

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Курс лекций для ММФ

А.А. Васильев, А. П. Ершов

1 семестр

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

20 августа 2006 г.

Глава 5

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

С древности известны постоянные магниты. Их особые свойства объясняются присутствием **магнитного** поля \mathbf{H} .

При изучении магнитного поля полезна аналогия с электрическим. Магнитное поле, разумеется, не точно подобно электрическому (тогда в нем не было бы надобности), а служит дополнением к \mathbf{E} , вызывая явления не в точности обратные, а как бы «перпендикулярные». Далее мы увидим, что \mathbf{E} и \mathbf{H} – это проявления (приблизительно – разные компоненты) единого **электромагнитного** поля.

5.1 Сила Лоренца

Увидеть действие магнитного поля можно в опыте с осциллографом. Это прибор, в котором пучок электронов рисует графики на экране. Можно, в частности, добиться, чтобы на экране была видна яркая точка. Значит, все электроны летят с той стороны стекла и попадают в одно и то же место. Если рядом окажется источник электрического поля, например заряд, пятно будет отклоняться либо к нему, либо от него. Это понятно и не очень интересно. Но если поднести к экрану плоский магнит¹, мы увидим неожиданную вещь. Пятно отклоняется вбок! Когда магнит лежит на ладони снизу экрана, пятно съезжает, например, влево. Чем ближе магнит, тем сильнее этот сдвиг.

Но может быть, вокруг того, что мы называем магнитом, есть электрическое поле, параллельное его плоскости, которое и толкает электроны вбок? Это можно проверить, вращая магнит вокруг вертикальной оси. Электрическое поле при этом тоже должно крутиться вместе с зарядами, но на сдвиг пятна повороты эти никак не влияют. Такой эксперимент ясно показывает, что данный предмет создает нечто, связанное с нормалью к своей плоскости, так как только эта ось при вращении неподвижна. Если магнит перевернуть, пятно отклонится в обратную сторону. При данной ориентации магнита

¹Здесь слово «магнит» – только условное бытовое обозначение, раз мы пока толком не знаем, что оно значит. Можно было бы сказать «продолговатый тяжелый черный брусок, подвергнутый специальной обработке и полученный из Института ядерной физики», но это выйдет длинно.

не важно, подносить его сверху или снизу. Значит, речь идет о векторе, который подобно гвоздю торчит из плоскости бруска. Этот вектор действует на электрон, отклоняя его как бы дважды вбок, то есть перпендикулярно как своему собственному направлению, так и скорости электрона. Вот эта субстанция и называется магнитным полем.

Поле \mathbf{E} определялось, как сила, действующая на единичный заряд. Так же можно ввести и поле \mathbf{H} . Опыты, подобные описанному выше, показали, что на движущийся в пустоте со скоростью \mathbf{v} заряд q действует так называемая **сила Лоренца**:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (5.1)$$

(Квадратные скобки – знак векторного произведения; порядок сомножителей важен!). В (5.1) буква c – так называемая электродинамическая постоянная, имеющая размерность скорости. Экспериментальная ее величина (на август 1973) была $2,99792458(12) \cdot 10^{10}$ см/с. Пока мы не можем доказать (но не видно и смысла скрывать), что это – скорость света, а шире – скорость электромагнитных волн². Поскольку размерности скоростей сокращаются, магнитное поле имеет ту же размерность, что и электрическое (в СГС). Величина же электродинамической постоянной обеспечивает равенство единиц измерения полей. Единица измерения магнитного поля в СГС называется **эрстед** (э); по историческим причинам такая же точно единица для электрического поля осталась без названия. Если присутствует еще и электрическое поле, в (5.1) добавится уже знакомое слагаемое $q\mathbf{E}$.

В системе СИ ни размерности, ни единицы полей \mathbf{E} и \mathbf{H} не совпадают. Мало того, что в формуле не будет скорости c :

$$\mathbf{F} = q \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}],$$

но и вместо магнитного поля войдет **магнитная индукция** \mathbf{B} ; единица измерения B называется тесла (Тл, $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ гаусс} = 10^4 \text{ эрстед}$). Отложим прояснение этой ситуации до п. 5.6; пока заметим, что для магнетизма система СИ крайне неудобна.

В электрическом поле заряд двигается примерно как масса в поле тяжести (в однородном – по параболе, в центральном кулоновском – по кеплеровым орбитам. Только случай отталкивания зарядов одного знака будет чем-то новым, но тоже получается гипербола, только центр поля будет в другом фокусе). Чтобы освоиться с понятием магнитного поля, для начала выясним, как движется частица в однородном магнитном поле \mathbf{H} . Пусть вектор поля направлен по оси z . Сила Лоренца перпендикулярна и скорости, и магнитному полю и всегда лежит в плоскости xy . Проще всего, если скорость \mathbf{v} лежит в этой же плоскости. Поперечная скорости сила величины v не изменяет, а только поворачивает вектор скорости. Получаем движение по кругу:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{qvH}{c}, \text{ откуда ларморовский радиус } R = \frac{mvc}{qH}.$$

²Напомним, что с 1983 г. по международному соглашению скорость света зафиксирована: $c = 299792458$ м/с точно.

Период обращения $T = 2\pi R/v = 2\pi mc/qH$ и частота $\omega = qH/mc$ не зависят от скорости. Это используется в циклотронах, где заряженные частицы летают по круговым орбитам в магнитном поле и дважды за период разгоняются переменным напряжением постоянной частоты.

Пусть теперь скорость имеет составляющую v_z вдоль оси z . Параллельная \mathbf{H} скорость не влияет на силу; результатом будет движение по винтовой линии радиуса $mv_{\perp}c/qH$ вокруг силовой линии магнитного поля.

5.2 Закон Био – Савара. Векторный потенциал магнитного поля

В старину, когда не было осциллографов, обнаружить магнитное поле можно было только по отклонению стрелки компаса. Долгое время «источниками магнетизма» считались исключительно постоянные магниты. Как мы увидим ниже, в п. 5.6, постоянные магниты, и тем более их взаимодействие – это довольно сложные вещи, почему долгое время и не удавалось построить теорию магнитных явлений. Однако в 1820 г. Эрстед обнаружил, что электрический ток, протекающий по проводам, также действует на магнитную стрелку. Подобно тому, как \mathbf{E} создается зарядами, \mathbf{H} может производиться движением зарядов – **электрическими токами**. Сразу после Эрстеда произошел решающий сдвиг. Вместо магнитов стали изучать взаимодействие проводов с током, и в том же 1820 г. были сформулированы закон Био – Савара и закон Ампера³.

Естественно воспользоваться примером электростатики. Но провод – объект по меньшей мере линейный, совсем непохожий на точечный заряд. Поэтому разумно разбить провод на малые отрезки – **элементы тока** и рассмотреть их по отдельности. Сейчас мы рассматриваем статическое (постоянное во времени) магнитное поле. Поэтому провода, а с ними и их элементы, предполагаются неподвижными, а токи – постоянными. Эти предположения не особенно ограничительны: многие выводы сохранятся и для бытового переменного тока.

Казалось бы, удобнее начать со взаимодействия движущихся точечных зарядов. Против ожидания, оно оказывается заметно сложнее, так как слишком близко к кулоновскому: основная сила для двух зарядов – электрическая, и на ее фоне трудно заметить вклад магнитного взаимодействия. Провод не заряжен (заряды обоих знаков компенсируют друг друга), поэтому электрическая сила отсутствует; но ток имеется, так как движутся заряды одного знака (обычно электроны). Далее, взаимодействие точечных зарядов в принципе нестационарно из-за их движения. Наконец, практически все токи в технике идут вдоль тонких проводов, реже – распределены по объему проводников. Сосредоточить в пустоте движущиеся заряды, которые

³В п. 5.6 будет показано, что постоянный магнит – это очень своеобразный вариант постоянно циркулирующего тока, не требующего розеток и батареек (молекулярный ток).

давали бы заметное магнитное поле – это задача совсем не простая.

Плотность тока j в магнетизме аналогична плотности заряда ρ в электростатике. Если \mathbf{E} создается зарядами $dq = \rho dV$, то \mathbf{H} должно определяться величинами типа $j dV$. Поскольку это векторы, а должен еще входить радиус–вектор \mathbf{R} из dV в точку наблюдения, естественно ожидать возникновения формулы с векторным произведением. Предположим, что искомое выражение для \mathbf{H} похоже, насколько это возможно, на известное нам кулоновское для поля \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int \frac{\rho \mathbf{R} dV}{R^3}, \\ \mathbf{H} &= \int \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{R}] dV}{cR^3}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В (5.1) добавлена электродинамическая постоянная c , чтобы «исправить» размерность: $\mathbf{j} = nev$; ne – это по размерности плотность заряда. Интегралы берутся по всему пространству, заполненному зарядами либо токами.

Важен случай, когда ток сосредоточен в проводах несущественной толщины. Тогда $\mathbf{j} \parallel d\mathbf{L}$ – элементу длины провода, $\mathbf{j} dV = j S d\mathbf{L} = I d\mathbf{L}$ и формула упрощается: поле провода с током I

$$\mathbf{H} = \frac{I}{c} \cdot \int \frac{[d\mathbf{L} \times \mathbf{R}]}{R^3}. \quad (5.2)$$

Обе формулы (5.1, 5.2) для магнитного поля, аналогичные в электростатике суммированию кулоновских полей распределенных зарядов, называются **законом Био–Савара** (иногда Био–Савара–Лапласа). Разумеется, никаким доказательством наши рассуждения по аналогии назвать нельзя. Но они иллюстрируют, как в физике возникают гипотезы. Далее их проверяют в эксперименте. Закон Био–Савара экспериментом подтверждается.

Примеры.

Поле кольца радиуса R с током I на расстоянии z от центра: элемент поля $dH = IdL/c(R^2 + z^2)$; надо взять компоненту вдоль оси $\rightarrow H = 2\pi IR^2/c(R^2 + z^2)^{3/2}$. В центре H максимально (у заряженного кольца в центре $E = 0$). Силовая линия, проходящая через центр – это попросту ось кольца (рис. 5.1).

Поле прямого провода на расстоянии r :

$$H = \frac{Ir}{c} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{I}{cr} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^{3/2}} = \frac{2I}{cr}.$$

Похоже на электрическое поле заряженной нити, но направлено не от провода, а перпендикулярно к расстоянию r . Силовые линии – круги, «надетые» на провод (рис. 5.2). Вернемся к кольцевому току. Вблизи провода его кривизна несущественна, и линии поля – также приблизительно круговые. Между крайними случаями прямой осевой линии и малых кругов вблизи провода располагаются линии «общего положения» (рис. 5.1).

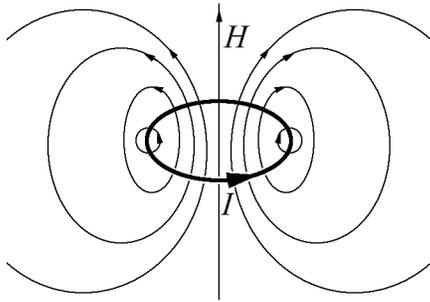


Рис. 5.1.

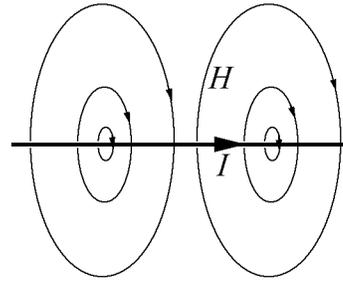


Рис. 5.2.

Вообще мы увидим, что линии H в простых случаях замкнуты (если не уходят на ∞). Поля, в которых возможны замкнутые силовые линии (таково поле H), называют **соленоидальными**, в противоположность потенциальным полям, типа электростатического⁴.

Однако не следует думать, что силовые линии магнитного поля всегда замкнуты. Это – распространенное заблуждение, проникшее даже в учебники. Замкнуты линии H , например, у кольцевого витка с током I (рис. 5.3). Но если пропустить через виток провод с малым током i , добавится малое поле h , перпендикулярное начальному. Силовая линия суммарного поля станет спиралью, бесконечно навивающейся на кольцо, и замкнуться может только случайно. При «общем» соотношении токов и при произвольной их геометрии практически все линии будут незамкнуты, причем вполне заметно. Если же специально добиваться замкнутости, это свойство легко разрушится даже малыми внешними полями. Следовательно, в самом благоприятном случае замкнутость – редкое исключение, примерно как рациональные числа в континууме.

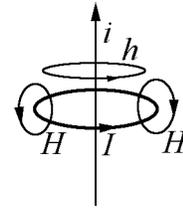


Рис. 5.3.

Направление магнитного поля проще всего определять по правилу буравчика (правого винта): если вворачивать винт, штопор и т.п. вдоль тока, точки на головке винта либо ручке штопора вращаются вдоль магнитного поля.

Трубу с аксиальным током i на продольный см можно разрезать на кольца с токами idz :

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi idz R^2}{c(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi R^2 i}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{4\pi i}{c} = \frac{4\pi I}{cL} .$$

Пока можно только сказать, что такое поле на оси трубы, но далее обнаружится, что поле в трубе однородно. Для катушки длины L с током I можно считать $i = NI/L$, где N – число витков, и внутри катушки поле $H = 4\pi NI/cL$.

Плоская шина ширины L : на расстоянии h над ней поле

$$H = \frac{2I}{cL} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h dx}{h^2 + x^2} = \frac{2\pi I}{cL} = \frac{2\pi i}{c} ,$$

где $i = I/L$ – погонный ток. Опять похоже на E плоскости, но не перпендикулярно ей,

⁴Это, конечно, не определение соленоидальности. Определение дано ниже, в п. 5.4.

а вдоль поверхности: силовая линия обходит шину вокруг тока.

Две параллельных плоских шины с противоположно направленными токами (т.е. соединенные на одном их концов): поле

$$H = \frac{4\pi I}{cL} = \frac{4\pi i}{c} \text{ между шинами, } H = 0 \text{ в остальном пространстве.}$$

Напоминает электрическое поле плоского конденсатора. Вместо плотности поверхностных зарядов σ входит $i/c = I/cL$ – погонный (на единицу ширины) ток, разделенный на c для размерности.

Мы видели, что в электростатике полезным понятием был потенциал. Иногда магнитное поле тоже описывают скалярным потенциалом ψ : $H = -\nabla\psi$. (Минус здесь необязателен, так как скалярный потенциал для магнитного поля не имеет энергетического смысла, и его знак не важен. Однако для единообразия обычно минус пишется). Например, для поля прямого провода в цилиндрических координатах $\psi = -(2I/c)\alpha$, где α – аксиальный угол. Действительно, вычисляем градиент этого выражения по формулам, приведенным в приложении к главе «Электростатика»:

$$(\nabla\psi)_r = \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \quad (\nabla\psi)_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{2I}{cr}, \quad (\nabla\psi)_z = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0.$$

В декартовых координатах $\psi = -(2I/c) \arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2}) = -(2I/c) \arctg(x/y)$, если ось z совпадает с проводом; убедитесь, что градиент этого выражения тоже дает правильное поле.

Заметим, что найденный потенциал ψ (в отличие от электрического потенциала φ) неоднозначен: угол определен с точностью до 2π . Этот недостаток имеет общий характер и следует из геометрии силовых линий магнитного поля. В данном случае (в пространстве вокруг прямого провода) это просто круги. Интегрируя поле \mathbf{H} по замкнутому контуру, совпадающему с силовой линией, получим отнюдь не нуль. Значит, совершив обход вокруг провода, мы не вернемся к исходному значению потенциала. Поэтому скалярный магнитный потенциал отнюдь не равноценен электрическому, а пригоден только как «полуфабрикат» для последующего вычисления магнитного поля.

Кроме того, мы увидим в п. 5.4, что в областях пространства, где протекают токи, имеется ненулевой ротор поля. Так как ротор градиента равен нулю, в таких местах никакой скалярный потенциал не даст нужного результата. Поскольку без токов в магнетизме никак не обойтись, скалярный потенциал существует только в части пространства, свободной от токов⁵. Ограниченная применимость скалярного потенциала и неудивительна: магнитное поле имеет векторные источники – токи; при «записывании» информации о них в скаляр часть этой информации неизбежно потеряется.

⁵В частях пространства, где токов нет, ψ находят, решая уравнение Лапласа $\Delta\psi = 0$ с соответствующими граничными условиями.

Все же «настоящий» потенциал магнитному полю сопоставить можно, но этот потенциал – векторный. Любое⁶ магнитное поле можно представить в виде

$$\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A} = [\nabla \times \mathbf{A}]. \quad (5.3)$$

Действительно, рассмотрим элементарное поле $[\mathbf{j} \times \mathbf{R}]dV/(cR^3)$. Это можно записать также в виде

$$dV \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{R}]}{cR^3} = -\frac{dV}{c} \left[\mathbf{j} \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] = \frac{dV}{c} \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times \mathbf{j} \right].$$

Здесь dV – фиксированный элемент объема вокруг точки источника \mathbf{r}' , в которой берется \mathbf{j} , $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ протянут от источника к точке наблюдения \mathbf{r} , а производные в ∇ берутся по координатам точки наблюдения. Заменяя \mathbf{R}/R^3 на $-\nabla(1/R)$, мы попросту используем кулоновский потенциал. С другой стороны, рассмотрим выражение

$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right) = \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \mathbf{j} \right] + \frac{1}{R} [\nabla \mathbf{j}],$$

где также обе наблы дифференцируют по координатам точки наблюдения. Поскольку источник \mathbf{j} от этих координат не зависит, второе слагаемое равно нулю. Получаем

$$dV \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{R}]}{cR^3} = dV \text{rot} \left(\frac{\mathbf{j}}{cR} \right),$$

а тогда равны и интегралы:

$$\mathbf{H} = \int \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{R}]dV}{cR^3} = \text{rot} \int \frac{\mathbf{j}}{cR} dV.$$

Следовательно, мы не только показали, что существует векторный потенциал, но и нашли его конкретный вид⁷: для данного распределения токов

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{j}}{cR} dV \quad \text{или} \quad \mathbf{A} = \frac{I}{c} \int \frac{d\mathbf{L}}{R}. \quad (5.4)$$

Вторая формула аналогична (5.2) и приведена для случая, когда ток I сосредоточен в тонком проводе. Выражение (5.4) можно было бы назвать законом Био–Савара для векторного потенциала, но оно слишком похоже на электростатические выражения (2.12, 2.24) и поэтому специального названия не имеет. Заметим, что суммировать \mathbf{A} обычно проще, чем \mathbf{H} из закона Био–Савара; кроме того, векторный потенциал более непосредственно связан с токами: он направлен вдоль своего источника – элемента тока, тогда как магнитное поле поперечно создающему его элементу тока.

С другой стороны, поскольку \mathbf{A} , как и \mathbf{H} , есть вектор, экономия труда при его вычислении не так велика, как это было в электростатике со скалярным потенциалом. Во

⁶Не только статическое, рассматриваемое в этой главе, а любое вообще.

⁷Один из возможных (см. ниже), но в некотором роде основной.

многих случаях, когда присутствует симметрия, проще сразу находить поле \mathbf{H} (например, на оси кольца с током). Но мы увидим, что \mathbf{A} полезен для многих общих выводов.

Пример. Потенциал прямого провода с током I направлен вдоль тока, $\mathbf{A} = (0, 0, A_z)$. Элемент провода длиной dx создает $dA_z = Idx/(c\sqrt{x^2 + r^2})$ на расстоянии r от провода, так что

$$A_z = \frac{I}{c} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{I}{c} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + r^2} \right).$$

Этот интеграл уже встречался нам в п. 2.1, стр. 21. Не останавливаясь на совершенно подобных обоснованиях, запишем $A_z = (2I/c) \ln(r_0/r)$, где r_0 – произвольный фиксированный радиус. Проверьте, что ротор полученного \mathbf{A} направлен вокруг провода и совпадает с вычисленным ранее полем: $H_\alpha = 2I/cr$. Если мы хотим найти потенциал в точном соответствии формуле (5.4), надо аккуратно учитывать реальную длину провода (в отличие от электростатики, нужен еще вклад обратного провода, замыкающего ток). Тогда для области вблизи провода определится константа r_0 , которая имеет порядок размера контура, частью которого является прямой проводник.

Подобно электростатическому потенциалу, векторный потенциал можно находить из уравнения Пуассона, что следует из аналогии между (5.4) и (2.12, 2.24):

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi \mathbf{j}}{c}. \quad (5.5)$$

Лапласиан от вектора \mathbf{A} при этом понимается как вектор, x – компонента которого есть ΔA_x , и т.п.⁸

Мы видели, что скалярный потенциал электрического поля φ определен с точностью до постоянной. Векторный потенциал допускает еще бóльшую свободу выбора: к нему можно прибавить градиент любой скалярной функции координат, и от этого магнитное поле не изменится:

$$\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A} \equiv \text{rot}(\mathbf{A} + \nabla f).$$

Действительно, ротор всякого градиента равен нулю. Поэтому как \mathbf{A} , так и $\mathbf{A} + \nabla f$ дадут одно и то же поле. Но, разумеется, только один из множества допустимых векторных потенциалов согласуется с принципом суперпозиции (5.4).

Пример. Однородное поле напряженности H_0 , направленное вдоль оси z , может быть описано следующими векторными потенциалами (в скобках перечисляются x , y , z – компоненты):

$$\mathbf{A}_1 = (0, H_0 x, 0); \quad \mathbf{A}_2 = (-H_0 y, 0, 0); \quad \mathbf{A}_3 = \left(-\frac{H_0 y}{2}, \frac{H_0 x}{2}, 0 \right).$$

Проверьте это и покажите, что разница между любыми из этих векторов есть градиент некоторой функции.

⁸В криволинейных системах это не так. Например, в цилиндрических координатах $(\Delta \mathbf{A})_\alpha \neq \Delta A_\alpha$.

Какой же потенциал вычислится по распределению токов? \mathbf{A}_1 может создаваться между двумя плоскими шинами, параллельными плоскости yz , причем по «дальней» шине погонный ток $i = cH_0/4\pi$ идет в отрицательном направлении оси y , а по «ближней» – такой же ток в положительном направлении (см. рис. 5.4 и пример на стр. 55). Тогда на расстояниях более $d/2$ от плоскости yz потенциал перестанет изменяться: $A_y = \pm H_0 d/a$ при $|x| > |\pm d/2|$, где d будет расстоянием между шинами. (На расстояниях, сравнимых с размерами пластин, потенциал, определяемый из (5.4), разумеется, начнет убывать).

Аналогично для \mathbf{A}_2 , если он ограничен областью $|y| < d/2$ и непрерывно продолжается вне этой области, сохраняя значения на границах, шины надо развернуть параллельно плоскости xz , а ток пускать вдоль оси x . Подумайте, как быть с \mathbf{A}_3 , если известно, что на расстоянии r от оси z он становится постоянным по величине.

Как видно, нельзя в принципе узнать распределение токов, имея информацию о поле в ограниченной области пространства: ведь однородное поле в заданном объеме можно создать миллионами разных способов.

Векторный потенциал, согласующийся с (5.4), обладает важным свойством:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad \text{если} \quad \mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{j}}{cR} dV. \quad (5.6)$$

Действительно, вычислим дивергенцию, написав \mathbf{A} в с явным выделением радиус-вектора точки наблюдения \mathbf{r} и радиус-вектора источников \mathbf{r}' :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV = - \int \frac{(\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV, \quad (5.7)$$

так как производные берутся по координатам \mathbf{r} ; второе равенство учитывает, что градиент $1/r$ есть $-\mathbf{r}/r^3$. Рассмотрим теперь сходный интеграл

$$\int \operatorname{div}' \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV,$$

где штрих при div указывает, что производные берутся уже по координатам источников \mathbf{r}' . По правилам вычисления производных легко убедиться, что

$$\operatorname{div}' \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\operatorname{div}' \mathbf{j}}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{(\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

так как для статических полей и токов дивергенция \mathbf{j} равна нулю (закон сохранения заряда, см. (4.3)). Поэтому дивергенция \mathbf{A} из (5.7) запишется в виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = - \int \operatorname{div}' \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV.$$

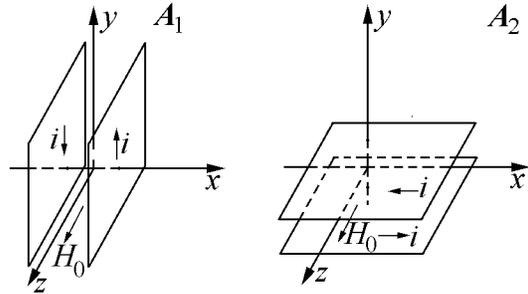


Рис. 5.4.

Интеграл здесь берется по всему объему, но с тем же успехом его можно распространить только на объем, занятый токами (можно сказать, на внутренность проводов). Используя теорему Гаусса – Остроградского, преобразуем его в интеграл по поверхности проводов:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = - \int \frac{(\mathbf{j} d\mathbf{S})}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Но последний интеграл равен нулю, так как ток на поверхности проводников не имеет нормальной к этой поверхности составляющей. Итак, (5.6) доказано.

5.3 Взаимодействие токов. Формула Ампера

Найдем силу, действующую на ток в магнитном поле. При простейшей геометрии (провод длины L перпендикулярен полю) сила

$$F = \frac{evH}{c} \cdot (\text{число электронов}) = \frac{evH}{c} \cdot (nsL) = \frac{nevs}{c} \cdot H \cdot L = \frac{ILH}{c}.$$

На малый элемент тока $I d\mathbf{L}$ в поле \mathbf{H} действует сила

$$F = \frac{I}{c} [d\mathbf{L} \times \mathbf{H}]. \quad (5.8)$$

Два параллельных провода на расстоянии R будут взаимодействовать с силой

$$F_{12} = 2 \frac{I_1 I_2}{c^2 R} L; \quad (5.9)$$

провода притягиваются при параллельных токах и отталкиваются при антипараллельных. Величина силы для проводов длиной 1 м на расстоянии 1 см при токе 1 А будет $2 \cdot (3 \cdot 10^9)^2 \cdot 100 / (9 \cdot 10^{20} \cdot 1) = 2$ дин. Это немного, вот мы и не видим взаимодействия их в быту. Но при токе 1 кА получится в миллион раз больше – 2 кГ (читается: 2 килограмма силы)⁹, а при 10 кА – 2 тонны силы. Видно, что на магнитных силах вполне могут работать механизмы. В электромоторах потребляемый ток не так велик, но много проводов (витков). На электрических же силах техника работает плохо – эти силы ограничены пробоем. Впрочем, есть применения в струйных принтерах, ксероксах, где электрические поля управляют движением частиц красящего порошка, и т.п.

Поле \mathbf{H} само создается некоторыми токами. Если вспомнить закон Био – Савара, то кажется очевидным, что два элемента тока: I_1 длины $d\mathbf{L}_1$ и I_2 длины $d\mathbf{L}_2$ взаимодействуют с силой

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2 R^3} \cdot [d\mathbf{L}_1 \times [d\mathbf{L}_2 \times \mathbf{R}]], \quad (5.10)$$

⁹1 кГ (килограмм силы) – сила, с которой Земля притягивает гирию массой в 1 кг: $mg = 9,8 \text{ Н} = 9,8 \cdot 10^5 \text{ СГС (дин)}$. Это внесистемная, но удобная единица; именно килограммы силы показывают весы, на которых студентам взвешивают колбасу.

точнее, это сила действия 2 на 1; \mathbf{R} протянут от 2 к 1. Формула (5.10) – что-то вроде аналога закона Кулона.

Оба выражения (5.8, 5.9), а иногда и (5.10), для F называют **законом**, или **формулой, Ампера**. Исторически взаимодействие проводов с током обнаружено, разумеется, раньше силы Лоренца, для которой надо уже иметь понятие о магнитном поле и о носителях заряда в проводнике. Излагать же проще в принятом нами порядке, в чем можно убедиться хотя бы из последней формулы.

Элемент $d\mathbf{L}_1$ тоже действует на $d\mathbf{L}_2$ с силой

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{I_1 I_2}{c^2 R^3} \cdot [d\mathbf{L}_2 \times [d\mathbf{L}_1 \times (-\mathbf{R})]] .$$

Легко видеть, что возможно и даже обычно неравенство $\mathbf{F}_{12} \neq -\mathbf{F}_{21}$. Например, при совпадении направлений $d\mathbf{L}_1$ и \mathbf{R} первый элемент не создает поля в месте дислокации второго и на него не действует, тогда как 2 действует на 1 (рис. 5.5). Третий закон Ньютона не выполняется. Другими словами, вроде как не сохраняется импульс.

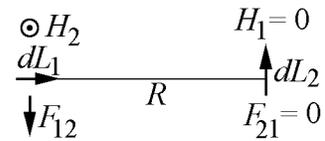


Рис. 5.5.

Пытались это исправить, заявляя, что взаимодействуют не элементы, а элемент с полем в этом месте. Поле же создает не один элемент тока, а весь провод – замкнутый контур. Силу, действующую на элемент 1, найдем, интегрируя (5.10) по \mathbf{L}_2 , и получим (5.8). И опять эта сила не обладает свойством взаимности: убедитесь, что на рис. 5.6 прямой провод I_2 действует на элемент $I_1 d\mathbf{L}_1$ вниз, а элемент дает нулевую силу на провод (хотя и ненулевой момент сил, крутящий по часовой стрелке). Опять можно сказать, что действует на провод 2 не элемент 1, а магнитное поле всего контура, в который он входит.

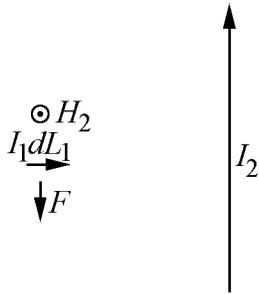


Рис. 5.6.

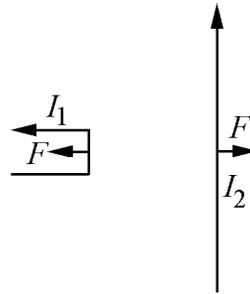


Рис. 5.7.

Два контура взаимодействуют с силой, проинтегрированной по $d\mathbf{L}_1$ и по $d\mathbf{L}_2$; такая сила уже будет подчиняться третьему закону Ньютона. На рис. 5.7 показаны два контура (один – все тот же прямой провод), для которых довольно очевидно взаимное отталкивание: вклад горизонтальных участков провода 1 компенсируется.

Действительно, разложим двойное векторное произведение по формуле

$$\mathbf{a}[\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (5.11)$$

(читается «бац минус цап»). Конкретно из (5.10) выходит

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2 R^3} \cdot [d\mathbf{L}_1 \times [d\mathbf{L}_2 \times \mathbf{R}]] = \frac{I_1 I_2}{c^2} \left(d\mathbf{L}_2 \left(d\mathbf{L}_1 \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) - \frac{\mathbf{R}}{R^3} (d\mathbf{L}_1 d\mathbf{L}_2) \right).$$

Вся несимметрия «сидит» в первом слагаемом. Но при интегрировании по $d\mathbf{L}_1$ он дает нуль, так как интегрируется кулоновское поле \mathbf{R}/R^3 . Аналогично из \mathbf{F}_{21} после интегрирования выпадет слагаемое $d\mathbf{L}_1(d\mathbf{L}_2\mathbf{R})/R^3$.

С XIX века думали, что формула (5.10) буквально неверна. Нет смысла рассуждать о силе между элементами тока, если они всегда складываются в замкнутые контуры. Поэтому (5.10) надо понимать не как реальную силу, а как материал для последующего интегрирования¹⁰. Настоящая же сила между элементами тока, если допустить, что есть такая вещь, может отличаться на слагаемое, которое обращается в нуль при интегрировании по замкнутому контуру.

Сам Ампер как раз был сторонником такой позиции и нашел выражение, которое давало ту же силу для замкнутых контуров, но не нарушало третий закон Ньютона.

Задача.

Попробуйте добавить к правой части (5.10) выражение $I_1 I_2 d\mathbf{L}_1(d\mathbf{L}_2\mathbf{R})/(c^2 R^3)$. Это как раз дает нуль при интегрировании по $d\mathbf{L}_2$, так как \mathbf{R}/R^3 – электрическое поле точечного заряда. Снова воспользуйтесь формулой «бац минус цап» и убедитесь, что получится сила, при перестановке индексов и замене направления \mathbf{R} меняющая знак. Ампер придумал более сложную силу, которая еще и была направлена вдоль вектора \mathbf{R} (см. [1]).

Но теперь мы знаем, что элементы тока именно бывают. Например, это могут быть два электрона, и их магнитное взаимодействие не взаимно. Третий закон Ньютона нарушается. Но закон сохранения импульса оказывается более живучим. Мы уже видели, что поле имеет энергию. Оказывается, оно может иметь и импульс, и можно показать, что лишний импульс передается электромагнитному полю. Суммарный же импульс поля и частиц сохраняется.

Вспомним, что в законе Кулона не было никаких проблем со взаимностью сил. Тенденция магнитного поля действовать как-то вбок и представляет основную сложность магнетизма.

5.4 Теорема Стокса. Уравнения Максвелла для магнитостатики

Продолжая аналогию с электростатикой, вспомним, что в симметричных случаях вместо принципа суперпозиции полезна была теорема Гаусса. И для магнитного поля можно

¹⁰И до сих пор в некоторых учебниках можно встретить такие утверждения.

написать аналогичное уравнение, с той только разницей, что магнитных зарядов нет:

$$\oint (\mathbf{H} d\mathbf{S}) = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0;$$

интегральное уравнение верно для любой замкнутой поверхности S . Теория вроде бы не запрещает существования «отдельных» полюсов, так называемых монополей Дирака, но практически их никто не наблюдал. Поле, имеющее нулевую дивергенцию, называют соленоидальным. Линии соленоидального поля не имеют начала и конца: они либо замкнуты, либо приходят с бесконечности и на бесконечность же уходят, либо заполняют в пространстве поверхности (наиболее общий случай, см. п. 5.2.)

Далее, циркуляция \mathbf{E} в электростатике нулевая: $\oint (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0$ по любому замкнутому контуру. Поскольку силовые линии \mathbf{H} бывают замкнуты, для магнитного поля в правой части будет явно не всегда нуль.

Возьмем контур – окружность вокруг прямого провода с током I (рис. 5.8). Поскольку контур совпадает с силовой линией,

$$\oint (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = H \cdot 2\pi R = (2I/cR) \cdot 2\pi R = 4\pi I/c.$$

Результат не зависит от формы контура, лишь бы он охватывал провод. Действительно, для поля $H = 2I/cr$ и контура, лежащего для простоты в плоскости, перпендикулярной проводу, $\mathbf{H} d\mathbf{L} = (2I/c) dL_{\perp}/r = (2I/c) d\varphi$, где φ – плоский угол с вершиной на оси провода (рис. 5.8). Если контур охватывает провод, $\oint d\varphi = 2\pi$, если же провод вне контура, то при обходе угол вернется к прежнему значению, $\oint d\varphi = 0$.

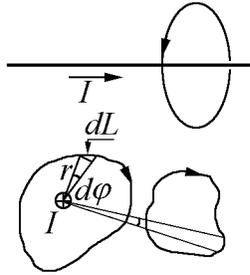


Рис. 5.8.

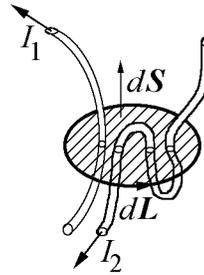


Рис. 5.9.

Контур не обязан быть плоским, так как все равно мы проектируем $d\mathbf{L}$ на силовую линию, лежащую для прямого провода в плоскости. Через контур, рядом с ним и в отдалении может проходить любое число прямых проводов, тогда

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \frac{4\pi I_L}{c}, \quad (5.12)$$

где I_L – это суммарный ток, протекающий через контур, с учетом знаков. Если рядом течет огромный ток, но не через контур L , то этот ток не входит в правую часть.

Вряд ли стоило тратить столько усилий, будь это интегральное соотношение верно только для прямых проводов. Однако можно показать (см. приложение в конце главы), что то же выполняется и для «кривых» токов (рис. 5.9), и для распределенных в пространстве, т.е. для общего случая. Уравнение (5.12) можно назвать **теоремой Стокса** для магнетизма¹¹. Если проводов несколько, то I_L – это суммарный ток с учетом знаков. Положительным направлением тока для контура считается то, которое образует с направлением обхода контура правовинтовую систему. На рис. 5.9 положителен ток I_1 , а суммарный ток $I_L = I_1 - I_2 + I_2 - I_2 = I_1 - I_2$. Проследить за суммированием токов можно, отмечая пересечение ими незамкнутой поверхности, опирающейся на контур интегрирования. Поскольку токи в статике замкнуты, годится любая такая поверхность. Можно представить себе растяжимую пленку, «надетую» на контур; пленку эту можно как угодно деформировать, все равно токи будут ее «пронизывать».

Как и в случае с двумя теоремами Гаусса в п. 2.3, «магнитной» теореме Стокса родственна **формула Стокса векторного анализа**: для **любого** вектора \mathbf{H} (не обязательно магнитного поля)

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \int_{S_L} (\text{rot} \mathbf{H} d\mathbf{S}), \quad (5.13)$$

где S_L – поверхность, опирающаяся на контур L , а $d\mathbf{S}$ образует с $d\mathbf{L}$ правовинтовую систему (рис. 5.9). Равенство (5.13) уже использовалось в п. 2.3 применительно к электрическому полю, только там ротор \mathbf{E} был нулевым. Из (5.12,5.13) и определения плотности тока \mathbf{j} следует

$$\int_{S_L} (\text{rot} \mathbf{H} d\mathbf{S}) = \frac{4\pi}{c} \int_{S_L} (\mathbf{j} d\mathbf{S}).$$

Поскольку это выполняется для любого контура и любой опирающейся на него поверхности (произвол в выборе поверхности обеспечивается условием $\text{div} \mathbf{j} = 0$, как раз и означающим замкнутость токов), верно и локальное равенство

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}. \quad (5.14)$$

Уравнение (5.14) – дифференциальный аналог магнитной теоремы Стокса.

Примеры употребления:

Катушка длины L из N витков, с током I . Берем контур, захватывающий весь ток – как бы нитку, продетую в катушку и завязанную снаружи. Внутри поле \mathbf{H} , а снаружи те же силовые линии заполняют ∞ площадь, то есть снаружи $\mathbf{H} = 0$. Получаем

¹¹Имеется большое разнообразие названий (5.12): теорема о циркуляции, или закон полного тока, или закон/формула/теорема Ампера, или называют уравнением Максвелла (одним из), или вообще избегают называть. Название «теорема Стокса» неофициальное, но вполне подходящее (см. ниже). Закон Ампера лучше отнести к взаимодействию проводников (5.8,5.9) во избежание путаницы.

$HL = 4\pi NI/c$; $H = 4\pi NI/cL$. Видим, что внутри поле однородно: в пренебрежении краевыми эффектами положение контура внутри катушки не влияет. При учете краевых эффектов появится поле снаружи (для длинной катушки – слабое) и неоднородность внутри вблизи концов. Катушка аналогична конденсатору в электростатике: концентрирует в себе магнитное поле.

Шина с током: $2HL = 4\pi I/c$; $H = 2\pi I/cL = 2\pi i/c$, как уже получалось из закона Био-Савара. Отметим, что поле обходит шину, т.е. направление поля при пересечении шины меняется на противоположное. Отсюда следует, что в общем случае, какие бы ни действовали дополнительные источники, при переходе через поверхностный ток i происходит скачок тангенциальной составляющей поля, равный $H_2 - H_1 = 4\pi i/c$, что напоминает скачок нормальной составляющей $4\pi\sigma$ в электростатике.

Поле внутри провода с током: $H \cdot 2\pi r = (4\pi I/c) \cdot (r^2/R^2)$: доля тока r^2/R^2 идет через контур радиуса r . Получаем $H = 2Ir/cR^2$ – похоже на E заряженного объемно цилиндра.

Мы имеем уже 4 уравнения Максвелла. В интегральной форме они имеют вид

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} &= 4\pi Q_S, & \oint \mathbf{H} d\mathbf{S} &= 0, \\ \oint \mathbf{E} d\mathbf{L} &= 0, & \oint \mathbf{H} d\mathbf{L} &= \frac{4\pi I_L}{c}. \end{aligned}$$

Обратите внимание, как **разумно** устроено основное уравнение магнитостатики – теорема Стокса. \mathbf{H} вызывается токами, которые можно «поймать» в контуры. Аналогично (насколько тут возможна аналогия) \mathbf{E} создается зарядами, которые ловятся в мешки – замкнутые поверхности.

Те же уравнения в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}. \end{aligned}$$

Пока что уравнения для \mathbf{E} и \mathbf{H} независимы. Позднее появятся слагаемые, которые из электрического поля будут делать магнитное и наоборот.

5.5 Магнитный момент

Из первого примера п. 5.2 – поля кольца – видно быстрое спадание магнитного поля с удалением от создающей его системы. При $z \gg R$ имеем $H = 2\pi R^2 I / cz^3$. На оси электрического диполя: $E = 2p/z^3$. Напрашивается аналогия: учитывая, что размерности H и E совпадают, вводим магнитный дипольный момент $m = \pi R^2 I / c$ (короче – **магнитный момент**).

Поскольку нет магнитных зарядов, магнитный диполь дает самое медленно спадающее поле. (Поле типа провода $\sim 1/r$ не считается: оно найдено вблизи провода,

а на больших расстояниях, когда будет видна замкнутость тока, закон спада станет дипольным или еще быстрее). Поэтому магнитный диполь – даже более важный объект для магнетизма, чем электрический диполь в электростатике. Приблизительно (по важности) он соответствует электрическому заряду.

Можно показать, что аналогия с электрическим диполем выполняется не только на оси. Оказывается, на большом расстоянии R от плоского контура с током I выполняются зависимости

$$H_R = \frac{2m \cos \theta}{R^3}, \quad H_\theta = \frac{m \sin \theta}{R^3}, \quad \text{где } m = \frac{IS}{c}, \quad (5.15)$$

точно подобные полученным для электрического диполя в п. 2.5. S – это площадь контура, по которому течет ток I (рис. 5.10).

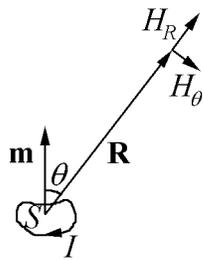


Рис. 5.10.

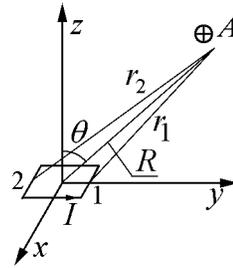


Рис. 5.11.

Действительно, рассмотрим малый квадратный контур с током I , стороны которого имеют длину a и ориентированы по осям x, y (рис. 5.11). Найдем векторный потенциал в плоскости $x = 0$. Направление \mathbf{A} в этой точке «в лист», что показывает крестик, а вклад вносят только два элемента тока – стороны квадрата, пронумерованные как 1 и 2 (остальные имеют противоположные направления тока и одинаковое расстояние до точки наблюдения). Получаем

$$A = \frac{Ia}{c} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Ia}{c} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \approx \frac{Ia^2 \sin \theta}{c R^2}.$$

Произвольный (но малый по сравнению с R) контур эквивалентен набору малых квадратных контуров, обтекаемых током в одном направлении. Везде внутри токи от соседних квадратов будут взаимно уничтожаться, на границе же они дадут обтекание исходного контура. Потенциалы квадратиков складываются. Поскольку потенциал пропорционален площади такого элемента, естественно возникнет магнитный момент $m = IS/c$, и в сумме получим

$$A = \frac{m \sin \theta}{R^2}.$$

В сферических координатах это будет A_α , остальные же компоненты нулевые.

Задача. Вычислить ротор потенциала магнитного диполя по формулам, приведенным в гл. 2, и убедиться, что получится магнитное поле (5.15).

Магнитный момент (как и электрический дипольный момент) – вектор. Направлен он по движению штопора, ручку которого крутят по току. В векторном виде $\mathbf{m} = I\mathbf{S}/c$: вдоль вектора площади. Если контур не плоский, момент записывается так: $\mathbf{m} = (I/2c) \cdot \oint[\mathbf{r} \times d\mathbf{l}]$, где \mathbf{r} – радиус-вектор из начала координат в место расположения элемента длины контура $d\mathbf{l}$. Проверьте, что добавление к \mathbf{r} постоянного вектора не меняет результат (т.е. \mathbf{m} не зависит от положения начала координат), и что для плоских контуров обе формулы равносильны. Если токи распределены по объему, $\mathbf{m} = (1/2c) \cdot \oint[\mathbf{r} \times d\mathbf{j}]dV$. Векторный потенциал магнитного диполя можно записать как

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathbf{m} \times \mathbf{R}]}{R^3}, \quad (5.16)$$

что напоминает потенциал электрического диполя (п. 2.5), но с заменой скалярного произведения ($p\mathbf{R}$) на векторное $[\mathbf{m} \times \mathbf{R}]$.

Внесем магнитный момент в виде квадратного контура со стороной L в поле \mathbf{H} . На сторону, перпендикулярную полю, действует сила $F = ILH/c$. Получаем пару сил, разворачивающих \mathbf{m} вдоль \mathbf{H} (рис. 5.12). Силы на другие две стороны (ближнюю и дальнюю) только пытаются растянуть контур и компенсируют друг друга.

Момент сил

$$\tau = 2F \cdot (L/2) \cdot \sin \theta = mH \sin \theta = [\mathbf{m} \times \mathbf{H}]$$

в полном соответствии с электростатикой. Мы можем ввести и потенциальную энергию магнитного момента в поле:

$$U = -mH \cos \theta = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}) .$$

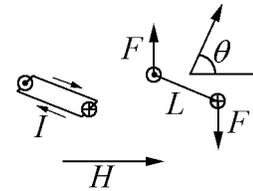


Рис. 5.12.

Как и электрическое, магнитное поле старается ориентировать моменты вдоль себя.

Существуют вещества (например, кислород), молекулы которых имеют собственные магнитные моменты; этим они похожи на электрические диполи типа молекул воды. В магнитном поле будет возникать упорядоченная ориентация совершенно так же, как и в электрическом случае, с заменой $p \rightarrow m$, $E \rightarrow H$. Бывает, что молекула без собственного момента приобретает в поле \mathbf{H} момент \mathbf{m} вдоль поля. Все такие вещества с положительной магнитной поляризуемостью называются **парамагнетиками**.

Но большинство знакомых нам веществ получают в поле момент \mathbf{m} , обратный направлению \mathbf{H} (та же вода). Особенно удивляться этому не надо, потому что магнитное поле все же не электрическое: оно действует довольно сложным образом, изменяя орбиты электронов (а точнее, их состояния) в молекулах. Мы не будем пока вдаваться в детали взаимодействия. Вещества такого типа называют **диамагнетиками**.

Есть еще **ферромагнетики** (железо и ряд сплавов), аналогичные сегнетоэлектрикам; в ферромагнетиках соседние магнитные моменты заставляют друг друга ориентироваться в одном направлении. Поэтому материал имеет собственную намагниченность.

Есть также **антиферромагнетики** (твердый кислород, магний, хром), у которых соседние моменты ориентируются навстречу и компенсируют друг друга. Нечто среднее между ферромагнетиками и антиферромагнетиками представляют **ферримагнетики** (многие ферриты – соединения типа Fe_3O_4). У них соседние моменты антипараллельны, но не равны по величине.

5.6 Магнитное поле в среде. Намагниченность. Вектор магнитной индукции. Условия на границе двух сред

Оценим величину магнитного момента молекулы. Пусть электрон летает по кругу радиуса R ; ток $I = e/T$. Момент $m = I \cdot \pi R^2/c = (eR/2) \cdot (v/c)$, где $v = 2\pi R/T$ – скорость электрона. Отношение $v/c \ll 1$, а магнитный момент получается малым по сравнению с характерным электрическим $eR \sim 10^{-18}$ СГС. Соответственно магнитные эффекты в поле той же величины малы по сравнению с электрическими (но, правда, поле H можно сделать гораздо больше E).

Само собой, в веществе, состоящем из магнитных моментов, внешнее магнитное поле создаст упорядоченную ориентацию. Можно ввести магнитную поляризуемость α_H , так что $\langle \mathbf{m} \rangle = \alpha_H \cdot \mathbf{H}$. Возникнет магнитный момент единицы объема, или **намагниченность**: $\mathbf{M} = n \langle \mathbf{m} \rangle = n \alpha_H \cdot \mathbf{H} = \chi \mathbf{H}$. Коэффициент χ называется **магнитной восприимчивостью**. Она для парамагнетиков положительна, но для диамагнетиков $\chi < 0$.

Как и в электростатике, для собственных магнитных моментов средняя проекция на направление поля $\langle \mathbf{m}_H \rangle \sim m \cdot (mH/kT)$. Учитывая, что $m \sim eR \cdot (v/c)$, получаем, что магнитная поляризуемость меньше электрической в $(v/c)^2$ раз. То же соотношение верно и для вещества из наведенных магнитных диполей. Поэтому мы и не видим заметного взаимодействия веществ типа воды даже с сильным магнитным полем. Но есть вещества, где из-за взаимного влияния атомов намагничивание будет существенным.

Рассмотрим намагниченное вещество. Каждый магнитный момент – это замкнутый ток. Внутри вещества эти молекулярные токи компенсируются (как было и с зарядами электрических диполей). Но по поверхности образца компенсации нет, и сложение молекулярных токов эквивалентно некоторому току I (рис. 5.13), обтекающему образец так, чтобы усилить внешнее поле (для веществ с $\chi > 0$).

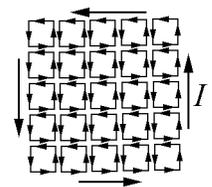


Рис. 5.13.

Суммарный магнитный момент образца площадью S и высотой L : $\mathcal{M} = n \langle \mathbf{m} \rangle SL = \mathbf{M} \cdot SL$ равен, с другой стороны, IS/c , так что поверхностный ток $I = cML$. На сантиметр поверхности придется погонный ток $i = cM$. Если вектор \mathbf{M} направлен под углом к поверхности, то надо брать его параллельную составляющую (тангенци-

альную). Эта зависимость похожа на связь \mathbf{P} и σ в электростатике.

Пусть в однородное магнитное поле H_{out} , например, в катушку с током, внесено вещество, способное намагничиваться (рис. 5.14). Очевидно, что намагниченность, она же поверхностный ток, изменит поле внутри образца. Аксиальный ток $i = cM$ создает внутри добавочное поле $4\pi i/c$; тогда внутри будет $\langle H_{in} \rangle = H_{out} + 4\pi M$. В этой разнице легко убедиться и для любой формы образца из теоремы Стокса для «узкого» контура:

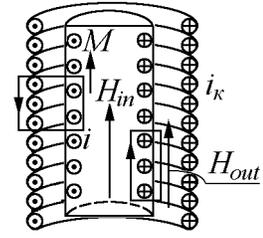


Рис. 5.14.

$$\langle H_{in} \rangle L - H_{out} L = 4\pi i L / c = 4\pi M L \quad \text{или} \quad \langle H_{in} \rangle - H_{out} = 4\pi M .$$

Для определенности рассмотрим случай ($\chi > 0$, парамагнетик), когда внутреннее поле больше наружного. Конечно, имеется в виду среднее поле в веществе, что подчеркивают угловые скобки. Как видно из теоремы для «широкого» контура, оно создается вместе током катушки и поверхностным током: $\langle H_{in} \rangle = 4\pi i_k / c + 4\pi M$.

Велико искушение ввести вектор $\langle \mathbf{H}_{in} \rangle - 4\pi \mathbf{M}$, который в теореме Стокса чувствовал бы только «настоящие» токи проводимости (в нашем случае – ток катушки). Так и делают, но с небольшой поправкой. Принято среднее поле в веществе $\langle \mathbf{H}_{in} \rangle$ называть не магнитным полем, а **магнитной индукцией \mathbf{B}** . Тогда искусственный, но удобный вектор будет $\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$. Как бы специально для запутывания студентов эту величину назвали полем \mathbf{H} .

В новых обозначениях имеем $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$. Это похоже на $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ даже больше, чем надо: в электричестве настоящее среднее поле как раз \mathbf{E} . Теперь можно написать теорему Стокса в присутствии магнетиков:

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \frac{4\pi I_L}{c} \quad (I - \text{свободный ток}) .$$

Она выглядит по-старому, но смысл ее другой: \mathbf{H} – вспомогательный вектор, хотя и называется полем. Для образца в катушке \mathbf{H} попросту одинаково внутри и вне образца:

$$HL = 4\pi NI / c ; \quad H = 4\pi NI / cL .$$

Намагниченность \mathbf{M} поэтому принято выражать через \mathbf{H} : $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, то есть магнитная восприимчивость определяется не через истинное среднее поле \mathbf{B} , а через \mathbf{H} , которое проще задать (в простой геометрии зависит только от тока в катушке, а не от свойств и вообще присутствия магнетика). Тогда магнитная индукция $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M} = (1 + 4\pi \chi) \cdot \mathbf{H}$, что принято писать в виде

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} . \quad (5.17)$$

Коэффициент μ – свойство вещества – называется **магнитной проницаемостью**. Теперь мы видим, что среднее поле в образце $B = \mu \cdot 4\pi NI / cL$. В отличие от ϵ , μ

часто бывает меньше 1 (для диамагнетиков). Однако для ферромагнетиков μ может быть порядка тысяч.

Разумеется, теорема Гаусса в магнетизме должна записываться через среднее поле \mathbf{B} . Запишем уравнения магнитного поля в среде, включая и дифференциальную форму:

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \frac{4\pi I_L}{c} \quad \text{по любому замкнутому контуру } L \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c},$$

$$(\mathbf{j}, I_L - \text{токи свободных зарядов}); \quad (5.18)$$

$$\oint_S (\mathbf{B} d\mathbf{S}) = 0 \quad \text{по любой замкнутой поверхности } S \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Видно, что «нелогичные» переименования полей сделаны, чтобы форма уравнений напоминала электростатическую. Зато при этом несколько страдает смысл, но сейчас, пожалуй, уже поздно для перестройки.

Разумеется, векторный потенциал определяется через истинное среднее поле \mathbf{B} , и вместо (5.18) можно пользоваться уравнениями

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi \mathbf{j}}{c}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (5.19)$$

причем здесь, в отличие от (5.18), \mathbf{j} есть полный ток, т.е. не только ток свободных зарядов, а также и молекулярный.

Уравнения (5.18) или (5.19) дополняются граничными условиями на поверхностях разрыва, вытекающими из самих уравнений:

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}, \quad (5.20)$$

а если имеется поверхностный свободный ток i , тангенциальные поля отличаются на $4\pi i/c$. Кроме того, должны быть заданы свойства вещества. При постоянной магнитной восприимчивости годится прямая пропорциональность (5.17), в более общем нелинейном случае

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \quad (5.21)$$

но бывает и так, что однозначной зависимости индукции от поля не существует: индукция определяется не только полем в данный момент времени, но и всей историей намагничивания (значениями \mathbf{H} во все предшествующие моменты). Такая «память» называется **гистерезисом**.

В частности, гистерезис ярко проявляется в ферромагнетиках, из которых изготавливаются **постоянные магниты**: у них как раз внешний, или свободный, ток равен нулю и их поле создается только поверхностными молекулярными токами (рис. 5.13). Проследим, как получается, что эти токи, т.е. намагниченность, могут существовать без внешнего поля. Оказывается, поле все же нужно, но на сравнительно недолгое время. Затем внешнее поле можно выключить, но намагниченность не спадает до нуля¹².

¹²Так студент может помнить часть изученного материала даже и после сдачи экзамена.

Как уже говорилось, в ферромагнетике соседние магнитные моменты ориентируют друг друга в одном направлении. Образец разбивается на кусочки – **домены**¹³, внутри которых намагниченность \mathbf{M} постоянна, но направления соседних доменов закономерным или случайным образом варьируются, так что в среднем намагниченность компенсируется. Действительно, если весь кусок будет намагничен однородно, то и внутри него, и снаружи будет значительное магнитное поле, что энергетически невыгодно. А при разбиении внутри доменов поле, конечно, есть, но снаружи образца оно практически зануляется. Размеры доменов зависят от образца и его истории, но обычно находятся в диапазоне $10^{-4} \div 10^{-2}$ см. Внутри домена все магнитные моменты полностью ориентированы в одном направлении из-за сильного взаимодействия атомов. Когда действует внешнее поле, то вначале домены, направленные более или менее вдоль поля, разрастаются за счет соседних «неправильных», а при больших полях начинают поворачиваться уже ориентация внутри доменов, приближаясь к параллельной полю. В результате размагничивание идет по другому пути: после выключения поля домены вполне могут разориентироваться не полностью; получается остаточная $M \neq 0$ при $H = 0$ (и даже при не очень больших отрицательных полях).

Интересно, что в плоском магните, намагниченном в перпендикулярном направлении, \mathbf{H} внутри направлено против \mathbf{M} : снаружи $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ и поле имеет дипольный вид; но без свободных токов $\oint(\mathbf{H}d\mathbf{L}) = 0$. Поэтому, двигаясь вдоль силовой линии, мы непременно должны иметь участок, на котором \mathbf{H} направлено против $d\mathbf{L}$, что может быть только внутри материала (рис. 5.15). Магнитная же индукция в материале направлена вдоль \mathbf{M} и, значит, против \mathbf{H} внутри, поскольку ее нормальная компонента не меняется при переходе из магнетика в воздух.

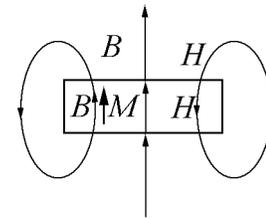


Рис. 5.15.

Существенная разница между постоянными магнитами и сегнетоэлектриками в том, что электрическое поле наэлектризованного сегнетоэлектрика вызывает движение зарядов. Идеальных изоляторов нет, и слабые токи в диэлектрике либо воздухе принесут на поверхность свободные заряды, которые скомпенсируют поле поляризации. Поэтому поляризованность может проявиться только после некоторых усилий, например, деформации образца, меняющей поляризацию. Постоянные же магниты, если их не греть и не ударять, сохраняют свое действие весьма долго (компасы и т.п.). В частности, по намагничиванию горных пород судят о направлении магнитного поля Земли, каким оно было сотни миллионов лет назад. Это еще раз доказывает практическое отсутствие магнитных зарядов.

Гвозди, ключи и т.п., попадая в поле, приобретают свой момент (намагничиваются) и втягиваются в область сильного поля так же, как диэлектрики втягиваются в электрическое поле. Но диамагнетики, напротив, выталкиваются из магнитного поля (например, вода). В них направление поверхностных токов противоположное, и \mathbf{B}

¹³От франц. domaine – владение. Карта владений феодалов в средневековье напоминала магнитную структуру.

уменьшается. Идеальные диамагнетики – это сверхпроводники: в них вообще нет поля (точнее, индукции), оно полностью экранировано поверхностными токами. Для сверхпроводников $\mathbf{B} = 0$, эффективное $\mu = 0$, $\chi = -1/4\pi$. Ток в обычном проводнике идет по сечению, а в сверхпроводнике – по поверхности. Переход в сверхпроводящее состояние при замораживании как раз наблюдают по эффекту Мейснера – выталкиванию сверхпроводника из поля.

Вопрос. Поле диполя одинаково в электричестве и магнетизме. Поведение диполя в поле тоже одинаково – ориентируется. Почему же в электростатике диэлектрик обычно уменьшает поле, а среднее поле B в парамагнетике возрастает?

Если в СГС все поля (E, D, P, B, H, M) имеют одинаковую размерность, то в системе СИ размерности их разные. E измеряется в В/м, а B – в Тл (тесла, или Вб/м², Вб – вебер – единица магнитного потока). Различие в размерностях E и D , B и H еще добавляет разнообразия. В вакууме в системе СИ

$$D = \varepsilon_0 E, \quad B = \mu_0 H.$$

Поэтому коэффициенты ε_0 и μ_0 , о котором мы еще не упоминали, называют диэлектрической и магнитной проницаемостями вакуума; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,256 \cdot 10^{-6}$ (Гн/м). Кроме того, что они не равны 1, это еще и размерные величины¹⁴! В среде надо еще домножить на уже известные ε и μ .

Рекомендуется расчеты делать в СГС, а в СИ переводить результат (что иногда все-таки нужно). Это можно сделать, помня основные формулы в обеих системах. Например, сила Лоренца в СИ $F = qVB$, зная кулон, ньютон и метр, получим 1 Тл = 10⁴ СГС. В СГС единица индукции называется гаусс, но это то же самое, что эрстед. Магнитное поле в СИ редко нужно, так как почти везде в формулах будет B , но можно запомнить, что поле прямого провода в СИ равно $H = I/2\pi R$, то есть измеряется в амперах на метр. (Размерность D соответственно Кл/м², и тоже редко нужна, так как настоящее поле E).

Литература

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: ГИТТЛ, 1957. 620 с.
2. Парселл Э. Электричество и магнетизм. Берклевский курс физики, т. 2. М.: Наука, 1975. 440 с.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Электричество и магнетизм. Фейнмановские лекции по физике, вып. 5. М.: Мир, 1966. 296 с.

¹⁴В последнее время эти несколько одиозные названия заменены более нейтральными – электрическая и магнитная постоянные, что, впрочем, не меняет сути дела.

Приложение. Связь закона Био–Савара и теоремы о циркуляции.

Для «кривых» проводов или для вообще произвольного распределения токов проще исходить из дифференциальной формы соответствующего уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}.$$

Сравнить ее с законом Био–Савара будет легче, так как это уравнение **локальное**, связывающее величины в точке. Надо проверить, что поле, найденное из закона Био–Савара, согласуется с этим уравнением. С тем же успехом можно использовать равносильное выражение (5.4) для векторного потенциала. Итак, покажем, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}, \quad \text{если} \quad \mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV.$$

Упростим двойной ротор, пользуясь представлением оператора ∇ как вектора¹⁵:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}]] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A},$$

так как $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Подставляем \mathbf{A} :

$$-\Delta \mathbf{A} = -\Delta \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{c} \operatorname{div} \left(-\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right) dV,$$

где производные берутся по координатам точки наблюдения \mathbf{r} , а оператор Лапласа записан как $(\operatorname{div} \nabla)$. Интеграл берется по всему пространству, занятому токами. Заметим, что под знаком дивергенции стоит поле, создаваемое в точке наблюдения \mathbf{r} единичным точечным зарядом, находящимся в точке \mathbf{r}' . Как мы установили в п. 2.3, стр. 25, дивергенция этого поля равна нулю, если только $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$. Поэтому почти весь объем не дает никакого вклада, а достаточно рассмотреть весьма малую окрестность ΔV точки наблюдения, в которой плотность тока можно считать постоянной и равной $\mathbf{j}(\mathbf{r})$:

$$-\Delta \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c} \int_{\Delta V} \operatorname{div} \left(-\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right) dV,$$

причем с тем же успехом можно сменить аргумент дифференцирования:

$$-\Delta \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{c} \int_{\Delta V} \operatorname{div}' \left(-\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right) \right) dV.$$

Теперь под интегралом стоит дивергенция электрического поля единичного заряда, находящегося в точке \mathbf{r} внутри малого объема ΔV . Можно преобразовать объемный интеграл в поверхностный, но и так ясно, что он равен 4π , вне зависимости от величины и формы ΔV . Мы получили

$$-\Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}, \quad \text{следовательно} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}.$$

Интегрируя по поверхности, опирающейся на замкнутый контур, получим теорему о циркуляции.

¹⁵Надо применить формулу «бац минус цап» (5.11), учитывая, что набла должна стоять слева от своего объекта.