равен 1 при $R = \infty$.

В любых цепях постоянного тока выполняются **правила**, или **законы Кирхгофа**:

$$\begin{aligned} \sum I_i &= 0 && \text{в любом узле} && (1 \text{ правило}) \\ \sum \mathcal{E}_i &= \sum (RI)_i && \text{по любому замкнутому контуру} && (2 \text{ правило}) . \end{aligned}$$

Правило 1 выражает ненакопление заряда в узлах, 2 – обобщение закона Ома для замкнутой цепи. Разумеется, необходим учет знаков.

Последовательное соединение сопротивлений: $R = R_1 + R_2$. Параллельное: $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$. Это легко получить из законов Кирхгофа. Важно, что, как и с конденсаторами, бывают **никакие** соединения, не сводящиеся к параллельным и последовательным. Для таких сложных цепей и приходится применять законы Кирхгофа. Уравнений легко получить больше, чем неизвестных, поэтому уравнения надо подбирать из соображений простоты и независимости.

Разберем пример. На схеме рис. 4.2 сопротивления r_1 и r_2 можно понимать как внутренние для источников $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, а R – общая нагрузка. Допустим, что к лампочке подсоединили параллельно две разные батарейки. Законы Кирхгофа имеют вид:

$$I = I_1 + I_2 , \quad \mathcal{E}_1 = r_1 I_1 + RI , \quad \mathcal{E}_2 = r_2 I_2 + RI .$$

Решение:

$$I_1 = \frac{(R + r_2)\mathcal{E}_1 - R\mathcal{E}_2}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}, \quad I_2 = \frac{(R + r_1)\mathcal{E}_2 - R\mathcal{E}_1}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}, \quad I = \frac{r_2\mathcal{E}_1 + r_1\mathcal{E}_2}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Иногда полезны модификации этих законов. В **методе контурных токов** разыскиваются токи не в ветвях, а в контурах. Токи в ветвях – это суммы контурных токов для всех контуров, содержащих данную ветвь. Уравнения для контурных токов J_1 и J_2 для той же схемы (рис. 4.3):

$$\mathcal{E}_1 = r_1J_1 + R(J_1 + J_2), \quad \mathcal{E}_2 = r_2J_2 + R(J_1 + J_2).$$

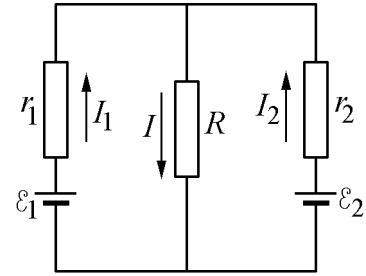


Рис. 4.2.

Видно, что уравнений получается меньше. Для такой простой схемы выгода невелика, но в более сложных случаях сокращение числа уравнений очень помогает. Конечно, реальные токи через сопротивления получатся те же самые (здесь контурные токи J_1 и J_2 совпадают с токами в боковых ветвях I_1 и I_2 , а ток через нагрузку – их сумма).

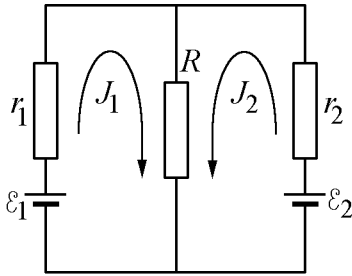


Рис. 4.3.

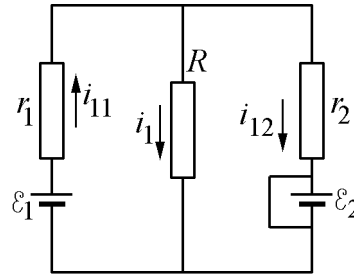


Рис. 4.4.

В **методе суперпозиции**, когда имеется много батареек, находится вклад в суммарный ток от каждой из них, причем остальные заменяются внутренними сопротивлениями (в простейшем случае, когда внутренние сопротивления малы, батарейки просто закорачиваются). Например, закоротим $\mathcal{E}_2$ (рис. 4.4). Это настолько упрощает схему, что уже можно применять «последовательно-параллельные» формулы. Сразу находим три тока, порождаемых первой батареей (о чем говорит индекс 1):

$$i_{11} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + Rr_2/(R + r_2)} = \frac{\mathcal{E}_1(R + r_2)}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)},$$

$$i_1 = \frac{i_{11}r_2}{R + r_2} = \frac{\mathcal{E}_1r_2}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}, \quad i_{12} = \frac{i_{11}R}{R + r_2} = \frac{\mathcal{E}_1R}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Теперь надо убрать закоротку $\mathcal{E}_2$ и закоротить $\mathcal{E}_1$. Для токов i_{22} , i_2 , i_{21} , созданных второй батареей, получатся такие же формулы с очевидными заменами. И, наконец, надо сложить действие батареек. Например, ток в нагрузке

$$I = i_1 + i_2 = \frac{\mathcal{E}_1r_2}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)} + \frac{\mathcal{E}_2r_1}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Разумеется, это совпадает с током, полученным из обычных уравнений Кирхгофа.

Цепи из большого числа сопротивлений порождают достаточно сложные системы уравнений. Иногда рассматриваются даже задачи с бесконечной сеткой сопротивлений, хотя бы квадратной (похожей на проволочную изгородь) или кубической. На масштабах, больших по сравнению с размером ячейки, сетка эквивалентна некоторой однородной среде. Интересное явление происходит, когда часть сопротивлений (выбранных случайно) обрывают. Аналитические и компьютерные расчеты показывают, что для каждой решетки существует критическая доля целых связей x_c , при которых решетка еще проводит ток (т.е. существует бесконечный кластер). Например, для квадратной решетки $x_c = 0,5$, а для простой кубической $x_c = 0,247$. Сейчас для таких задач развита теория **протекания**, или **перколяции**. При малых превышениях $x - x_c \ll x_c$ эффективная проводимость системы изменяется степенным образом: $\sigma \propto (x - x_c)^t$, причем $t \simeq 1,33$ для квадратной решетки и $t \simeq 1,8$ для кубической. Подобные же закономерности наблюдаются и для других **фазовых переходов**, а соответствующие показатели степени называются **критическими индексами**. Отметим, что кластеры, образующиеся ниже порога протекания, фрактальны.

Как и для предыдущих глав, рекомендуется литература [1, 2, 3].

Литература

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: ГИТТЛ, 1957. 620 с.
2. Парселл Э. Электричество и магнетизм. Берклевский курс физики, т. 2. М.: Наука, 1975. 440 с.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Электричество и магнетизм. Фейнмановские лекции по физике, вып. 5. М.: Мир, 1966. 296 с.