

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Курс лекций для ММФ

А.А. Васильев, А. П. Ершов

1 семестр

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

6. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

20 августа 2006 г.

Глава 6

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

6.1 Закон Фарадея

В уравнениях, которые мы рассматривали до сих пор, электрическое и магнитное поля были независимы (не считая того, что E поддерживало источники магнитного поля – токи). Но существует и непосредственная связь между полями.

Пусть имеется два «рельса» – проводника, по которым скользит со скоростью u проводящая же перекладина. Магнитное поле H перпендикулярно плоскости рисунка и существует слева от пунктирной линии (например, это внутренность катушки). Все это имеет место в системе отсчета, которую мы назовем исходной, а обозначим К.

На заряд e внутри движущегося проводника действует сила Лоренца $F_L = euH/c$, направленная вверх (чтобы не запутаться, берем положительный носитель заряда). Пусть проводник начал двигаться только что. Заряды в нем начнут перемещаться вверх. Постепенно верхний рельс и верхняя обкладка конденсатора C зарядятся положительно, а нижние рельс и обкладка – отрицательно. Возникнет электрическое поле E , направленное вниз и противодействующее силе Лоренца (рис. 6.1).

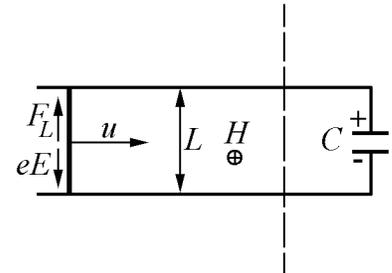


Рис. 6.1.

Равновесие между электрической и магнитной силой возникнет при условии $euH/c + eE = 0$, то есть достигнется поле $E = uH/c$ (по величине), напряжение на конденсаторе $V = uHL/c$, где L – длина движущегося проводника. Заметим, что внутри проводника есть электрическое поле, к чему мы не привыкли: законом на самом деле преследуется не поле E в проводнике, а существование полной силы, действующей на подвижный заряд. Между крыльями самолета, летящего в земном магнитном поле $H \sim 1$ эрстед, возникнет напряжение $2 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10^3 / 3 \cdot 10^{10} = 2 \cdot 10^{-3}$ СГС = 0,6 В. Внутри самолета использовать это напряжение нельзя, так как провода тоже движутся.

Перейдем теперь в систему отсчета K' , сопровождающую перекладину. Теперь она

стоит на месте, а граница магнитного поля едет со скоростью $-u$ налево (вместе с магнитом или катушкой, создающими поле). Двигутся также рельсы и конденсатор. Разумеется, заряды на обкладках конденсатора от перехода в другую систему не исчезнут, и на конденсаторе будет то же самое напряжение V (рис. 6.2).

Что же будет внутри перемычки? Силы Лоренца в системе отсчета K' нет как таковой (теперь в материале $u = 0$). Если при этом в проводнике будет электрическое поле, заряды в нем начнут ускоряться, чего быть не может: в этой цепи все давно установилось и от смены системы отсчета ток не пойдет. Приходится признать, что в проводнике $E = 0$.

Куда исчезло электрическое поле? Ведь на рельсах сидят те же самые заряды, создававшие $E = uHL/c$ вниз. Снаружи магнитного поля они действуют по-прежнему. Остается признать, что тут влияет магнитное поле. Например, можно предположить, что движение источников поля H (катушек либо магнитов) создает поле E' , направленное в нашем случае вверх, а по величине тоже равное uHL/c ; в результате сложения обоих электрических полей получа-

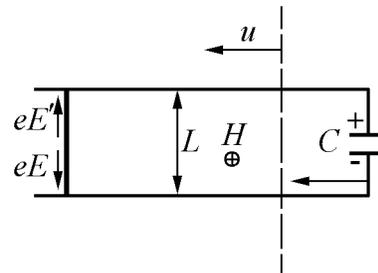


Рис. 6.2.

ется нуль и заряды в проводнике будут неподвижны, чего мы и добиваемся. Это дополнительное поле заменяет исчезнувшую силу Лоренца. Поскольку же нужна сила, действующая на покоящиеся заряды, это будет именно электрическое поле.

Не все ли равно, пропало поле E или добавилось противоположное поле E' ? И если верно второе, то откуда это E' возьмется? Мы привыкли, что электрическое поле создается зарядами. Где заряды – источники компенсирующего поля E' ?

Оказывается, такие заряды есть и сидят они там же, где токи, создающие магнитное поле. В движущемся магните компенсация зарядов нарушается, и он становится электрически поляризованным. Это релятивистский (связанный с теорией относительности) эффект. Мы доберемся до него в конце семестра, а пока примем на веру¹. Можно было бы предположить влияние других полей, но это противоречит опыту. Например, поле тяжести тут никак не меняется. Придумывать же специальное поле с теми же свойствами, как у электрического – это пустое занятие.

Получается интересная ситуация. Вольтметр, находящийся вне магнитного поля, покажет напряжение между рельсами V , а такой же вольтметр внутри магнитного поля покажет нуль, если он неподвижен в системе отсчета K' , сопровождающей перемычку. (Это – прямое доказательство возникновения поля E'). До сих пор электрическое поле у нас было потенциальным: $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L})$ был равен нулю. Теперь в системе K' это нарушается. Возьмем контур, проходящий через перемычку, рельсы и замыкающийся вне поля H (хотя бы через конденсатор или где-то рядом). При проходе по часовой стрелке

¹Косвенный признак, за которым проглядывается теория относительности – присутствие в формулах магнетизма электродинамической постоянной c .

$\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L}) = V = uHL/c$, так как электрическое поле есть только справа.

Мы почти получили замену одного из уравнений Максвелла – условия потенциальности электрического поля, причем E связалось с H . Осталось выразить правую часть через более подходящие величины. Заметим, что $uL = -dS/dt$, где S – площадь внутри контура, пронизанная магнитным полем. Тогда в правой части можно написать $-H \cdot dS/dt$ или $-d(HS)/dt$, так как у нас величина H от времени не зависит. Величина $\Phi = HS$ или в более общем виде $\Phi = \int(\mathbf{H} d\mathbf{S})$ по **незамкнутой** поверхности S , натянутой на некоторый контур, называется **магнитным потоком** через поверхность S . Окончательно имеем **закон Фарадея**:

$$\oint_L(\mathbf{E} d\mathbf{L}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \quad \text{где } \Phi = \int_{S_L}(\mathbf{H} d\mathbf{S}). \quad (6.1)$$

Здесь L – произвольный контур, S_L – опирающаяся на него поверхность, а направление вектора $d\mathbf{S}$ выбирается в сторону, куда двинется буравчик (правый винт), вращаемый по направлению обхода контура L . Поверхность S , имеющая границей контур L , в остальном произвольна. Поток от деформации S не зависит в силу теоремы Гаусса (все силовые линии все равно пройдут насквозь).

Закон (6.1) выполняется также, когда меняется не S , а магнитное поле. В эксперименте 29 августа 1831 г. Фарадей именно открыл этот закон, включая и выключая поле в катушке. Контуром, через который менялся магнитный поток, была такая же катушка, намотанная поверх (но изолированная от первой) и замкнутая на гальванометр. И нам можно было считать L и S_L фиксированными, а поле H – переменным (уменьшающимся до нуля в узкой переходной зоне, которая перемещается со скоростью $-u$).

В нашем примере при обходе по часовой стрелке $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L}) > 0$, так как справа поле \mathbf{E} направлено вниз, а слева $E = 0$. Буравчик, вращаемый по выбранному пути, двинется «в лист», то есть направления \mathbf{H} и $d\mathbf{S}$ совпадают. Сам $\int(\mathbf{H} d\mathbf{S}) > 0$, но он уменьшается: $d\Phi/dt < 0$. Минус в правой части исправляет равенство. По-другому можно определить направление \mathbf{E} из **правила Ленца**: токи, вызываемые электрическим полем в контуре, стремятся компенсировать изменение магнитного потока. Если конденсатор заменить сопротивлением, ток пойдет по часовой стрелке и создаст дополнительное поле \mathbf{H}' того же направления, что исходное \mathbf{H} . Это поле компенсирует (вообще говоря, частично) уменьшение основного магнитного потока.

Если вернуться в систему отсчета К, то там поле E потенциально, $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0$. Уравнение (6.1) также выполняется, если мы рассматриваем неподвижный в системе К контур, поскольку через него магнитный поток не меняется: правая часть (6.1) равна нулю. Но если взять **подвижный контур**, одна из сторон которого движется вместе с проводником, то через него магнитный поток будет уменьшаться. Принята и другая форма записи закона Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt},$$

где \mathcal{E} – это **электродвижущая сила**, возникающая в меняющемся контуре (в данном случае – из-за силы Лоренца, $\mathcal{E} = \oint (\mathbf{F}_L/e) d\mathbf{L}$ по контуру). Смысл сторонней, то есть неэлектрической, э.д.с. \mathcal{E} в том, что она вызывает токи в цепи совершенно так же, как любой источник тока. Например, если сопротивление замкнутого контура R , пойдет ток \mathcal{E}/R .

Величины \mathcal{E} и $\oint (\mathbf{E} d\mathbf{L})$, хотя численно и равные, существуют в разных системах отсчета. В то же время они не совсем чужие, так как поля \mathbf{H} и \mathbf{E} родственны. Мы видим, что при переходе в другую систему из магнитного поля делается электрическое.

Изменяя магнитный поток через контур (двигая проводники или меняя поля от других контуров), можно вызвать в контуре токи. На этом основана современная электротехника, если не считать приборов типа карманного фонаря, где сторонние силы – химического происхождения. Генераторы, грубо говоря, – это рамки, вращаемые внешними силами в магнитном поле.

Рассмотрим катушку, через которую пропускается возрастающий ток (разрез показан на рис. 6.3). Внутри катушки будет возрастающее магнитное поле. Если взять контур в виде соосного круга, то через него будет возрастающий магнитный поток, $d\Phi/dt > 0$. Тогда по закону Фарадея появится ненулевая циркуляция \mathbf{E} по контуру: $\oint (\mathbf{E} d\mathbf{L}) < 0$, если двигаться по часовой стрелке. Из симметрии надо считать \mathbf{E} направленным вдоль окружности и на ней постоянным по величине. Получаем **электрическое** поле вполне соленоидального характера с **замкнутыми** силовыми линиями. Случай, когда круг имеет больший радиус, чем катушка (показанный на рис. 6.3) интересен тем, что в близкой окрестности электрической силовой линии магнитного поля нет, что не мешает возникновению электрического поля.

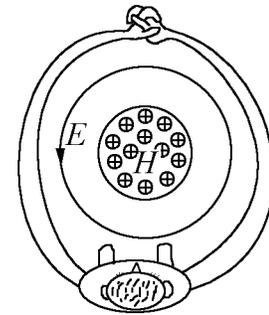


Рис. 6.3.

Такое поле нельзя сделать **никаким** распределением зарядов, так как от каждого заряда поле будет потенциально. Поэтому рассуждения о поляризации проводов и магнитов в начале параграфа, собственно, не так важны. Вывод: изменяющееся магнитное поле способно порождать электрическое. Опять видим, что основные объекты – это поля.

Эффекты непотенциальности поля \mathbf{E} вокруг катушки с изменяющимся током вполне заметны. Вольтметр с замкнутыми проводами, охватывающими катушку, покажет $\mathcal{E} \propto d\Phi/dt$, а если провода «с одной стороны» катушки, показания прибора будут совершенно другие (в идеале ноль). Эти индуктивные наводки сильно затрудняют измерения в цепях с быстропеременными токами. Пусть у нас есть катушка с сечением 100 см^2 , а поле нарастает со скоростью $3 \cdot 10^8 \text{ СГС}$ (300 эрстед за микросекунду). Тогда циркуляция по наружному контуру равна $100 \cdot 3 \cdot 10^8 / 3 \cdot 10^{10} = 1 \text{ СГС}$, или 300 В. Если человек (не прикасаясь к катушке!) сделает руками вокруг нее кольцо, по нему пойдет ток, в точности как если взяться за провода с таким напряжением; этот

ток смертельный, да еще с некоторым запасом. Впрочем, долго поддерживать такой рост поля трудно: уже через 3 миллисекунды получился бы мегагаусс.

В электростатике $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0$, но важное значение имеет напряжение $V = \int(\mathbf{E} d\mathbf{L})$ по незамкнутому контуру (например, оно вызывает поражения током). Поскольку нет магнитных зарядов, $\oint(\mathbf{H} d\mathbf{S}) = 0$ для любой замкнутой поверхности. А поток через незамкнутую поверхность $\Phi = \int(\mathbf{H} d\mathbf{S})$ тоже очень важен. Аналогично важны $\oint(\mathbf{E} d\mathbf{S})$ и $\oint(\mathbf{H} d\mathbf{L})$, а «незамкнутые» интегралы ничего существенного не выражают.

Закон Фарадея – это исправленная (и уже окончательная) форма одного из уравнений Максвелла. В дифференциальной форме это уравнение имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (6.2)$$

Поскольку электрическое поле катушки с изменяющимся током (рис.6.3) дает ненулевую циркуляцию по замкнутому контуру, оно не сводится к градиенту **однозначного** скалярного потенциала. Вне катушки можно использовать неоднозначный потенциал, пропорциональный аксиальному углу (как для магнитного поля от прямого провода, и с теми же неудобствами). Но внутри катушки ротор \mathbf{E} не равен нулю, так что там в принципе нельзя представить \mathbf{E} в виде градиента какой-либо функции. Однако можно связать электрическое поле с **векторным** потенциалом.

Вспомнив представление $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, из (6.2) получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad \text{откуда} \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{F},$$

где \mathbf{F} – любая векторная функция координат и времени, ротор которой равен нулю. Такая функция может быть представлена как градиент скалярной функции:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (6.3)$$

В предельном случае статического поля $\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$, так что φ есть не что иное, как скалярный потенциал. Выражение (6.3) обобщает связь (2.10) электрического поля с потенциалом φ . Видим, что в общем случае для электрического поля требуются два потенциала – скалярный и векторный. Другими словами, поле \mathbf{E} , вообще говоря, разлагается на потенциальную и соленоидальную части (поле \mathbf{H} чисто соленоидально).

В частном случае, изображенном на рис. 6.3, достаточно только векторного потенциала. Проверьте, что потенциал

$$A_\alpha = \frac{H(t)r}{2} \text{ внутри } (r < R), \quad A_\alpha = \frac{R^2 H(t)}{2r} \text{ снаружи } (r > R), \quad A_z = A_r = 0,$$

где $H(t)$ – заданная функция времени, r, α, z – цилиндрические координаты, ось z совпадает с осью катушки, R – радиус катушки, дает правильные поля:

$$H_z = H(t), \quad E_\alpha = -r \dot{H}(t) / 2c \text{ при } r < R, \quad H = 0, \quad E_\alpha = -R^2 \dot{H}(t) / 2cr \text{ при } r > R.$$

В присутствии диэлектриков и магнетиков в левых частях уравнений (6.1,6.2) следует писать по-прежнему истинное среднее электрическое поле в веществе, а в правых – истинное среднее магнитное поле, т.е. вектор магнитной индукции:

$$\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = -\frac{1}{c} \cdot \int_{S_L} (\mathbf{B} d\mathbf{S}), \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (6.4)$$

6.2 Энергия магнитного поля. Индуктивность

Магнитное поле, как и электрическое, тоже имеет энергию. Рассмотрим две шины длины L , ширины b , по которым течет ток I (рис. 6.4). Поле между шинами $H = 4\pi I/cb$ – это сумма двух полей от шин $H_{1,2}$, каждое из которых равно $2\pi I/cb$. Сила, действующая на одну из шин, по закону Ампера $F = IH_i L/c = 2\pi I^2 L/c^2 b = (H^2/8\pi) \cdot Lb$. Видим, что поле \mathbf{H} оказывает магнитное давление $p = H^2/8\pi$, чем напоминает электрическое поле. H в данном случае давит наружу: шины, между которыми заключено магнитное поле, отталкиваются (пластины же заряженного конденсатора притягиваются).

Перейдем к вычислению энергии. Пусть расстояние между шинами увеличивается от нулевого до величины x , при постоянной величине тока и магнитного поля. Для поддержания тока нужен внешний источник. Э.д.с., или напряжение, возникающее при растяжении контура,

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \cdot H \cdot \frac{dS}{dt} = -\frac{HL}{c} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

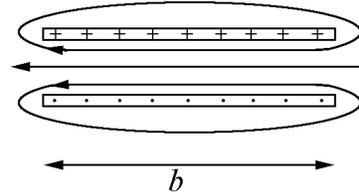


Рис. 6.4.

(Направление обхода выбрано по току). Будь контур просто замкнут, ток под действием этой эдс стал бы уменьшаться; для поддержания тока нужна противоположная эдс источника $+(HL/c) \cdot dx/dt$. Такое напряжение и надо приложить к контуру. Работа источника $dA = (HL/c) \cdot (dx/dt) \cdot I \cdot dt = (HLI/c) \cdot dx$ за время dt . Перемещение на расстояние x требует работы $A = HLIx/c$.

Поскольку шины отталкиваются, они сами совершают работу $A = Fx = (H/2)LI/c \cdot x$, вдвое меньшую по величине. Ее надо вычесть из работы источника, чтобы найти изменение энергии системы токов:

$$\Delta W = \frac{HLIx}{2c} = \frac{H^2}{8\pi} Lbx.$$

На единицу объема поля приходится энергия

$$w = \frac{H^2}{8\pi}, \quad (6.5)$$

совершенно аналогично электрическому случаю (2.26).

Выразим теперь энергию (уже всего объема) через ток:

$$W = \frac{2\pi LxI^2}{c^2 b} = \frac{\mathcal{L} I^2}{2c^2}.$$

Коэффициент $\mathcal{L} = 4\pi Lx/b$ с размерностью длины называется **индуктивностью**. Это – аналог емкости. Разумеется, для другой формы проводов индуктивность другая. Например, у катушки $\mathcal{L} = 4\pi N^2 S/h$. Но по-прежнему энергия пропорциональна квадрату тока (в электростатике аналог: $q^2/2C$). У проводника простой формы индуктивность порядка длины. Единица индуктивности в СИ – генри; из формулы $W = \mathcal{L}I^2/2$ (нет c !) получаем $1 \text{ Гн} = \text{Дж}/\text{А}^2 = c^2 \cdot 10^7 / (3 \cdot 10^9)^2 = 10^9 \text{ см}$.

Другой способ определения индуктивности – через магнитный поток. Для катушки один виток дает $\Phi_1 = 4\pi NIS/ch$. Силовые линии проходят сквозь все витки, и суммарный поток через катушку $N\Phi_1 = 4\pi N^2 IS/ch$. Индуктивность определяется из

$$\Phi = \frac{\mathcal{L}I}{c}.$$

Получаем то же значение \mathcal{L} . Формула аналогична электрической $q = CV$. Контур надо брать замкнутый; у нас считается, что вклад замыкающих проводов по сравнению с самой катушкой мал.

Если в одном контуре идет ток, создается магнитное поле, и его силовые линии могут пронизывать другой контур. Поток через контур 2 от контура 1 $\Phi_{12} = \mathcal{L}_{12} \cdot I_1/c$, где \mathcal{L}_{12} – **коэффициент взаимоиנדукции** двух контуров. Например, на рис. 6.5 один контур – катушка из N_1 витков, площади S_1 и высоты h_1 , а на нее надета катушка N_2 , $S_2 > S_1$, $h_2 < h_1$ (постановка опыта Фарадея). Поле $H_1 = 4\pi N_1 I_1 / ch_1$, поток $\Phi_{12} = H_1 N_2 S_1 = 4\pi N_1 N_2 I_1 S_1 / ch_1 = \mathcal{L}_{12} \cdot I_1 / c$. Взаимоиנדукция $\mathcal{L}_{12} = 4\pi N_1 N_2 S_1 / ch_1$. Можно показать, что всегда $\mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{21}$ (покажите для этого примера).

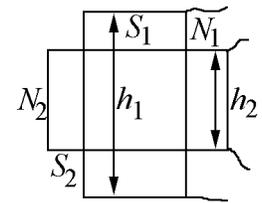


Рис. 6.5.

Пусть имеются две катушки, причем линии индукции поля, созданного первой, целиком проходят через вторую (как на рис. 6.5), и через контур 1 пропускают переменный ток $I_1(t)$. В нем возникает э.д.с. $-(1/c) \cdot d\Phi/dt = -(\mathcal{L}_1/c) \cdot dI_1/dt$. Для противодействия ей следует прикладывать к индуктивности напряжение $V_1 = +\mathcal{L}_1 \cdot dI_1/dt$. На выходе катушки 2 будет напряжение $V_2 = -(1/c) \cdot d\Phi_{12}/dt = -(\mathcal{L}_{12}/c) \cdot dI_1/dt$. Отношение напряжений

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\mathcal{L}_{12}}{\mathcal{L}_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Такие **трансформаторы** позволяют получать из высокого напряжения низкое и наоборот. В бытовой аппаратуре, кроме того, они отвязывают схему от сети. Ферромагнитные сердечники ($\mu \gg 1$) позволяют мотать катушки необязательно одну поверх другой, так как почти все силовые линии \mathbf{B} заключены в магнитопроводе. Так как магнитный поток определяется \mathbf{B} , индуктивность катушки с сердечником возрастет в μ раз; энергия поля в линейном магнетике (с постоянной магнитной проницаемостью μ)

$$w = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu} = \frac{(\mathbf{B}\mathbf{H})}{8\pi}, \quad (6.6)$$

что аналогично электростатическим соотношениям (3.10).

Но имеется и практическое различие: значительная намагниченность (\mathbf{B} резко не равно \mathbf{H} , μ заметно отличается от 1) почти всегда означает нелинейность, когда μ непостоянна, или же вообще не имеет смысла как характеристика вещества (гистерезис, обсуждавшийся в п. 5.6). Тогда следует писать

$$w = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{H} d\mathbf{B}),$$

где интеграл берется от состояния, в котором $B = H = 0$, до конечного, причем вдоль реальной кривой $B(H)$, по которой менялось состояние магнетика.

На рис. 6.6 показана так называемая петля гистерезиса, по которой путешествует состояние материала при периодических изменениях $H(t)$. Существенно, что «магнитная» энергия есть не только энергия магнитного поля, а включает и отклик вещества: это вся энергия, потраченная источником на создание данного магнитного состояния. За цикл будет израсходована энергия, равная площади цикла, деленной на 8π . Но раз магнитное состояние воспроизвелось то же, что было в начале, то и энергия, заключенная «чисто» в

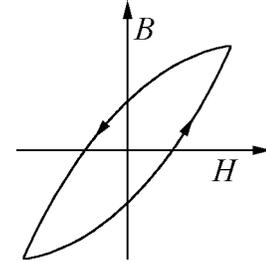


Рис. 6.6.

магнитном поле, не изменилась. Поэтому постоянно добавляемая энергия идет в тепло. Если петля широкая (площадь ее велика), то магнетик будет сильно нагреваться. Для трансформаторов, в которых магнитное поле меняется именно циклически, подбирают материалы с узкой петлей гистерезиса (и по возможности не заходят в режим насыщения). Заметим, что подобные вещи происходят и в некоторых диэлектриках (сегнетоэлектрики), но при этом существуют широкие классы линейных диэлектриков с заметной диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon - 1 \gtrsim 1$).

В 1912 г. открыто явление **сверхпроводимости**. При низких температурах (обычно несколько градусов Кельвина) удельное сопротивление некоторых металлов обращается в нуль (не просто мало, а буквально нулевое). Соответственно электропроводность становится бесконечной. Поэтому внутри сверхпроводника в принципе не может быть электрического поля. Из закона Фарадея следует, что там равна нулю и магнитная индукция. Если по сверхпроводящему проводу пустить ток, поле \mathbf{B} возникнет только снаружи провода, а внутри останется $\mathbf{B} = 0$. Следовательно, в толще проводника равна нулю плотность тока, так как она пропорциональна $\text{rot}\mathbf{B}$. Поэтому весь ток сосредоточен в тонком поверхностном слое². Важное свойство сверхпроводящего контура – через него магнитный поток всегда сохраняется. Действительно, если контур L проходит целиком внутри сверхпроводника, $\oint_L (\mathbf{E} d\mathbf{L}) = 0$, но этот интеграл пропорционален $d\Phi/dt$.

Если в сверхпроводник магнитное поле не проникает вообще, то в хороший проводник поля и токи просачиваются постепенно, за небольшое время – на малую толщину так называемого **скин-слоя** (skin – кожа). Пусть над поверхностью проводника внезап-

²Более того, если при комнатной температуре ток шел по толще провода, при охлаждении до температуры сверхпроводящего перехода он вытесняется на поверхность (эффект Мейснера), вытесняется наружу и магнитное поле.

но создано постоянное поле $H_0 = H_z$, параллельное поверхности (рис. 6.7; это значит, что вдоль направления y внезапно пустили ток с линейной плотностью $cH_0/4\pi$). Далее ток и поля проникают сверху вниз. В скин-слое $\text{rot}H = -\partial H/\partial x = 4\pi j/c = 4\pi\sigma E/c$. Из закона Фарадея в другой проекции $\text{rot}E = \partial E/\partial x = -(1/c) \cdot \partial H/\partial t$. Прежде чем решать систему уравнений, оценим толщину слоя $\delta(t)$, полагая $\partial H/\partial x \sim H/\delta$, $\partial H/\partial t \sim H/t$, $\partial E/\partial x \sim E/\delta$. Получаем

$$\delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{4\pi\sigma} \cdot t}.$$

Если нас не интересует информация о распределениях E и H в слое, на этом можно остановиться. Видим, что δ растет со временем как \sqrt{t} , подобно задачам диффузии и теплопроводности. Говорят, что поле диффундирует в металл. Для меди $\delta \sim 14 \cdot \sqrt{t}$ в СГС; при $t = 1$ мкс $\delta \sim 0,14$ мм. Для переменного тока вместо t подойдет $1/\omega$ и при промышленной частоте 50 Гц ($\omega = 314$ 1/с) скин-слой будет около 1 см. У не очень толстых проводов «работает» все сечение.

Из уравнений скина, исключая электрическое поле, получим уравнение диффузии:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial^2 H}{\partial x^2},$$

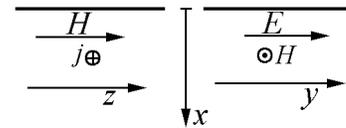


Рис. 6.7.

где ν называют коэффициентом магнитной диффузии, иногда – магнитной вязкостью. В задаче нет никаких характерных масштабов, и единственный размерный параметр – это ν (см²/с). Поэтому естественно искать решение в виде $H(\xi)$, где $\xi = x/\sqrt{\nu t}$:

$$H'' = -\xi H'/2,$$

откуда $\ln(H'/H'(0)) = -\xi^2/4$, $H' = H'(0) \exp(-\xi^2/4)$,

$$H = H_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\xi \right).$$

Энергия магнитного поля может быть гораздо больше, чем электрического. E ограничено пробоем (\sim сотен кВ/см или 10^3 СГС). Магнитного пробоя не бывает, так как нет магнитных зарядов. Постоянные магниты дают $\sim 10^4$ гаусс (то есть единиц СГС), электромагниты $\sim 10^5$, в одноразовых импульсных катушках (обычно одновитковых) достигается $\sim 10^6$. Большие поля получают при магнитной кумуляции. Если хорошо проводящий цилиндр с продольным магнитным полем внутри быстро сжать (взрывом), то изменения поля не проникают в толщу металла, и там $E = 0$. Поэтому сохраняется магнитный поток через цилиндр. Если радиус уменьшить в 10 раз, поле должно возрасти в 100 раз. Рекорд 25 Мэ принадлежит А.Д. Сахарову и др. (1965).

Разница в знаках магнитного и электрического давлений на самом деле кажущаяся. Возьмем замкнутую катушку, для которой сохраняется магнитный поток Φ (тогда не нужен источник). Энергия $\mathcal{L}I^2/2c^2 = \Phi^2/2\mathcal{L}$. Увеличим длину катушки на

dh ; индуктивность $\mathcal{L} = 4\pi N^2 S/h$ уменьшится, а энергия возрастет. Предоставленная самой себе, катушка будет укорачиваться, уменьшая энергию. Сила $F = dU/dh = (\Phi^2/2) \cdot (dh/dh)/(4\pi N^2 S)$. Подставляя $\Phi = N H S$, получим $F = (H^2/8\pi) \cdot S$, то есть магнитное натяжение $H^2/8\pi$ вдоль силовых линий. Точно так же ведет себя электрическое поле: его силовые линии стремятся сократиться с силой $E^2/8\pi$ на см^2 , почему и притягиваются пластины конденсатора. Правда, естественная для H постановка о скачке давления поперек силовых линий для E прямо неприменима, так как скачок параллельной составляющей E в электростатике невозможен. Но среде при непрерывном E_{\parallel} возможен скачок D_{\parallel} . Например, под действием разности электрических давлений диэлектрик втягивается в конденсатор (см. пример в п. 3.3, стр. 42). Более формально это свойство поля выражается введением **тензора натяжений**. При $\varepsilon = \mu = 1$

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(E_i E_k - \frac{E^2}{2} \delta_{ik} \right), \quad T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(H_i H_k - \frac{H^2}{2} \delta_{ik} \right),$$

то есть форма T_{ik} совершенно одинакова для электрического и магнитного полей. Чтобы получить силу, действующую на некоторый объем, надо проинтегрировать элементарные силы по окружающей этот объем замкнутой поверхности:

$$F_i = \oint_S T_{ik} dS_k,$$

причем подразумевается суммирование по «немому» индексу k .

Пример. Рассмотрим втягивание металлической пластины в конденсатор. Пусть поле в свободной части конденсатора $E = E_y = V/d$ (рис. 6.8), тогда над пластиной будет $E_1 = V/(d-c)$. Выделяем поверхность с границами вне зоны краевого эффекта (показана пунктиром). Натяжение $T_{11} = T_{xx} = E_x^2/4\pi - E^2/8\pi = -E^2/8\pi$ (отрицательное натяжение означает положительное давление), сила справа будет $T_{xx} \Delta S_x = b d E^2/8\pi = b V^2/8\pi d$, где b – ширина обкладок (поперек рисунка), направлена влево, сила слева $b(d-c) E_1^2/8\pi = b V^2/8\pi(d-c)$, направлена вправо, суммарно $(b V^2/8\pi)(1/(d-c) - 1/d)$ вправо (пластина втягивается).

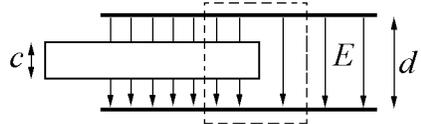


Рис. 6.8.

Эту же силу можно получить, рассматривая энергию конденсатора: $U = q^2/2C(x)$, $F = -dU/dx = (q^2/2C^2)dC/dx = (V^2/2)dC/dx$, $C = (b/4\pi)(x/(d-c) + (a-x)/d)$, здесь a – длина обкладок, x – расстояние, на которое вставлена пластина. Обратите внимание, что сила, вычисляемая по T_{ik} , приложена «к пустому месту», а реально втягивающая сила действует на торец металлической пластины, где собираются поляризационные заряды. Следовательно, действие натяжений на элементарную площадку никакого смысла не имеет, а правильный результат получается только для полной замкнутой поверхности.

В среде при постоянных ε , μ силы (при данных полях E , H , и в первом приближении) умножаются на проницаемости (максвелловский тензор натяжений):

$$T_{ik} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(E_i E_k - \frac{E^2}{2} \delta_{ik} \right), \quad T_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \left(H_i H_k - \frac{H^2}{2} \delta_{ik} \right).$$

Можно сказать, что поля подобны резинкам, натянутым с силой $(HB$ или $ED)/8\pi$ на см^2 и отталкивающимися друг от друга с таким же давлением. На границе раздела веществ при постоянном значении E_{\parallel} возможен скачок D_{\parallel} . Это позволяет вычислить силу, с которой диэлектрик втягивается в конденсатор под действием разности электрических давлений. Более аккуратный подход учитывает еще так называемые стрикционные натяжения, которые обычно не сказываются на конечном результате. Здесь мы их не разбираем; подробнее ознакомиться с вопросом можно по курсу И.Е. Тамма.

Задача. Найти силу, с которой втягивается в катушку с током стержень из магнетика с магнитной проницаемостью μ .

Обсудим, откуда берется магнитное поле Земли. Когда-то думали, что внутри Земли имеется большой постоянный магнит. По современным представлениям, Земля имеет железное ядро, внешний радиус которого около половины земного радиуса (соответственно объем ядра около 1/8 объема Земли). Но в ядре слишком высоки температуры (3000 – 4000 К), чтобы оно находилось в ферромагнитном состоянии и могла существовать постоянная намагниченность.

Ядро, кроме самой внутренней его части радиусом около 1200 км, жидкое. В жидком железе из-за внутреннего нагрева радиоактивным распадом (в основном таких примесей, как уран, торий и калий-40) происходит конвекция. При появлении случайного затравочного магнитного поля в проводящем движущемся веществе возникает эдс индукции. Возникают токи, сами создающие магнитное поле. Если течение имеет подходящую конфигурацию, это добавочное поле складывается с начальным. Далее усиливается суммарное поле, и т.д. Подобный процесс самовозбуждения происходит в промышленных генераторах электрического тока – динамомашинах, почему возникновение поля за счет кинетической энергии потоков жидкости и называют эффектом **гидромагнитного динамо**. Он возможен при высокой электропроводности среды, больших размерах, достаточной скорости течений и подходящей структуре потоков. На конвекцию существенно влияет вращение Земли, которое в конце концов определяет преимущественное направление оси магнитного диполя, близкое к оси вращения. Это значит, что средний ток в ядре кольцевой, направленный более или менее вдоль экватора. Но поскольку поле – продукт неустойчивости, иногда происходит «переполюсовка», в последнее время – несколько раз за миллион лет. В периоды смены знака величина поля заметно меньше, а «временные» полюса гуляют по всей поверхности Земли.

Сейчас южный магнитный полюс находится в северном полушарии (там вектор поля направлен вниз). Это значит, что ток в ядре течет приблизительно с востока на запад, в направлении вращения Земли. Ось диполя наклонена на $11,5^\circ$ и прецессирует на запад со скоростью $\sim 0,2^\circ$ в год. Точки пересечения оси магнитного диполя с земной поверхностью называют **геомагнитными полюсами**. От них следует отличать **магнитные полюсы Земли**, определяемые как точки, где магнитная стрелка направляется по вертикали, и ориентировка по

магнитному компасу невозможна. Южный магнитный полюс (на географических картах называемый северным) находится на территории Канады (о. Батерст в архипелаге Парри, около 100° западной долготы, 76° северной широты), а северный магнитный полюс (на картах южный) – при 140° восточной долготы, 66° северной широты. Получается, что полюса на картах заметно перекошены, даже относительно наклонной оси диполя: по дуге большого круга их разделяет 159° (или можно сказать, что 201°). Это частично связано с местными аномалиями, а частично – с некоторым произволом фиксирования магнитных полюсов Земли на глобусе: компас бесполезен не в двух точках, а скорее в довольно обширных местностях. Интересно, что указанные точки находятся вне главных географических объектов, пронизываемых земной осью вращения – открытого Северного Ледовитого океана и материка Антарктиды.

6.3 Цепи переменного тока. Импеданс. Простейшие импульсные цепи

Постоянный ток, с которого начиналось применение электричества, сейчас используется довольно редко. Основа нынешней техники – переменный ток. Разберем вначале важный случай периодического синусоидального тока (на котором работают бытовые приборы и электрические машины в промышленности³). Генераторы переменного тока проще и удобнее: по существу, это вращающиеся в магнитном поле контуры, или рамки. От генераторов через систему передающих устройств электричество доставляется потребителям в виде синусоидального напряжения в розетке: $U = U_0 \cos(\omega t)$. В России частота $\omega = 2\pi \cdot 50 \cong 314$ Гц.

Кроме резисторов (они же сопротивления), в цепях переменного тока используются конденсаторы и индуктивности. Рассмотрим в виде примера RC -цепь, на которую внезапно подано переменное напряжение $U = U_0 \cos(\omega t)$ при $t > 0$, $U = 0$ при $t < 0$ (рис. 6.9). Найдем ток $I(t)$. Сумма напряжений $RI + q/C = U$ или

$$RI + (1/C) \int I dt = U.$$

Дифференцируем и получаем

$$R \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\omega U_0 \sin(\omega t).$$

Как известно, любое решение линейного дифференциального уравнения есть сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения (с нулевой правой частью). Частное решение, поскольку оно порождается правой частью, естественно искать в синусоидальном виде:

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

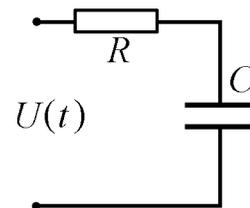


Рис. 6.9.

³Чаще под переменным током и понимается не любой непостоянный, а именно синусоидальный.

где константа φ называется фазовым сдвигом. Подставляя в уравнение и заменяя для удобства $\sin(\omega t)$ на $\sin(\omega t + \varphi - \varphi)$, получаем

$$-RI_0\omega \sin(\omega t + \varphi) + \frac{I_0}{C} \cos(\omega t + \varphi) = -\omega U_0 \cos \varphi \sin(\omega t + \varphi) + \omega U_0 \sin \varphi \cos(\omega t + \varphi).$$

Это выполняется для любого момента времени, если

$$RI_0 = U_0 \cos \varphi, \quad \frac{I_0}{C} = \omega U_0 \sin \varphi, \quad \text{откуда} \quad I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}}, \quad \text{tg} \varphi = \frac{1}{\omega RC}.$$

Общее решение однородного уравнения ищем в виде $I = A \exp(-\lambda t)$:

$$-RA\lambda \exp(-\lambda t) + \frac{A}{C} \exp(-\lambda t) = 0, \quad \text{откуда} \quad \lambda = \frac{1}{RC}.$$

Таким образом, общее решение (то есть любой возможный в данной цепи и при данном входном напряжении ток) можно записать в виде

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi) + A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Постоянную A следует подобрать из начальных условий. Пусть, например, начальное напряжение на конденсаторе $U_C(0) = 0$. В любой момент времени $U_C = U_0 \cos(\omega t) - RI(t)$, откуда в начальный момент

$$U_0 - \frac{U_0 R}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}} \cos(\varphi) - AR = 0, \quad \Rightarrow A = \frac{U_0}{R(1 + (\omega RC)^2)}.$$

При ненулевом начальном напряжении на конденсаторе получим другое значение A . Существенно, однако, что вклад «однородного» решения экспоненциально спадает со временем. Поэтому по истечении нескольких характерных времен RC при любом A решение станет практически колебательным:

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{где} \quad \text{tg} \varphi = \frac{1}{\omega RC}.$$

В технике преимущественно важны именно такие стационарные токи – решения неоднородного уравнения, порождаемые внешними воздействиями на схему и существующие в течение неопределенного времени. Кратковременные импульсы, возникающие при несогласованности стационарного решения с начальными условиями, называются **переходными процессами** и представляют сравнительно частный интерес. В этом разделе мы ограничимся стационарными решениями, для отыскания которых существуют гораздо более производительные методы, чем лобовое решение дифференциальных уравнений.

В частности, полезны **векторные диаграммы**. Изобразим ток I_0 горизонтальным вектором. Переменный ток $I_0 \cos(\omega t)$ получим, закрутив исходный вектор против часовой стрелки с угловой скоростью ω : горизонтальная проекция вектора именно и даст

нужную величину. Напряжение на сопротивлении RI изобразится вектором, параллельным току. Этот вектор точно так же вращается, отбрасывая на горизонтальную ось проекцию – реальное напряжение.

При токе $I = I_0 \cos(\omega t)$ напряжение на конденсаторе (пропорциональное заряду, т.е. интегралу от тока) будет $(I_0/\omega C) \sin(\omega t)$. Его изображаем вектором длины $I_0/\omega C$, направленным под прямым углом к току вниз на рисунке 6.10. Как раз при повороте на угол ωt его горизонтальная проекция будет $(I_0/\omega C) \sin(\omega t)$.

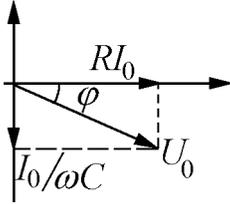


Рис. 6.10.

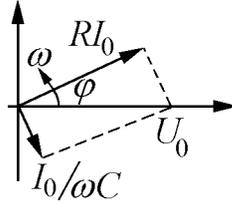


Рис. 6.11.

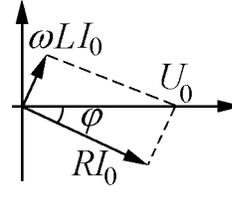


Рис. 6.12.

Сумма реальных напряжений – это сумма проекций на горизонтальную ось, равная проекции суммы векторов. Поэтому можно нарисовать вектор суммарного напряжения длиной $U_0 = I_0 \cdot \sqrt{(1/\omega C)^2 + R^2}$. Это и будет амплитуда входного напряжения. Напряжение отстает по фазе от тока на угол φ , причем $\operatorname{tg} \varphi = 1/\omega RC$.

Для полного соответствия с предыдущим решением можно повернуть картинку в исходном положении на угол φ , тогда горизонтальным вектором изобразится напряжение, а ток будет вектором длины $U_0/\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$, имеющим начальный наклон φ . Далее вся диаграмма крутится со скоростью ω против часовой стрелки (рис. 6.11).

Попробуем метод векторных диаграмм на LR – цепи. В электротехнике в виде исключения удобнее система СИ. Эдс индукции в СИ $\mathcal{E} = -d\Phi/dt = -L \cdot dI/dt$. Чтобы скомпенсировать ее и прогонять ток через индуктивность (представляющую собой, попросту, некоторый провод), нужно приложить напряжение $U_L = +L \cdot dI/dt$. При токе $I_0 \cos(\omega t)$ напряжение на индуктивности $U_L = -\omega LI_0 \sin(\omega t)$. Это – проекция вектора, опережающего ток на угол $\pi/2$. Сумма векторов напряжений будет $I_0 \cdot \sqrt{(\omega L)^2 + R^2}$ и направлена под углом φ к току, тоже с опережением; $\operatorname{tg} \varphi = \omega L/R$. Если напряжение при $t = 0$ «горизонтально», $U = U_0 \cos(\omega t)$, придаем картинке начальный поворот на угол φ назад (рис. 6.12). Имеем $I = (U_0/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}) \cos(\omega t - \varphi)$.

Векторные диаграммы облегчают решение, но с усложнением цепи быстро становятся необозримыми. Однако можно упростить задачи переменного тока почти «до уровня постоянного», перейдя в область комплексных чисел. По формуле Эйлера $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$. Запишем входное напряжение в виде $U_0 \exp(i\omega t)$, то есть прибавим к настоящему U мнимую часть. Ток тоже ищем в виде $I = I_0 \exp(i\omega t)$. Мнимое напряжение вызывает добавочный мнимый ток, но мы от него избавимся в конце расчета, пользуясь линейностью уравнений.

Для RL -цепи напряжение $U_L = +L \cdot dI/dt$. При токе $I = I_0 \exp(i\omega t)$ $U_L = i\omega L I_0 \exp(i\omega t) = i\omega L \cdot I$. Решаем:

$$RI + i\omega LI = U; \quad I = U/(R + i\omega L),$$

так как во всех слагаемых одинаковая зависимость от времени: $\exp(i\omega t)$. Вопрос, как это понимать. Вспомним, что надо взять действительную часть тока. Полезна **показательная форма** комплексного числа:

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \exp(i\varphi), \quad \text{где } \operatorname{tg}\varphi = y/x.$$

Знаменатель будет равен $R + i\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \exp(i\varphi)$, где $\operatorname{tg}\varphi = \omega L/R$. Тогда

$$I = \frac{U_0 \exp(i\omega t)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \exp(i\varphi)} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \exp(i(\omega t - \varphi)) \Rightarrow \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi).$$

Получен тот же результат, что при векторном способе, но явно быстрее. Аналогично для конденсатора току $I = I_0 \exp(i\omega t)$ соответствует напряжение $U_C = I_0 \exp(i\omega t)/(i\omega C) = I/(i\omega C)$.

Итак, для каждого элемента при токе в виде мнимой экспоненты комплексное напряжение пропорционально току, т.е. существует аналог сопротивления:

$$Z_R = R; \quad Z_C = 1/i\omega C; \quad Z_L = i\omega L.$$

Такие комплексные сопротивления называются **импедансами**. Для них выполняются те же правила соединения и законы Кирхгофа, как для обычных сопротивлений, и задачи решаются так же, как в цепях постоянного тока. Только в конце надо выделить действительную часть.

Для резонансного RLC -контура (рис. 6.13) $RI + (1/i\omega C)I + i\omega LI = U$;

$$I = \frac{U}{R + i(\omega L - 1/\omega C)} \Rightarrow \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi),$$

где $\operatorname{tg}\varphi = (\omega L - 1/\omega C)/R$. Зависимость амплитуды тока от частоты – резонансная кривая – похожа на «механическую» (на рис. 6.14 показаны три кривые, у которых отличаются сопротивления). Здесь тоже внешняя сила вызывает колебания, причем аналог массы – L , трения – R , а упругости – $1/C$. Максимум тока – когда $\omega L = 1/\omega C$; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (собственная частота контура). Вблизи ω_0 выражение $(\omega L - 1/\omega C) \cong 2 \cdot \sqrt{L/C} \cdot \Delta\omega/\omega_0$. При характерных величинах $L = 10$ мкГ, $C = 1$ нФ, $R = 0,1$ Ом $\omega_0 = 10^7$ Гц, что соответствует длине волны $2\pi c/\omega_0 = 200$ м. **Волновое сопротивление** $\sqrt{L/C} = 100$ Ом. Ширина резонансной кривой определяется по падению амплитуды тока в $\sqrt{2}$ раз, то есть $2 \cdot \sqrt{L/C} \cdot \Delta\omega/\omega_0 = R$, откуда $2\Delta\omega/\omega_0 \sim 10^{-3}$. Такое резкое падение амплитуды с удалением от резонанса типично в радиотехнике и позволяет настроиться на нужную станцию (частоту), не слыша других.

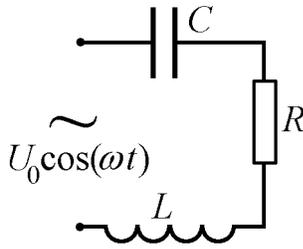


Рис. 6.13.

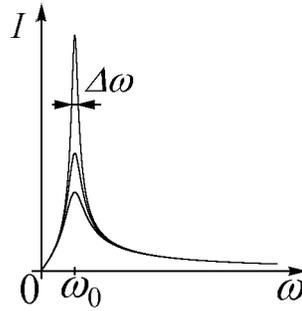


Рис. 6.14.

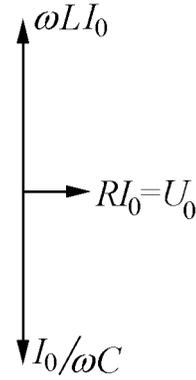


Рис. 6.15.

Резонансная цепь не только выделяет нужную частоту, но и усиливает сигнал. В резонансе напряжение на сопротивлении RI равно входному U . Но это не значит, что на L и C не будет напряжения. На индуктивности $U_L = i\omega LI$, амплитуда $= \omega LI = \sqrt{L/C} \cdot I$, что для «хорошего» контура гораздо больше входного напряжения $U = R \cdot I$ (в описанном выше контуре $\sim 1000 \cdot U$). Столько же в резонансе будет на емкости. Но в сумме $U_L + U_C = 0$, так как эти напряжения точно в противофазе. Векторная диаграмма показана на рис. 6.15. На индуктивности напряжение опережает ток по фазе на $\pi/2$, а на емкости отстает, что просто понять: для L сначала прикладывают напряжение, а затем идет ток; для C вначале нужно пустить ток и после зарядки появится напряжение. На постоянном токе таких интересных эффектов не бывает: все напряжения одного знака, и на любом элементе последовательной цепи напряжение меньше входного.

Есть особенности у мощности в цепях переменного тока. На сопротивлении $N = RI_0^2 \cos^2(\omega t)$. Эта величина меняется 100 раз в секунду (для промышленной частоты 50 Гц) и нас не интересуют ее колебания (как правило). Среднее значение $\langle N \rangle = RI_0^2/2$. Приборы показывают **эффективное** значение тока, равное постоянному току, который греет сопротивление с той же эффективностью, то есть $I_{eff} = I_0/\sqrt{2}$. Аналогично $U_{eff} = U_0/\sqrt{2}$. В розетке $U_{eff} = 220$ В, а $U_0 \cong 311$ В.

Для цепи со сдвигом фаз $U = U_0 \cos(\omega t)$, $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$. Средняя мощность $N = U_0 I_0 \langle \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) \rangle = (1/2) \cdot U_0 I_0 \cos \varphi = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi$. Например, на индуктивности и емкости средняя мощность нулевая (нечему греться). Для мощных потребителей N и U_{eff} заданы. Поэтому малый $\cos \varphi$ приводит к потреблению большого тока, что нежелательно (растут потери). Стараются приблизить $\cos \varphi$ к 1.

Заметим, что при расчете мощности не следует прямо перемножать комплексные функции. В произведениях типа IU действительная часть не равна произведению действительных частей (физических величин). Мнимая часть легко отделяется только при линейных операциях.

Применение функции $\exp(i\omega t)$ либо ее компонент (\sin, \cos) – это основа **преобразования Фурье**. Оно позволяет дифференциальные уравнения (для функций времени)

превратить в алгебраические (для амплитуд). Любая периодическая функция раскладывается в **ряд Фурье**. Например, разложение цепочки прямоугольных импульсов:

$$\text{sign}(\cos(x)) = (4/\pi) \cdot (\cos(x) - \cos(3x)/3 + \cos(5x)/5 - \dots) .$$

Когда такое напряжение подано на вход цепи, находят токи, вызываемые каждой гармоникой (пользуясь изложенными выше способами), а потом суммируют все токи.

Рассмотрим теперь импульсные токи (сигналы), в некотором смысле – противоположность синусоидальным. Импульсные токи и напряжения широко используются для передачи сигналов, в частности, в компьютерах. Возьмем RC – цепь с разрядом конденсатора (рис. 6.16). После замыкания конденсатор разряжается через сопротивление:

$$R \cdot dI/dt + I/C = 0 ,$$

решение: $I = (U_0/R) \cdot \exp(-t/RC)$. Характерное время разряда $\tau = RC$. Например, при $C = 10^{-10} \text{ Ф} = 100 \text{ пФ}$, $R = 100 \text{ Ом}$ время разряда 10 нс. Полезно заметить, что тепло на сопротивлении $Q = \int RI^2 dt = CU_0^2/2$ при любом R : если уменьшать сопротивление, растет ток и уменьшается время разряда, причем так, что вся энергия конденсатора выделяется на сопротивлении.

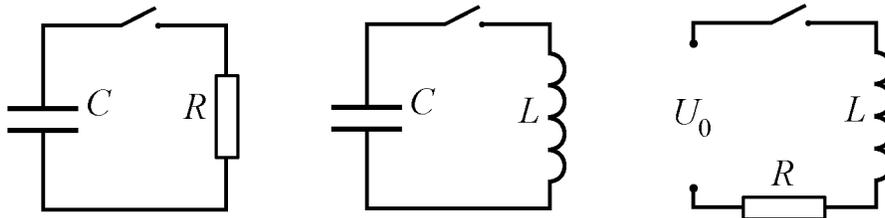


Рис. 6.16.

LC – цепь: уравнение $Ld^2I/dt^2 + I/C = 0$; решение: $I = I_0 \sin(\omega t)$, где $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Амплитуда I_0 определяется из начального условия: при $t = 0$ $LdI/dt = \omega LI_0 = U_0$:

$$I = (U_0/\omega L) \sin(\omega t) .$$

Отношение амплитуды напряжения к амплитуде тока $\omega L = \sqrt{L/C}$ – уже знакомое волновое сопротивление.

Наконец, RL – цепь, на которую подано постоянное напряжение U_0 : $LdI/dt + RI = 0$; $I = (U_0/R) \cdot (1 - \exp(-Rt/L))$. Время нарастания тока $\tau = L/R$.

Для полной RLC –цепи при малом сопротивлении естественно ожидать колебаний, как в LC , но медленно затухающих. При большом сопротивлении должно быть похоже на RC –цепь, а индуктивность должна давать завал начального фронта импульса тока на малое время L/R . Эти, совсем не похожие, варианты следуют из уравнения цепи:

$$Ld^2I/dt^2 + RdI/dt + I/C = 0 .$$

Подставим $I = I_0 \exp(i\omega t)$. Уравнение

$$-\omega^2 + i\omega R/L + 1/LC = 0$$

удовлетворяется при комплексных значениях частоты $\omega_{1,2} = iR/2L \pm \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$. Если подставить $\omega_{1,2}$ в экспоненту $\exp(i\omega t)$, получим колебательный множитель $\exp(i\sqrt{\cdot} \cdot t)$, умноженный на $\exp(-(R/2L)t)$. Видно, что мнимая часть частоты означает затухание, действительная же описывает колебания.

Поскольку уравнение цепи линейно, записываем решение в виде:

$$I = A \cdot \exp(i\omega_1 t) + B \cdot \exp(i\omega_2 t) = \exp(-Rt/2L) \cdot (A \exp(i\sqrt{\cdot} \cdot t) + B \exp(-i\sqrt{\cdot} \cdot t)).$$

Вспоминаем, что $(\exp(ix) - \exp(-ix))/2i = \sin(x)$. Следует «собрать» именно синус (косинус означал бы скачок тока). Тогда $I = I_0 \sin(\sqrt{\cdot} \cdot t) \cdot \exp(-Rt/2L)$. Определяем I_0 из начального условия:

$$I = \frac{U_0}{\Omega L} \sin(\Omega t) \cdot \exp(-Rt/2L), \quad \text{где } \Omega = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}.$$

Это и есть ожидаемые затухающие колебания с частотой, близкой к $1/\sqrt{LC}$ (на самом деле меньшей). При малом R затухание медленное – за время $\sim L/R$ (рис. 6.17, где пунктиром показана ограничивающая экспонента $\pm \exp(-Rt/2L)$).

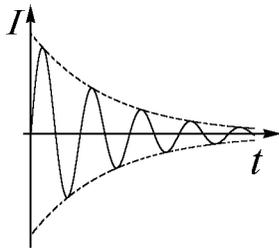


Рис. 6.17.

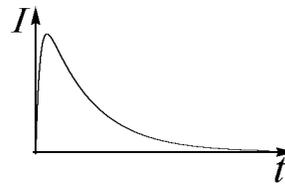


Рис. 6.18.

При $R > 2\sqrt{L/C}$ корень тоже мнимый – оба решения затухающие. Синус мнимого аргумента выражается через действительные экспоненты и переходит в гиперболический синус: $\text{sh}(x) = (\exp(x) - \exp(-x))/2$, тоже равный 0 при $x = 0$. Решение:

$$I = \frac{U_0}{\Omega L} \text{sh}(\Omega t) \cdot \exp(-Rt/2L), \quad \text{где } \Omega = \sqrt{R^2/4L^2 - 1/LC}.$$

При малых L нарастание до максимума занимает примерно время L/R , после чего будет спад за время RC (рис. 6.18).

Рассмотрим **внезапное** подключение LRC -цепи к источнику синусоидального напряжения. Известное нам решение, с импедансами и фазовым сдвигом, как правило, не удовлетворяет начальным условиям (ток не нулевой в начальный момент). На самом деле это – установившийся ток. Вначале же к нему добавляются колебания, вызванные

подключением (переходные процессы, согласующие решение с начальными условиями). К частному решению, полученному методом импедансов, надо прибавить общее решение однородного уравнения – собственные, или свободные колебания, которые и дают достаточную для выполнения начальных условий свободу. Например, для LRC -цепи две амплитуды общего решения позволяют удовлетворить двум условиям, обыкновенно – нулевому начальному току и нулевому заряду на конденсаторе. Со временем свободные колебания затухают, и остается только стационарная составляющая. При выраженном резонансе затухание малое, и нарастание тока до резонансного продолжается довольно долго, совершенно аналогично постепенной раскочке колебаний при механическом резонансе.

Импульсные цепи можно использовать для выполнения вычислений. Возьмем RC – цепь с большим R , так что почти все входное напряжение падает на сопротивлении (рис. 6.9). Тогда $I = U/R$, а напряжение на конденсаторе $U_C = (1/C) \int I dt = (1/RC) \int U dt$. На конденсаторе сигнал пропорционален интегралу входного напряжения (интегрирующая цепь). Она работает хорошо при $RC \gg \tau$ – времени изменения сигнала.

Если в той же цепи мала емкость, так что весь входной сигнал на C , то $U = U_C = (1/C) \int I dt$, ток $I = C \cdot dU/dt$. На сопротивлении будет маленький сигнал $U_R = RC \cdot dU/dt$ – дифференцирующая цепь при $RC \ll \tau$.

В обоих случаях, чем точнее цепь выполняет математическую операцию, тем меньше выходной сигнал. В этом усматривается некоторый закон сохранения неприятностей. До появления цифровых компьютеров из таких (или RL –) цепей строились аналоговые ЭВМ, или интеграторы, иногда довольно сложные. Например, LRC – цепь «решает» дифференциальное уравнение колебаний и может моделировать, скажем, пролет моста при грамотном выборе номиналов. Несколько связанных цепей дадут модель моста.

6.4 Ток смещения. Полная система уравнений Максвелла

Уравнение для циркуляции магнитного поля (магнитная теорема Стокса), которым мы пользовались в статике, не совсем подходит в динамике. Пусть ток I идет через конденсатор. Возьмем контур L_1 , окружающий провод (рис. 6.19). По теореме Стокса

$$\oint (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \frac{4\pi I}{c}.$$

Подразумевается, что ток I пересекает плоскую поверхность, вроде мыльной пленки, натянутой на контур. Вокруг провода будет поле $H = 2I/cr$. Это нам уже известно. Теперь берем контур L_2 , у которого натянутая поверхность попадает внутрь конденсатора. Через эту поверхность не проходит провод и не идет ток. Может быть, на «проекции» внутренности конденсатора не будет магнитного поля?

Вряд ли H будет скачком изменяться при переходе какой-то воображаемой границы в пространстве. Для скачка H должен по этой границе протекать ток. К тому же и для контура L_1 можно завести поверхность S внутрь конденсатора (показано пунктиром). Сомнительно, что поле от этого пропадет. Равным образом можно продеформировать поверхность, опирающуюся на L_2 , так что через нее появится ток. Видно, что с уравнением циркуляции не все в порядке.

Чем можно заменить ток I внутри конденсатора? $I = dq/dt$, а $q = ES/4\pi$. Записав теорему Стокса в виде

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{d(ES)}{dt} \cdot \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{c} \cdot \frac{d(ES)}{dt},$$

мы получим то же значение H для поверхности S , через которую не идет ток. Если мы хотим записать уравнение независимо от выбора поверхности S – проходит через нее ток или нет, то

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{L}) = \frac{4\pi I}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_{S_L} (\mathbf{E} d\mathbf{S}) \right), \quad I = \int_{S_L} (\mathbf{j} d\mathbf{S}). \quad (6.7)$$

Это уже – окончательный вид последнего уравнения Максвелла. Именно последнее слагаемое добавил Максвелл в теорему Стокса. В этом виде уравнение похоже на закон Фарадея. Разница – в знаке перед слагаемым с производной электрического потока и в отсутствии «магнитных токов». Видим, что изменяющееся электрическое поле способно породить магнитное.

Величину $(1/4\pi) \cdot d \left(\int_{S_L} (\mathbf{E} d\mathbf{S}) \right) / dt$, численно равную в этом примере току, называют **током смещения**. Этимология: в диэлектрике надо вместо E ставить D – электрическую индукцию, еще называемую электрическим смещением (D от слова displacement; потому, видимо, что в диэлектрике смещаются заряды). Можно ввести плотность тока смещения $\mathbf{j}_d = (1/4\pi) \cdot d\mathbf{D}/dt$. Магнитное поле создается совместно обычными токами проводимости \mathbf{j} и токами смещения \mathbf{j}_d .

Более формально можно получить нужную поправку, отправляясь от дифференциальной формы уравнения $\text{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}/c$. Возьмем от него дивергенцию:

$$\text{div} \text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \text{div} \mathbf{j} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{E}.$$

Второе и третье равенства следуют из уравнения неразрывности и теоремы Гаусса. Получаем (для переменного поля \mathbf{E}) противоречие, так как дивергенция всякого ротора равна нулю. Невязка ликвидируется, если исправить уравнение:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi \mathbf{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6.8)$$

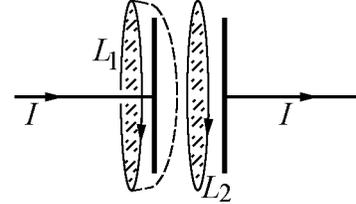


Рис. 6.19.

Это и есть дифференциальная форма (6.7).

Формулировкой уравнений (6.7,6.8) завершается построение системы уравнений Максвелла. В отсутствие поляризации и намагничивания среды дифференциальная форма уравнений имеет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6.9)$$

Соответственно интегральная форма:

$$\begin{aligned} \oint_S(\mathbf{E}d\mathbf{S}) &= 4\pi Q_S, & \oint_S(\mathbf{H}d\mathbf{S}) &= 0, \\ \oint_L(\mathbf{E}d\mathbf{L}) &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_{S_L}(\mathbf{H}d\mathbf{S}) \right), & \oint_L(\mathbf{H}d\mathbf{L}) &= \frac{4\pi I_L}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_{S_L}(\mathbf{E}d\mathbf{S}) \right). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Симметрия уравнений Максвелла нарушается только отсутствием магнитных зарядов. Если реакция вещества на поле существенна,

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \quad (6.11)$$

а в интегральной форме

$$\begin{aligned} \oint_S(\mathbf{D}d\mathbf{S}) &= 4\pi Q_S, & \oint_S(\mathbf{B}d\mathbf{S}) &= 0, \\ \oint_L(\mathbf{E}d\mathbf{L}) &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_{S_L}(\mathbf{B}d\mathbf{S}) \right), & \oint_L(\mathbf{H}d\mathbf{L}) &= \frac{4\pi I_L}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_{S_L}(\mathbf{D}d\mathbf{S}) \right), \end{aligned} \quad (6.12)$$

причем в (6.11,6.12) токи и заряды – свободные, и уравнения поля дополняются материальными связями между \mathbf{D} и \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{H} . Чтобы не запутаться, надо только уяснить, что во всех потоках через поверхности и дивергенциях участвуют индукции \mathbf{D} и \mathbf{B} , а в контурных интегралах и роторах – поля \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Поля можно выразить через потенциалы φ и \mathbf{A} (реакцией вещества снова пренебрегаем):

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \quad (6.13)$$

Очевидно, что прибавление к \mathbf{A} любого градиента: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi$ не меняет магнитного поля. Чтобы при этом не менялось и электрическое поле, надо подправить скалярный потенциал: $\varphi \rightarrow \varphi - (1/c)\partial\psi/\partial t$. Эту свободу выбора потенциалов можно использовать для общего блага. В динамике уже становится неудобным прежнее условие на векторный потенциал $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ (известное как **кулоновская** калибровка), а употребляется более симметричная **лоренцева** калибровка:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \quad (6.14)$$

Подставим (6.13) в уравнения (6.9). Два из них ($\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{H}/\partial t$) выполняются автоматически, и остается два уравнения:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c} - \frac{1}{c}\frac{\partial\nabla\varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad -\operatorname{div}\nabla\varphi - \frac{1}{c}\operatorname{div}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = 4\pi\rho.$$

Выражаем двойной ротор и дивергенцию градиента через оператор Лапласа:

$$\Delta\mathbf{A} - \nabla\operatorname{div}\mathbf{A} = -\frac{4\pi\mathbf{j}}{c} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad \Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} = -4\pi\rho.$$

Именно при калибровке (6.14) получаются наиболее симметричные уравнения для потенциалов:

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mathbf{j}}{c}, \quad \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \quad (6.15)$$

По аналогии с оператором Лапласа определяется оператор Даламбера⁴:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Соответственно запись (6.15) сокращается:

$$\square\mathbf{A} = -\frac{4\pi\mathbf{j}}{c}, \quad \square\varphi = -4\pi\rho.$$

Общее решение этих **уравнений Даламбера**, аналогичное статическим выражениям принципа суперпозиции (2.24,5.4), будет рассмотрено в следующем разделе.

6.5 Электромагнитные волны. Дипольное излучение

Поскольку поля порождают друг друга, не исключено существование электромагнитного поля **без токов и зарядов**. Попробуем решить уравнения для этого случая. В вакууме Q и $I = 0$. Введем затравочный ток i на единицу длины оси z , протекающий по плоскости yz в направлении оси y (вверх, рис. 6.20). Вблизи плоскости должно появиться поле $H = 2\pi i/c$, направленное против оси z . Но поле не может возникнуть мгновенно везде. Для этого понадобится бесконечная энергия. Ищем решение в виде волны, распространяющейся вдоль оси x с некоторой скоростью V .

Впереди волны поля E и H нулевые. Применяем закон Фарадея к контуру, частично высунутому вперед волны:

$$-EL = -(1/c) \cdot d\Phi/dt = -HVL/c,$$

если поле E в волне направлено против оси y (мы увидим, что тогда оно получится положительным).

⁴Символ \square (даламбертиан) имеет на один угол больше, чем Δ (лапласиан), поскольку, кроме производных по трем координатам, участвует еще производная по времени.

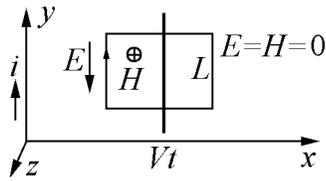


Рис. 6.20.

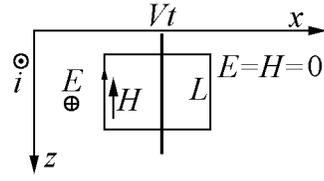


Рис. 6.21.

Теперь применим теорему Стокса с током смещения к такому же контуру, лежащему в плоскости xz (рис. 6.21):

$$HL = EVL/c.$$

Получаем два уравнения:

$$E = HV/c, \quad H = EV/c.$$

Перемножив их, легко убедиться, что

$$V^2 = c^2, \quad \text{или } V = \pm c.$$

Знак $+$ соответствует волне, бегущей вправо. Для нее поля равны: $E = H$. Сами поля не находятся из таких уравнений, поскольку источник их – ток i – не задет контурами. Если же его зацепить, получим, что между током i и фронтом волны $E = H = 2\pi i/c$, оба положительны (значит, мы удачно выбрали направления). Для «левой» волны изменится знак H .

Прервем ток i , что эквивалентно пусканию обратного тока. Этот обратный ток породит волну с обратными направлениями полей, которая, складываясь с первой волной, начнет гасить поля вблизи плоскости yz . Обе волны имеют скорость c , так что мы получим прямоугольный импульс, в котором поля ненулевые, распространяющийся в пространстве без искажений. Теперь уже нигде нет токов и зарядов, но поля имеются: они создают друг друга. Это и есть электромагнитная волна. Она теперь будет лететь в пространстве сколько угодно, если не застрянет в непрозрачной среде. Уже около 15 миллиардов лет живет реликтовое излучение.

Экспериментально электромагнитные волны обнаружил Герц в 1886 г., чем подтвердил теорию Максвелла. Теперь их существование доказывается на опыте при включении радиоприемников, телевизоров и мобильных телефонов. Свет – это тоже электромагнитные волны с длиной $(3,8 \div 7,6) \cdot 10^{-5}$ см.

Наконец мы добрались до смысла электродинамической постоянной c : это скорость электромагнитных волн. Заметим, что по смыслу вывода скорость волны ни от чего не зависит и, в частности, не зависит от системы отсчета.

Разберем энергетику волны. За время t заполняется полями объем $2abct$, по обе стороны площадки ab на плоскости yz . Энергия поля $(H^2 + E^2)/8\pi$ на см^3 , а всего

$$2(2\pi i/c)^2/8\pi \cdot 2abct = 2\pi i^2 abt/c.$$

Она берется из работы источника тока: ток $i \cdot a$ идет против напряжения $b \cdot E$. Работа источника $iabE = i \cdot ab \cdot 2\pi i/c$ – то же значение. В волне энергия $(H^2 + E^2)/8\pi = EH/4\pi$ переносится со скоростью c ; возникает поток энергии

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \text{ эрг}/(\text{см}^2\text{с}).$$

Вектор \mathbf{S} называется вектором Пойнтинга (иногда Умова – Пойнтинга). Убедитесь, что $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ как раз показывает направление распространения волны. Полезно заметить, что электромагнитная волна поперечная.

Попытаемся найти общее решение уравнений поля в пустоте:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Взяв ротор от второй пары уравнений, с учетом нулевой дивергенции обоих полей, получим

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (6.16)$$

Уравнение вида

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, \quad \text{или} \quad \square F = 0 \quad (6.17)$$

называется **волновым**. Прямая подстановка показывает, что его решением будет, например, произвольная функция от $t - x/c$, а также от $t + x/c$:

$$F = f(t - x/c) + g(t + x/c).$$

Функции – компоненты решения, сохраняя свою форму, передвигаются вправо ($f(t - x/c)$) либо влево ($g(t + x/c)$). Установлено, что для одного пространственного измерения это – наиболее общий вид решения волнового уравнения. В примере, рассмотренном в начале параграфа, функция $f(t - x/c)$ описывает волну справа от плоскости yz , а $g(t + x/c)$ – слева; обе функции представляли собой «ступеньки» или прямоугольные импульсы. В более общем случае произвольно зависящего от времени возбуждающего тока i в плоскости yz функции f и g повторяли бы зависимость $i(t)$, например: $f = 2\pi i(t - x/c)/c$. Это легко понять: волна, двигаясь со скоростью c , переносит на расстояние x информацию о более раннем состоянии источника: в момент t мы ощущаем воздействие тока, который был в момент $t - x/c$ (запаздывающее значение).

Разумеется, плоская волна может распространяться в любом направлении: оси y и z ничем не хуже, как и вообще произвольная ось, задаваемая постоянным единичным вектором направления \mathbf{n} :

$$F = f\left(t - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{r})}{c}\right) = f\left(t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c}\right).$$

Убедитесь, что такая функция действительно удовлетворяет волновому уравнению (6.17). Заметим, что в этом случае второй функции g (волны обратного направления)

не требуется: такая волна (с вектором $-\mathbf{n}$) уже содержится в общем выражении для f . Любое решение волнового уравнения можно представить как суперпозицию плоских волн. Следует только добиться, чтобы решение согласовывалось с источниками. В этом подборе (похожем на подбор начальных условий для обыкновенных дифференциальных уравнений) и кроется основная трудность решения конкретных задач.

Общее же решение волновых уравнений электромагнитного поля удобнее представлять в виде не плоских, а **сферических** волн. Это вполне естественно, поскольку поле создается в конечном счете точечными источниками (зарядами), и даже в случае непрерывного распределения происходит суперпозиция полей, созданных малыми объемами. Вначале рассмотрим волну, обладающую сферической симметрией. Волновое уравнение записывается в виде

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

Заметим, что в трехмерном пространстве радиальную часть оператора Лапласа можно представить и по-другому: $\Delta F = (1/r) \partial^2(rF) / \partial r^2$ (проверьте прямым вычислением). С учетом этого нововведения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(rF)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2(rF)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(rF)}{\partial t^2} = 0.$$

Видно, что произведение rF удовлетворяет «одномерному» волновому уравнению. Его решения уже обсуждались – это произвольные функции $t \pm r/c$. Тогда

$$F = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r}.$$

Первое слагаемое описывает волну, расходящуюся от начала координат и убывающую по амплитуде обратно пропорционально радиусу. Этому и следует ждать от решения волнового уравнения в пространстве: точно так же распространяется звук от источника. Второе же слагаемое есть волна, сходящаяся к центру. Технически сделать ее можно (например, одновременно двинув заряды на поверхности некоторой сферы, или в акустике – начав сжимать сферическую оболочку), но это явно не будет волна, созданная источником в начале координат. Поэтому часть решений, описывающих сходящиеся волны, отбрасывают (так называемое **условие излучения**):

$$F = \frac{f(t - r/c)}{r}.$$

Опять в точке r в момент t мы имеем запаздывание – волна несет информацию о более раннем моменте $t - r/c$. При $r \rightarrow 0$ решение стремится к бесконечности. Это естественно: чтобы произвести эффект на больших расстояниях, в исходной точке – начале координат амплитуда волны должна быть большой. Реально следует рассматривать малый объем с источниками поля, в котором вид уравнений меняется (появляются правые части), и поэтому бесконечностей не возникает.

Рассмотрим теперь поведение уравнений для потенциалов (6.15) **вблизи** движущихся зарядов (это позволит нам определить вид функций, описывающих распространение волн). На очень малых расстояниях от источника потенциалы и их пространственные производные резко возрастают: например, $\varphi \sim q/r$, $\partial^2\varphi/\partial x^2 \sim q/r^3$. Члены с производными по времени будут порядка $(1/c^2)\partial^2\varphi/\partial t^2 \sim q/rc^2\tau^2$, где τ – характерное время излучения, например период колебаний, тогда $c\tau = \lambda$ – характерная длина волны. Видно, что существует область вблизи источника, в которой можно опустить производные по времени, т.е. уравнения сводятся к статическим:

$$\Delta \mathbf{A} \approx -\frac{4\pi \mathbf{j}}{c}, \quad \Delta \varphi \approx -4\pi \rho.$$

Но решение этих «укороченных» уравнений нам известно из статики – это формулы (2.24,5.4), которые мы запишем здесь (следуя обозначениям Р. Фейнмана) несколько в другом виде:

$$\mathbf{A}(1) = \frac{\mathbf{j}(2)}{cr_{12}} dV_2, \quad \varphi(1) = \frac{\rho(2)}{r_{12}} dV_2.$$

Здесь $\mathbf{A}(1)$ и $\varphi(1)$ – потенциалы в точке наблюдения 1, созданные зарядами и токами в точке – источнике 2, находящейся в пределах малого объема dV_2 ; r_{12} – расстояние от текущего источника до точки наблюдения.

Теперь осталось совместить это общее решение на малых расстояниях с решением волнового уравнения на больших. Для этого надо только учесть запаздывание. Единственные величины, зависящие от времени в выписанных потенциалах – это токи и заряды. Их и следует взять в более ранний момент:

$$\mathbf{A}(1, t) = \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{cr_{12}} dV_2, \quad \varphi(1, t) = \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2.$$

Получены, без сомнения, решения волнового уравнения, причем стремящиеся к статическим на малых расстояниях, когда запаздывание несущественно. Остается только сложить потенциалы от всех источников, уже в конечной области:

$$\mathbf{A}(1, t) = \int \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{cr_{12}} dV_2, \quad \varphi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (6.18)$$

Интегралы в (6.18) берутся по области, занятой движущимися зарядами и токами.

Применим наше решение к простейшему и одновременно самому важному случаю излучения – дипольному. Мы не можем внезапно создать «из ничего» заряд; это запрещено законом сохранения заряда. Поэтому для получения меняющихся полей – основы излучения – приходится разносить в стороны имеющиеся заряды, т.е. изменять дипольный момент. Именно это происходит в антеннах. Итак, пусть имеется переменный диполь в начале координат: $\mathbf{p}(t)$, направленный вдоль оси z : $p_z = p(t)$. Представляя его как два точечных заряда $\pm q(t)$, разнесенных на малое расстояние d , из (6.18) имеем

$$\mathbf{A}(r, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr}, \quad A_r = \frac{\dot{p}(t - r/c) \cos \theta}{cr}, \quad A_\theta = -\frac{\dot{p}(t - r/c) \sin \theta}{cr}.$$

Эти выражения получаются, если учесть, что ток через перемычку, соединяющую заряды, есть dq/dt , а $p = qd$. Из векторного потенциала немедленно следует поле \mathbf{H} :

$$H_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = \frac{\ddot{p} \sin \theta}{c^2 r} + \frac{\dot{p} \sin \theta}{cr^2}.$$

Нас будет интересовать наиболее медленно спадающее с расстоянием слагаемое. На достаточно больших расстояниях ($ct \ll r$)

$$H_\alpha \rightarrow \frac{\ddot{p} \sin \theta}{c^2 r}.$$

Это и будет поле расходящейся волны. Расстояние должно быть велико по сравнению с характерной длиной волны. Тогда малый участок фронта волны практически плоский, и можно пользоваться закономерностями, установленными для плоских волн: $E = H$, а направление \mathbf{E} перпендикулярно как магнитному полю, так и направлению распространения (в данном случае радиусу):

$$E_\theta = H_\alpha = \frac{\ddot{p} \sin \theta}{c^2 r}.$$

Максимум для обоих полей, а значит, и для интенсивности излучения, будет при $\theta = \pi/2$, т.е. в направлении, поперечном \mathbf{p} ; «вдоль себя» диполь не излучает вовсе. Отметим еще, что излучение происходит, если вторая производная \ddot{p} не равна нулю. Например, движущийся с постоянной скоростью заряд не излучает.

Полная мощность, излучаемая диполем, найдется интегрированием вектора Пойнтинга по сфере:

$$N = \oint \frac{c[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{4\pi} dS = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3} \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3}.$$

Порядок спадаания поля в сферической волне следует из простых энергетических оценок. Если источник излучал время τ , то вдали от него через время $t \gg \tau$ получим сферический слой объема $4\pi r^2 \cdot ct$, где $r = ct$ – расстояние наблюдения. Энергия в этом слое $(E^2 + H^2)/8\pi \cdot 4\pi r^2 \cdot ct$ постоянна, так что $E = H \sim 1/r$. Именно из-за медленности этого спадаания и возможна радиосвязь, а из других галактик мы ловим только излучение. Кулоновские и дипольные поля с таких расстояний «не доходят».

Для более подробного изучения рекомендуется литература [1, 2, 3].

Литература

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: ГИТТЛ, 1957. 620 с.
2. Парселл Э. Электричество и магнетизм. Берклевский курс физики, т. 2. М.: Наука, 1975. 440 с.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Электродинамика. Фейнмановские лекции по физике, вып. 6. М.: Мир, 1966. 344 с.