

Н. А. Евсеев

КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ

Производная, Интеграл, Ряды Тейлора и Лорана, Вычеты

19 марта 2015 г.

Последняя версия : http://nikita2.eu5.org/cn_ru/cn2.pdf.

Оглавление

1	Функции	5
1.1	Предел и непрерывность	6
1.2	производная	8
1.2.1	Условия Коши—Римана	11
1.2.2	Геометрический смысл производной	13
1.2.3	Гармонические функции	14
2	Интеграл	17
2.1	Опр. интеграла	17
2.1.1	Длина кривой	20
2.1.2	Оценка интеграла	21
2.2	теорема Коши	26
2.3	Формула Коши	28
2.3.1	Теорема о среднем	31
2.4	Интеграл типа Коши	34
2.5	Первообразная	37
3	Тейлор и Лоран	43
3.1	Ряд Тейлора	43
3.1.1	Классификация нулей голоморфной функции	46
3.2	Ряд Лорана	49
3.2.1	Ряд Лорана в ∞	51
3.3	Особые точки	52

4 Вычеты	59
4.1 Определение вычета	59
4.1.1 Вычет в ∞	61
4.2 Нахождение вычетов	62
4.3 Вычисление \int	66
Ответы	73

Глава 1

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Если каждому числу z из некоторого множества $E \subset \mathbb{C}$ поставлены в соответствие одно или несколько комплексных чисел w , то говорят, что на множестве E задана **функция** $f(z) = w$ комплексного переменного.

Если каждому z соответствует лишь одно значение w , то функция называется **однозначной**, если некоторым z соответствует более чем одно значение w — **многозначной**. Так, $f(z) = e^z$, $f(z) = z^n$ и $\arg z$ — однозначные функции. Примерами многозначных функций могут служить $f(z) = \sqrt[n]{z}$ (n различных значений) и $f(z) = \text{Arg } z$ (бесконечно много различных значений). Пусть f , g — две многозначные функции, тогда

$$f(z) = g(z) \Leftrightarrow \{f(z)\} = \{g(z)\}.$$

Другими словами, две многозначные функции **равны** в точке z , если совпадают множества их значений в данной точке.

Любая функция комплексного переменного может быть записана в виде

$$f(z) = u(z) + iv(z) \quad \text{или} \quad f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — действительнзначные функции. Функция u называется действительной частью f и обозначается $u = \operatorname{Re} f$, v — мнимая часть f и обозначается $v = \operatorname{Im} f$.

1.1 Предел и непрерывность

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется **пределом** функции $f(z)$ в точке z_0

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lambda,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся тоакое $\delta > 0$, что для всех чисел z таких, что $0 < |z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$.

Если такого чсла λ нет, то мы говорим, что $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ **не существует**.

Для существования предела функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно одновременное существование пределов функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a \quad \text{и} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b,$$

где $\lambda = a + ib$.

Пример 1. Пусть $f(z) = 5z$, доказать по определению, что

$$\lim_{z \rightarrow i} f(z) = 5i.$$

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$, подберём такое число $\delta_\varepsilon > 0$ так, неравенство $|f(z) - 5i| < \varepsilon$ будет верно для всех z таких, что $|z - i| < \delta_\varepsilon$. Поскольку

$$|f(z) - 5i| = |5z - 5i| = 5|z - i|,$$

то в качестве δ_ε можно выбрать $\delta_\varepsilon = \varepsilon/5$. Действительно, если $|z - i| < \varepsilon/5$, то $|f(z) - 5i| < \varepsilon$. \triangle

Пример 2. Показать, что предела $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ не существует.

Решение. Поскольку предел не зависит от того каким образом $z \rightarrow 0$, то

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overline{x + i0}}{x + i0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overline{0 + iy}}{0 + iy}.$$

С другой стороны

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overline{x + i0}}{x + i0} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overline{0 + iy}}{0 + iy} = -1.$$

△

Функция $f(z)$ называется **непрерывной** в точке z_0 , если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Непрерывность функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, как функции комплексного переменного z , эквивалентна одновременной непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) , как функций двух действительных переменных .

Задачи к 1.1

1. Показать по определению, что $\lim_{z \rightarrow z_0} (az + b) = az_0 + b$. ▣▣▣▣

2. Вычислить пределы

а) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$

б) $\lim_{z \rightarrow 1-i} (x + i(2x + y))$

▣▣▣▣

3. Показать, что функция $f(z) = |z|$ непрерывна при любом z .

▣▣▣▣

1.2 Комплексное дифференцирование

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $z_0 \in D$.

Функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ называется **дифференцируемой** в точке z_0 , если существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \quad (1.1)$$

Предел 1.2 можно записать в виде

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (1.2)$$

Если функция f дифференцируема в некоторой окрестности $B(z_0, r)$ точки z_0 , то f называется **голоморфной** в точке z_0 (holomorphic). Функция f называется дифференцируемой на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$, если f дифференцируема в каждой точке $z \in \Omega$. Функция дифференцируемая всюду на \mathbb{C} называется **целой** (entire).

Пример 3. Найти производную функции $f(z) = z^3$ по определению.

Решение. Имеем

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)(z^2 + zz_0 + z_0^2)}{z - z_0} = z^2 + zz_0 + z_0^2,$$

и, следовательно,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = 3z_0^2.$$

△

Пример 4. Функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не дифференцируема.

Решение. Действительно

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}.$$

Как мы показали в примере 2, последний предел не существует. △

Пример 5. Функция $f(z) = \bar{z}^2$ дифференцируема при $z_0 = 0$, и не дифференцируема при $z_0 \neq 0$.

Решение. 1. Если $z_0 = 0$, то

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{h} \frac{\bar{h}}{h} = 0.$$

Пусть $z_0 \neq 0$. Положим $z = z_0 + re^{i\varphi}$ (тогда $z \rightarrow z_0$ при $r \rightarrow 0$).
Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}^2 - \bar{z}_0^2}{z - z_0} &= \frac{(\overline{z_0 + re^{i\varphi}})^2 - \bar{z}_0^2}{z_0 + re^{i\varphi} - z_0} = \frac{(\bar{z}_0 + re^{-i\varphi})^2 - \bar{z}_0^2}{z_0 + re^{i\varphi} - z_0} = \\ &= \frac{\bar{z}_0^2 + 2\bar{z}_0 re^{-i\varphi} + re^{-2i\varphi} - \bar{z}_0^2}{z_0 + re^{i\varphi} - z_0} = \\ &= \frac{2\bar{z}_0 re^{-i\varphi} + re^{-2i\varphi}}{re^{i\varphi}} = 2\bar{z}_0 e^{-2i\varphi} + re^{-3i\varphi} \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z}^2 - \bar{z}_0^2}{z - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0} (2\bar{z}_0 e^{-2i\varphi} + re^{-3i\varphi}) = 2\bar{z}_0 \quad \text{при } \varphi = 0,$$

и

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z}^2 - \bar{z}_0^2}{z - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0} (2\bar{z}_0 e^{-2i\varphi} + re^{-3i\varphi}) = -2\bar{z}_0 \quad \text{при } \varphi = \pi/2.$$

Таким образом $f(z) = \bar{z}^2$ не дифференцируема в $z_0 \neq 0$. △

Для комплексной производной выполняются стандартные свойства: Пусть f, g — дифференцируемые функции, тогда

- 1) $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$ свойство линейности;
- 2) $(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$ правило Лейбница;
- 3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{(g(z))^2}$ производная отношения;

4) $(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot (g'(z))$ производная композиции.

Выведем правило дифференцирования обратной функции $(f^{-1})'$. Напомним:

Функция $f : G \rightarrow H$ называется **взаимно однозначной**, если для каждого $w \in H$ найдётся единственный $z \in G$ так, что $f(z) = w$

Если $f : G \rightarrow H$ взаимно однозначная функция, то существует обратная функция $g = f^{-1}$, $g : H \rightarrow G$ так, что $f(g(w)) = w$ для всех $w \in H$.

Лемма 6 Пусть $G, H \subset \mathbb{C}$ — открытые множества, $w_0 \in H$, $f : G \rightarrow H$ — взаимно однозначная функция (биекция) и $g = f^{-1}$. Если f дифференцируема в точке $g(w_0)$, $f'(g(w_0)) \neq 0$ и g — непрерывна в w_0 , то g дифференцируема в w_0 и

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(g(w_0))}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} g'(w_0) &= \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \\ &= \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{f(g(w)) - f(g(w_0))} = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{1}{\frac{f(g(w)) - f(g(w_0))}{g(w) - g(w_0)}}. \end{aligned}$$

Поскольку $g(w) \rightarrow g(w_0)$ при $w \rightarrow w_0$, получим

$$g'(w_0) = \lim_{g(w) \rightarrow g(w_0)} \frac{1}{\frac{f(g(w)) - f(g(w_0))}{g(w) - g(w_0)}}$$

u

$$g'(w_0) = \frac{1}{\lim_{g(w) \rightarrow g(w_0)} \frac{f(g(w)) - f(g(w_0))}{g(w) - g(w_0)}} = \frac{1}{f'(g(w_0))}.$$

1.2.1 Условия Коши—Римана

Рассмотрим функцию $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда частные производные имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z) = u_y(x, y) + iv_y(x, y).$$

Следующая теорема устанавливает связь между комплексной производной $f'(z)$ и частными производными f_x, f_y , и, что более важно, описывает необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции f в смысле комплексного переменного.

Теорема 7 1) Пусть f — дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда частные производные удовлетворяют условию

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \quad (1.3)$$

2) Пусть f — комплексная функция и её частные производные f_x и f_y существуют в окрестности z_0 и непрерывны в z_0 . Если частные производные удовлетворяют условию (1.3), то f дифференцируема в точке z_0 .

В обоих случаях 1) и 2) производную можно записать в виде

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0).$$

Доказательство. 1) Если f дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то предел

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

существует и не зависит от того, каким образом $\Delta z \rightarrow 0$. Положим $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Рассмотрим два случая: 1. $\Delta x \rightarrow 0, i\Delta y = 0$ и 2. $\Delta x = 0, i\Delta y \rightarrow 0$. Имеем

$$1. \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0),$$

$$2. \quad f'(z_0) = \lim_{i\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{i\Delta y} = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Таким образом условие (1.3) выполнено.

2) Пусть теперь функция $f(z) = f(x, y)$ такова, что частные производные f_x и f_y существуют в окрестности z_0 и непрерывны в z_0 и выполнено условие (1.3). Требуется доказать, что $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 . Фактически, мы покажем, что $f'(z_0) = f_x(z_0)$.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \\ \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0 + \Delta x) + f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta z} &= \\ \frac{\Delta y f(z_0 + \Delta x + i\Delta y) - f(z_0 + \Delta x)}{\Delta y} + \frac{\Delta x f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Заметим, что при $\Delta z \rightarrow 0$

$$\frac{f(z_0 + \Delta x + i\Delta y) - f(z_0 + \Delta x)}{\Delta y} \approx f_y(z_0)$$

и

$$\frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} \approx f_x(z_0).$$

Далее

$$\begin{aligned} f_x(z_0) &= \frac{\Delta z}{\Delta z} f_x(z_0) = \frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta z} f_x(z_0) = \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta z} f_x(z_0) + \frac{\Delta y}{\Delta z} i f_x(z_0) = \frac{\Delta x}{\Delta z} f_x(z_0) + \frac{\Delta y}{\Delta z} f_y(z_0). \end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались равенством $i f_x(z_0) = f_y(z_0)$ (которое следует из (1.3)).

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f_x(z_0) &= \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta z} \left(\frac{f(z_0 + \Delta x + i\Delta y) - f(z_0 + \Delta x)}{\Delta y} - f_y(z_0) \right) \right] + \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta x}{\Delta z} \left(\frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} - f_x(z_0) \right) \right] &= 0, \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались тем, что $|\Delta x/\Delta z| \leq 1$, $|\Delta y/\Delta z| \leq 1$.
В итоге $f'(z_0) = f_x(z_0)$.

Обычно (1.3) записывают в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.4)$$

1.2.2 Геометрический смысл производной

Пусть функция $f = u + iv$ является голоморфной в окрестности U точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим связанное с функ-

цией f отображение $F : U \rightarrow R^2$, определяемое по правилу $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Найдем матрицу Якоби отображения F и, используя условия Коши-Римана, преобразуем ее к специальному виду

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{*}} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{1}{\sqrt{*}} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{1}{\sqrt{*}} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{\sqrt{*}} \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = |f'(z_0)| \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

где $*$ = $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ и $\varphi = \arg f'(z_0)$.

Таким образом отображение, осуществляемое дифференциалом функции f (дифференциалом отображения F) в точке z_0 , сводится к растяжению с коэффициентом $|f'(z_0)|$ и повороту на угол $\varphi = \arg f'(z_0)$.

1.2.3 Гармонические функции

Дважды непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x, y)$ называется гармонической в области $D \subset C$, если

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

всюду в области D .

Далее будет доказано, что голоморфная в области функция, а следовательно и ее действительная и мнимая части, будут бесконечно дифференцируемы. А пока воспользуемся этим фактом.

Пусть функция $f = u + iv$ является голоморфной в области D , тогда для нее выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируя первое равенство по переменной x , второе равенство по переменной y и складывая, получаем

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

т.е. функция u является гармонической в области D . Аналогично доказывается гармоничность функции v .

Задачи к 1.2

4. Показать по определению, что $\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$. \blacksquare

5. Найти производные

а) $\sin e^z$

б) $\frac{e^{-z^2}}{1+2z}$

\blacksquare

6. Найти числа a, b при которых функция $f(z) = x + ay + i(bx + y)$ будет дифференцируемой. \blacksquare

7. Пусть $f(z)$ — голоморфная функция, такая, что $\operatorname{Im} f(z) = x + y$ и $f(0) = 0$. Найти $f(z)$. \blacksquare

8. Является ли функция

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}}, & \text{если } z \neq 0 \\ 0, & \text{если } z = 0 \end{cases}$$

голоморфной в 0? \blacksquare

Термины к главе 1

аналитическая функция		解析函数
гармоническая функция		谐 (波) 函数
голоморфная функция		正则函数
дифференцирование		微分法, 求微分
дифференцируемая функция		可微 (分) 函数
обратная функция	f^{-1}	反函数
правило Лейбница		莱布尼茨定则
производная		导数, 微商
производная порядка n		n 阶导数
уравнение Лапласа		拉普拉斯方程
условия Коши-Римана		柯西-黎曼条件

Глава 2

Комплексный интеграл

Одно из основных свойств интеграла функции действительного переменного состоит в следующем:

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a),$$

где $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. В комплексном анализе аналогичное свойство имеет вид:

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

где $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция и $\gamma \subset \Omega$ — кусочно-гладкая кривая.

2.1 Определение интеграла

Пусть γ — ориентированная кусочно-гладкая кривая, $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma'(t) \neq 0$.

Интеграл от непрерывной функции $f : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ вдоль кривой γ определяется равенством

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt. \quad (2.1)$$

Поскольку $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то равенство (2.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t) dt = \\ &= \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (vx' + uy') dt = \\ &= \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy. \end{aligned}$$

Таким образом нахождение интеграла от функции комплексного переменного может быть сведено к вычислению соответствующих криволинейных интегралов.

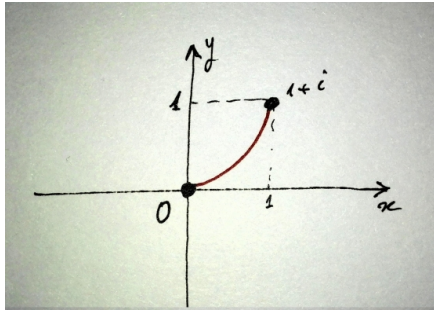
Приведём основные свойства интеграла:

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_{\gamma} f dz + \beta \int_{\gamma} g dz \quad \text{линейность,}$$

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz \quad \text{аддитивность,}$$

$$\int_{\gamma^-} f dz = - \int_{\gamma} f dz \quad \text{зависимость от ориентации.}$$

Пример 8. Вычислить интеграл от функции $f(z) = \bar{z}^2$ по дуге параболы $y = x^2$, соединяющей точки 0 и $1 + i$.



Решение. Параметризация: $\gamma(t) = t + it^2$, $0 \leq t \leq 1$. Далее, $\gamma'(t) = 1 + 2ti$ и $f(\gamma(t)) = (t + it^2)^2 = t^2 - t^4 - 2t^3i$. Тогда интеграл

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 (t^2 - t^4 - 2t^3i) \cdot (1 + 2ti) dt = \frac{14}{15} - \frac{i}{3}.$$

△

Пример 9. Вычислим интеграл

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^n dz,$$

считая, что $n \in \mathbb{Z}$, а окружность $|z - z_0| = R$ ориентирована против хода часовой стрелки.

Решение. Воспользовавшись параметризацией окружности

$$z = z_0 + Re^{i\varphi}, \quad dz = iRe^{i\varphi} d\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

преобразуем интеграл к виду

$$I_n = \frac{1}{2\pi} R^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(n+1)} d\varphi.$$

При $n = -1$ получаем

$$I_{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = 1.$$

При $n \neq -1$ получаем

$$I_n = \frac{1}{2\pi i(n+1)} R^{n+1} e^{i\varphi(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi i(n+1)} R^{n+1} (e^{i2\pi(n+1)} - 1) = 0.$$

△

Полезно помнить, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-z_0} = 1.$$

2.1.1 Длина кривой

Длина кусочно-гладкой кривой $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$

$$l(\gamma) = \int_b^a |\gamma'(t)| dt.$$

Заметим, что длину кривой можно также выразить как

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} |dz|,$$

где $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ – элемент длины кривой γ .

Пример 10. Найдём длину единичной окружности $\{|z| = 1\}$, т. е. $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. Имеем $\gamma'(t) = ie^{it}$ и $|\gamma'(t)| = |ie^{it}| = 1$, тогда

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

△

2.1.2 Оценка интеграла

Лемма 11 Для всякой непрерывной на кривой γ функции f выполняются неравенства

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot l(\gamma).$$

Доказательство. Обозначим

$$I = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Воспользуемся показательной формой записи комплексных чисел: $I = |I|e^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg \int_{\gamma} f(z) dz$. Тогда

$$|I| = \int_{\gamma} e^{-i\varphi} f(z) dz = \int_a^b e^{-i\varphi} f(z(t)) z'(t) dt.$$

Поскольку последний интеграл является действительным числом, то

$$|I| = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\alpha} f(z(t)) z'(t)) dt \leq \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt =$$

$$\int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot \int_{\gamma} |dz| = \max_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot l(\gamma).$$

Лемма 12 (Лемма Жодана) Пусть $\alpha > 0$ и выполнены следующие условия

1) функция $f(z)$ непрерывна в секторе

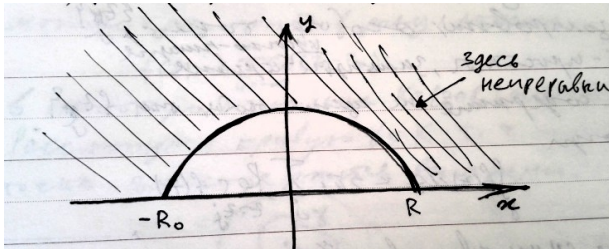
$$S = \{\operatorname{Im} z \geq 0, |z| > R_0 > 0\};$$

2) $M(R) = \max_{z \in C_R} |f(z)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$,

где C_R – верхняя полуокружность, т.е. $C_R = \{\operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}$.

Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0.$$



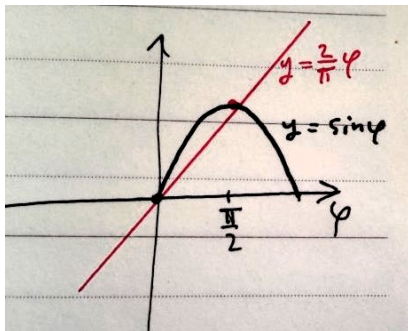
Доказательство. Пусть $z \in C_R$, тогда $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $dz = iRe^{i\varphi} d\varphi$,

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha(R \cos \varphi + iR \sin \varphi)}| = e^{-\alpha R \sin \varphi}.$$

В силу выпуклости функции $\sin \varphi$ на отрезке $[0, \pi/2]$ вы-

полняется неравенство

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi.$$



Теперь несложно получить требуемую оценку для интеграла

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| &\leq RM(R) \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin \varphi} d\varphi = \\ 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \varphi} d\varphi &\leq 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R\alpha}{\pi} \varphi} d\varphi \leq \\ M(R) \frac{\pi}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}) &\leq \frac{\pi}{\alpha} M(R) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Задачи к 2.1

9. Вычислить интеграл от функции $f(z) = \bar{z}^2$ по кривой γ , если

- γ — отрезок соединяющий точки 0 и $1 + i$,
- γ — ломаная соединяющая точки 0, 1 и $1 + i$.



10. Вычислить интеграл $\int_{\gamma} 1/z dz$, по кривой $\gamma(t) = \sin t + i \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. ▣▣▣▣➔

11. Проинтегрировать следующие функции по окружности $|z| = 2$, ориентированной против часовой стрелки (т. е. $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$).

- | | |
|---------------------|--------------|
| а) $z + \bar{z}$, | в) $1/z^4$, |
| б) $z^2 - 2z + 3$, | г) xy . |



12. Вычислить интеграл

$$\int_{\gamma} e^z dz, \quad \gamma(t) = \pi ti, \quad t \in [-1, 1].$$



13. Вычислить интеграл

$$\int_{\gamma} z^2 dz \quad \gamma(t) = t + it \quad t \in [0, 1].$$



14. Вычислить интеграл

$$\int_{|z-i|=4} \frac{6}{(z-i)^2} dz.$$



15. Вычислить длины кривых

а) $\gamma(t) = 3t + i, \quad -1 \leq t \leq 1,$

б) $\gamma(t) = i + e^{i\pi t}, \quad 0 \leq t \leq 1,$

в) $\gamma(t) = i \sin t, \quad -\pi \leq t \leq \pi,$

г) $\gamma(t) = a(\cos t - \sin t) + ia(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$



2.2 Интегральная теорема Коши

Мы подошли к одной из самых значимых теорем комплексного анализа:

Теорема 13 (Интегральная теорема Коши)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная конечносвязная область с кусочно-гладкой ориентированной границей $\Gamma = \partial D$, функция f является голоморфной в области D и непрерывной в замыкании $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Мы докажем более простое утверждение.

Теорема 14 Пусть функция f является голоморфной в \mathbb{C} . Тогда для любого простого кусочно-гладкого замкнутого контура γ

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Доказательство. Обозначим через D область, ограниченную контуром γ . Поскольку действительная и мнимая части функции $f = u + iv$ являются гладкими мы можем воспользоваться формулой Грина

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy = \\ &= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю двойных интегралов является следствием условий Коши-Римана.

Из теоремы получаем следующее свойство: интеграл от дифференцируемой функции определяется только начальной A и конечной B точками кривой интегрирования γ

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_A^B f(z) dz.$$

Задачи к 2.2

16. Вычислить интеграл $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z+2} dz$. \blacksquare

17. Интегрируя функцию $f(z) = e^{-z^2}$ по границе прямоугольника

$$P = \{z \in C \mid |\operatorname{Re} z| \leq R, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq b\},$$

вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx.$$

\blacksquare

18. Интегрируя функцию $f(z) = e^{iz^2}$ по границе сектора

$$S = \{z \in C \mid 0 \leq |z| \leq R, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\},$$

вычислить интеграл Френеля

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx.$$

\blacksquare

2.3 Интегральная формула Коши

Теорема 15 (Интегральная формула Коши) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная конечносвязная область с ориентированной в положительном направлении кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial D$, функция f является голоморфной в области D и непрерывной в $\bar{D} = D \cup \Gamma$. Тогда для произвольной точки $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)dw}{w-z}.$$

Доказательство. 1. Пусть точка $z \in D$ и $d = \text{dist}(z, \Gamma)$. Поскольку функция f непрерывна в точке z , то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из выполнения неравенства $|w - z| < \delta$ следует выполнение неравенства $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$.

2. Пусть $r < \min(d, \delta)$. Рассмотрим круг $B(z, r)$, ориентированную против хода часовой стрелки окружность $C_r = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| = r\}$ и обозначим через C_r^- окружность с противоположной ориентацией.

3. Функция $\frac{f(w)}{w-z}$ является голоморфной по переменной w в области $D^* = D \setminus \overline{B(z, r)}$, и по интегральной теореме Коши

$$\int_{\partial D^*} \frac{f(w)dw}{w-z} = \int_{\Gamma} \frac{f(w)dw}{w-z} + \int_{C_r^-} \frac{f(w)dw}{w-z} = 0$$

или

$$\int_{\Gamma} \frac{f(w)dw}{w-z} = \int_{C_r} \frac{f(w)dw}{w-z}.$$

4. Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{dw}{w-z} = 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)dw}{w-z} \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)dw}{w-z} \right| \leq \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(z) - f(w)| |dw|}{|w-z|} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{r} 2\pi r = \varepsilon. \end{aligned}$$

5. Из произвольности выбора числа ε следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)dw}{w-z}.$$

Если выполнены условия теоремы и $z \in C \setminus \bar{D}$, то функция $\frac{f(w)}{w-z}$ оказывается аналитической по переменной w в области D и, учитывая интегральную теорему Коши, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)dw}{w-z} = \begin{cases} f(z); & z \in D \\ 0; & z \in C \setminus \bar{D} \end{cases}$$

Интеграл в левой части формулы по границе области, в которой функция f является аналитической, обычно называют **интегралом Коши**.

Пример 16. Вычислить интеграл

$$\int_{|z-i|=r} \frac{dz}{z^2+9},$$

если: а) $r = 1$, б) $r = 3$, в) $r = 5$.

Решение. а) Пусть $r = 1$, в этом случае функция $\frac{1}{z^2 + 9}$ является голоморфной внутри шара $B(i, r)$. Тогда по интегральной теореме Коши $\int_{|z-i|=r} \frac{dz}{z^2+9} = 0$.

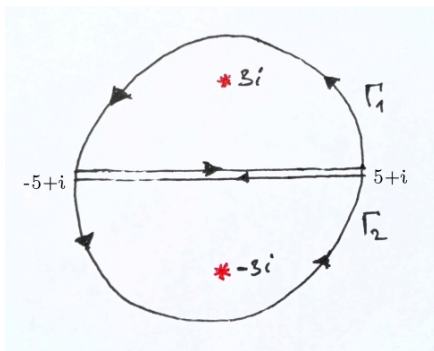
б) Если $r = 3$, то функция $\frac{1}{z^2 + 9}$ уже не будет голоморфной в шаре $B(i, r)$ (поскольку $3i$ — особая точка). Перепишем интеграл в виде

$$\int_{|z-i|=r} \frac{dz}{z^2 + 9} = \int_{|z-i|=r} \frac{dz}{(z + 3i)(z - 3i)} = \int_{|z-i|=r} \frac{\frac{1}{(z+3i)}}{(z - 3i)} dz.$$

Тогда по интегральной формуле Коши имеем

$$\int_{|z-i|=r} \frac{\frac{1}{(z+3i)}}{(z - 3i)} dz = 2\pi i \frac{1}{(3i + 3i)} = \frac{\pi}{3}.$$

в) Если $r = 5$, то функция $\frac{1}{z^2 + 9}$ также не будет голоморфной в шаре $B(i, r)$. Но в этом случае особых точек две: $3i$ и $-3i$. Поэтому мы не можем напрямую использовать интегральную формулу Коши как в случае б). Разделим контур $|z - i| = r$ на две части Γ_1 и Γ_2 (т. е. $\{|z - i| = r\} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) следующим образом



Γ_1 — это верхняя полуокружность вместе с отрезком $(-5 + i) \rightarrow (5 + i)$, Γ_2 — это верхняя полуокружность вместе с отрезком $(5 + i) \rightarrow (-5 + i)$.

Тогда

$$\int_{|z-i|=r} \frac{dz}{z^2+9} = \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z^2+9} + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{z^2+9}.$$

Применяя интегральную формулу Коши для каждого интеграла в отдельности, получим

$$\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z^2+9} = \int_{\Gamma_1} \frac{\frac{1}{(z+3i)}}{(z-3i)} dz = 2\pi i \frac{1}{(3i+3i)} = \frac{\pi}{3},$$

$$\int_{\Gamma_2} \frac{dz}{z^2+9} = \int_{\Gamma_2} \frac{\frac{1}{(z-3i)}}{(z+3i)} dz = 2\pi i \frac{1}{(-3i-3i)} = -\frac{\pi}{3}.$$

В итоге

$$\int_{|z-i|=r} \frac{dz}{z^2+9} = \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z^2+9} + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{z^2+9} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0.$$

△

2.3.1 Теорема о среднем

Теорема 17 (Теорема о среднем) Если функция $f(z)$ является голоморфной в круге $B(z_0, r)$ и непрерывной в замкнутом круге $\overline{B(z_0, r)}$, то ее значение в центре круга равно среднему значению функции на граничной окружности, т. е.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|w-z_0|=r} f(w) dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Доказательство. Используя интегральную формулу Коши и делая замену переменной $w = z_0 + re^{i\varphi}$, получаем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)dw}{w-z_0} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi r} \int_{|t-z_0|=r} f(t)dl.$$

Задачи к 2.3

19. Вычислить интеграл $\int_{|z|=3} \frac{dz}{z(z-2)}$. \blacksquare

20. Вычислить интеграл $\int_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2+2z}$. \blacksquare

21. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2 + a^2},$$

где γ – простой замкнутый контур, содержащий внутри себя круг $|z| \leq a$. \blacksquare

22. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz dz}{z^2 + 4z + 3}$$

\blacksquare

23. Вычислить интеграл

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2} dz}{z^2 - 6z}$$



24. Вычислить интегралы:

а) $\int_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz;$

в) $\int_{|z|=5} \frac{1}{z^2+16} dz;$

б) $\int_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)} dz.$

г) $\int_{|z|=4} \frac{1}{(z^2+9)(z+9)} dz.$



25. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a \cos x + a^2}$$



2.4 Интеграл типа Коши

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – ориентированная кусочно-гладкая кривая, f – определенная на кривой Γ непрерывная функция. Для любой точки $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ функция $\frac{f(t)}{t-z}$ непрерывна по переменной t на кривой Γ . Поэтому существует интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z}, \quad (2.2)$$

называемый *интегралом типа Коши* и являющийся однозначной функцией переменного z .

Теорема 18 Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – ориентированная кусочно-гладкая кривая, функция f непрерывна на Γ . Тогда интеграл типа Коши, определяемый равенством (2.2), является голоморфной функцией в области $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Более того, функция $F(z)$ бесконечно дифференцируема и при этом

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ограничимся вычислением первой производной (т. е. $F'(z)$). Фиксируем произвольную точку $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, и пусть $2d = \text{dist}(z, \Gamma)$, а $|\Delta z| < d$. Тогда для любого $t \in \Gamma$ выполняются неравенства $|t-z| > d$ и $|t-z-\Delta z| > d$.

Оценим разность

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z)^2} \right| =$$

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{\Delta z f(t) dt}{(t-z)^2(t-z-\Delta z)} \right| \leq \frac{|\Delta z| LM}{2\pi d^3},$$

где L – длина кривой Γ , а M – максимум модуля функции $f(t)$ на кривой Γ .

Таким образом

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{(t - z)^2}.$$

Дифференцируемость интегралов типа Коши позволяет получить важное следствие:

Теорема 19 *Голоморфная в области $D \subset \mathbb{C}$ функция $f(z)$ является бесконечно дифференцируемой в в каждой точке области D .*

Доказательство. Действительно, пусть точка z_0 – произвольная точка области D и $r < \text{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда в круге $B(z_0, r)$ функция $f(z)$ представима интегралом Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=r} \frac{f(t) dt}{t - z}$$

и, следовательно, является бесконечно дифференцируемой.

Пример 20. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z e^z dz}{(z - a)^3},$$

если точка a лежит внутри простого замкнутого контура γ .

Решение. Используя интеграл типа Коши, перепишем исходный интеграл в следующем виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z e^z dz}{(z - a)^3} = \frac{1}{2} \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z e^z dz}{(z - a)^{2+1}} = \frac{1}{2} F^{(2)}(a),$$

где

$$F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z e^z dz}{(z-a)}.$$

Поскольку ze^z — голоморфная функция, то по интегральной теореме Коши

$$F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z e^z dz}{(z-a)} = ae^a.$$

Вторая производная $F^{(2)}(a) = e^a(2+a)$. В итоге

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z e^z dz}{(z-a)^3} = e^a \left(1 + \frac{a}{2}\right).$$

△

Задачи к 2.4

26. Вычислить интегралы

$$\text{а) } \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz, \quad \text{б) } \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz, \quad \text{в) } \int_{|z|=2} \frac{e^{2iz}}{z^4} dz.$$

▮▮▮➔

27. Вычислить интеграл $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z-1)}$. ▮▮▮➔

2.5 Первообразная

Голоморфная в области D функция $F(z)$ называется **первообразной** функции $f(z)$, если $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in D$.

Таким образом, f — голоморфная функция и в качестве первообразной можно взять

$$F(z) = \int_{\gamma} f(w) dw = \int_{z_0}^z f(w) dw,$$

где $\gamma \subset D$ кусочно-гладкая кривая соединяющая z_0 и z .

Действительно, пусть отрезок $[z, z + \Delta z] \subset D$. Поскольку интеграл не зависит от пути интегрирования, то

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} f(t) dt = \int_{[z, z+\Delta z]} f(t) dt. \quad (2.3)$$

Далее будем считать, что в формуле (2.3) интегрирование происходит по отрезку $[z, z + \Delta z]$.

В силу непрерывности функции $f(t)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(t) - f(z)| < \varepsilon$ для всех точек t , удовлетворяющих неравенству $|t - z| < \delta$. Пусть $|\Delta z| < \delta$, тогда,

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{[z, z+\Delta z]} (f(t) - f(z)) dt \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon.$$

Из полученной оценки непосредственно следует, что

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Заметим, что если $F(z)$ первообразная функции $f(z)$, то $F(z)+C$ также первообразная $f(z)$, (здесь $C = \text{const}$).

Следующее утверждение является обратным к интегральной теореме Коши.

Теорема 21 (Теорема Мореры) Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и вдоль любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\gamma \subset D$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

то функция $f(z)$ является голоморфной в области D .

Термины к главе 2

за́мкнутая крива́я		封闭的曲线
за́мкнутый ко́нтур		闭合电路；封闭的周边
интегра́л		积分
интегра́льная теоре́ма Коши́		柯西积分定理
интегра́льная фо́рмула Коши́		柯西积分公式
интегри́рование		积分（法）；求积分
ко́неч		终止，终点；末端，端，尖
ко́неч криво́й		曲线的末端
ко́нечная то́чка криво́й		曲线的端点
ко́нтур интегри́рования		积分路线
крива́я		曲线
криволине́йный интегрáл		曲线积分
лежа́ть		坐落于，位于
лежа́ть вне криво́й		位于曲线之外
лежа́ть внутре́ криво́й		位于曲线之内
лежа́ть снару́жи от криво́й		位于曲线外侧
лине́йность		直线性，直线度

многосвязная область		多回路域
направлѣние обхода		转动方向, 绕飞方向
направлѣние обхода по часовой стрѣлке		顺时针转动
направлѣние обхода против часовой стрѣлке		逆时针转动
начало		[数]原点; 原理; 原则; 基础; 定律
начальная точка кривой		曲线的原点 (起始点)
конец		终止, 终点; 末端, 端, 尖
область		区域, 部分; 领域, 范围, 方面
ограниченная область		限制区
окрѣстность		[数]邻域
ориентированная кривая		面向曲线
отрѣзок		[数]线段, 截距; 断片, 切片; 一段, 一块 (布料及材料等)
отрѣзок прямой (отрѣзок прямой молинейный)		直线段
параметр		参数, 变数; 数据, [矿]标轴
простой контур		单管电路
радиус		半径
радиус окружности		圆的半径

содержать		设置; 包含; 维持, 保持
содержать внутри себя		本身内部包含
теорема Морёры		莫雷拉定理
центр		中心; 顶尖, 顶针
центр крúга		圆心

Глава 3

Ряды Тейлора и Лорана

3.1 Ряд Тейлора

Мы увидим, что понятия степенного ряда и голоморфной функции определяют одни и тот же объект: любой степенной ряд с положительным радиусом сходимости является голоморфной функцией, и наоборот, любая голоморфная функция может быть представлена степенным рядом.

Теорема 22 Пусть степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad (3.1)$$

имеет положительный радиус сходимости ($R > 0$). Тогда функция $f(z)$ является голоморфной функцией в $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$.

Доказательство. 1) $f(z)$ — непрерывная функция.

2) Для любого замкнутого контура $\gamma \subset B(z_0, R)$ имеем

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma} c_k (z - z_0)^k dz = 0.$$

По теореме Морера 21 функция f является голоморфной в $B(z_0, R)$.

Теперь мы покажем как вычислит производную функции (3.1).

Теорема 23 Пусть степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

имеет положительный радиус сходимости ($R > 1$). Тогда

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}. \quad (3.2)$$

Радиус сходимости ряда (3.2) также равен R .

Доказательство. 1) По теореме 22 функция $f(z)$ является голоморфной в $B(z_0, R)$.

2) По теореме 18

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z)^2},$$

где γ это окружность $|z_0 - w| = r$, $r < R$. Тогда

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w-z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (w-z_0)^k}{(w-z)^2} dw = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(w-z_0)^k}{(w-z)^2} dw = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left. \frac{d}{dw} (w-z_0)^k \right|_{w=z} = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-z_0)^{k-1}.
 \end{aligned}$$

Из этой доказанной выше теоремы получаем следующее следствие.

Теорема 24 Если степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

имеет положительный радиус сходимости, то

$$c_k = \frac{f'(z_0)}{k!}.$$

Доказательство. 1) Равенство $f(z_0) = c_0$ очевидно.

2) По теореме 23

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-z_0)^{k-1}, \quad (3.3)$$

тогда $f'(z_0) = c_1$.

3) Применяя теорему 23 к (3.3), получаем

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k (z-z_0)^{k-2},$$

откуда $f''(z_0) = 2c_2$.

4) Продолжая таким же образом выводим

$$f^{(k)}(z_0) = k!c_k.$$

Теперь мы можем доказать, что голоморфная функция может быть представлена в виде степенного ряда.

Теорема 25 Пусть функция f — голоморфна в $B(z_0, R)$. Тогда f может быть представлена в $B(z_0, R)$ степенным рядом с центром в z_0 (с радиусом сходимости $\geq R$):

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{k+1}}.$$

$\gamma \subset B(z_0, R)$ — простой кусочно-гладкий контур содержащий z_0 внутри.

Пример 26. Разложить функцию $f(z) = \cos^2 z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$.

Решение. Вспомним, что $\cos^2 z = (1 + \cos 2z)/2$.

Используя разложение $\cos w = 1 - \frac{w^2}{2!} + \dots$, получаем

$$\cos^2 z = \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \dots \right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}.$$

△

3.1.1 Классификация нулей голоморфной функции

Рассмотрим полином степени n

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Нулём порядка m для полинома $p(z)$ называется такая точка $z_0 \in \mathbb{C}$, что

$$p(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z),$$

где $g(z)$ — тоже полином и $g(z_0) \neq 0$.

Например, точка $z_0 = 1$ является нулём порядка $m = 2$ для полинома $p(z) = 3z^3 - 6z^2 + 3z$, так как $p(z) = (z - 1)^2 \cdot 3z$ (здесь $g(z) = 3z$).

Приведём аналогичное понятие для голоморфной функции.

| Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется нулём функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$.

Теорема 27 (Классификация нулей) Пусть $f(z)$ — голоморфная функция и точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является её нулём ($f(z_0) = 0$). Тогда возможны два случая:

1) $f(z) = 0$ для всех $z \in B(z_0, \rho)$ для некоторого $\rho > 0$
либо

2) Существует $m \in \mathbb{N}$ и голоморфная функция $g(z)$ так, что $f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$ и $g(z_0) \neq 0$.

| Число m из теоремы называется *порядком нуля*.

Удобный способ определения порядка нуля голоморфной функции приводится в следующем утверждении

Теорема 28 Точка z_0 — нуль порядка m голоморфной в точке z_0 функции $f(z)$ если

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Задачи к 3.1

28. Разложить функцию $f(z) = e^z$ в ряд Тейлора в с центром $z_0 = 1$.



29. Следующие функции разложить в ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ и найти радиус сходимости R .

а) $\sin^2 z$,

в) $\frac{z^2}{(z+1)^2}$,

б) $\frac{1}{az+b}$,

г) $\cos^2 \frac{iz}{2}$.



30. Разложить функцию $f(z) = z^3 \sin 3z$ в ряд Тейлора в с центром $z_0 = 0$. ▣▣▣▣➡

3.2 Ряд Лорана

Теорема 25 предоставляет мощный инструмент описания голоморфных функций. Но не все функции являются голоморфными. Далее мы увидим, что некоторые не голоморфные функции можно представлять в виде суммы рядов с целыми степенями. Например для функции $e^{\frac{1}{z}}$ вполне естественной была бы запись в виде ряда

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!},$$

с отрицательными степенями.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}.$$

Обозначим

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = S_1(z) + S_2(z).$$

Пусть радиус сходимости ряда

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

равен R . Тогда функция $S_1(z)$ будет голоморфной в круге $B(z_0, R)$.

Делая во втором ряде замену переменной $w = \frac{1}{z - z_0}$, получим обычный степенной ряд по переменной w

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n.$$

Пусть радиус сходимости этого ряда равен ρ , тогда его сумма (как функция переменной w) будет голоморфной функцией в круге $|w| < \rho$, и следовательно функция $S_2(z)$ будет голоморфной при $|z - z_0| > r$.

Если $r < R$, то функция

$$f(z) = S_1(z) + S_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

будет голоморфной в кольце $r < |z - z_0| < R$.

Теорема 29 (Теорема Лорана) Аналитическая в кольце $K = \{r < |z - z_0| < R\}$ функция $f(z)$ в каждой точке $z \in K$ представима в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_0)^k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{k+1}}.$$

$\gamma \subset K$ — простой кусочно-гладкий контур.

Получаемый в теореме 29 ряд называют *рядом Лорана*.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad \text{правильная часть ряда Лорана}$$

и

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z - z_0)^n \quad \text{главная часть ряда Лорана.}$$

Пример 30. Разложить функцию

$$f(z) = \frac{1 + 2z}{z^3 + z^2}$$

в ряд Лорана с центром в $z_0 = 0$.

Решение. Коэффициенты ряда Лорана можно найти по формуле из теоремы 29. Но мы поступим иначе. Перепишем функцию в следующем виде

$$\frac{1 + 2z}{z^3 + z^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z + 1}.$$

Найдём коэффициенты A , B и C .

$$\frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+1} = \frac{Az(z+1)}{z^2(z+1)} + \frac{B(z+1)}{z^2(z+1)} + \frac{Cz^2}{z^2(z+1)}.$$

Тогда

$$1 + 2z = B + (A + B)z + (A + C)z^2,$$

и, следовательно

$$\begin{cases} 1 = B, \\ 2 = A + B, \\ 0 = A + C. \end{cases}$$

Решая систему находим $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$. Таким образом

$$\frac{1 + 2z}{z^3 + z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z+1}.$$

Первые два слагаемых $\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$ — это уже часть ряда Лорана. Для третьего получаем

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \dots$$

Таим образом, разложение в ряд Лорана для функции $\frac{1+2z}{z^3+z^2}$ имеет вид

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \dots$$

△

3.2.1 Ряд Лорана в ∞

Пусть функция $f(z)$ является голоморфной в окрестности бесконечно удаленной точки, т. е. существует такое $R < \infty$, что функция $f(z)$ является голоморфной при $R < |z| < \infty$.

Тогда функция $f(1/t)$ является голоморфной в кольце $0 < |z| < \frac{1}{R}$ и допускает разложение в ряд Лорана в окрестности точки $t = 0$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} t^{-n}.$$

Делая замену переменной $t = \frac{1}{z}$ и полагая $c_n = b_{-n}$, получаем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

При этом в окрестности бесконечно удаленной точки правильной частью ряда Лорана называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^{-n},$$

а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

называется главной частью ряда Лорана.

3.3 Изолированные особые точки

Точка $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность $B(z_0, \rho)$ точки z_0 в которой функция $f(z)$ является аналитической всюду, за исключением самой точки z_0 (в точке z_0 функция может быть и вообще не определена).

Рассмотрим функции $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1}{z^4}$, $e^{\frac{1}{z}}$. Для каждой из этих функций точка $z_0 = 0$ является изолированной особой точкой. Однако, оказывается, что характер особенности (сингулярности) в каждом случае разный.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется

- 1) **устранимой особой точкой**, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ существует и конечен;
- 2) **полюсом**, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$;
- 3) **существенно особой точкой**, если функция $f(z)$ не имеет предела в точке z_0 .

Пример 31. Для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ точка $z_0 = 0$ является *устранимой особой точкой*, поскольку

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

△

Пример 32. Для функции $f(z) = \frac{1}{z^4}$ точка $z_0 = 0$ является *полюсом*, поскольку

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{1}{z^4} \right| = \infty,$$

и, следовательно $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z^4} = \infty$.

△

Пример 33. Предела $\lim_{z \rightarrow z_0} e^{\frac{1}{z}}$, не существует. Поэтому точка $z_0 = 0$ является *существенно особой* для функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. △

Определять тип особой точке можно с помощью следующего утверждения

Теорема 34 Пусть z_0 — изолированная особая точка голоморфной функции $f(z)$. Тогда

- 1) z_0 — *устраняемая* $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$;
- 2) z_0 — *полюс* $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = 0$, для некоторого $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$;

Строение ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки z_0 существенным образом зависит от типа особой точки.

Теорема 35 Пусть z_0 — изолированная особая точка голоморфной функции $f(z)$.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

ряд Лорана в кольце $0 < |z - z_0| < R$, $R > 0$. Тогда

1) z_0 — устранимая \Leftrightarrow в ряде Лорана нет членов с отрицательными номерами, т. е.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

2) z_0 — полюс \Leftrightarrow ряд Лорана содержит лишь конечное число членов с отрицательными номерами, т. е.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

3) z_0 — существенно особая \Leftrightarrow ряд Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными номерами, т. е. имеет вид

$$\cdots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

Пусть z_0 — полюс. Максимальный номер m такой, что $c_{-m} \neq 0$ называется порядком полюса. И говорят: z_0 — полюс порядка m .

Пример 36. Для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$ точка $z_0 = 0$ является полюсом порядка $m = 2$, поскольку ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots .$$

△

Также порядок полюса можно устанавливать в помощью следующего утверждения.

Теорема 37 Пусть $f(z)$ — голоморфная функция и z_0 её ноль порядка m . Тогда функция $1/f(z)$ имеет в точке z_0 полюс порядка m .

Задачи к 3.3

31. Разложить в ряд Лорана с центром в нуле.

а) $\frac{\sin z}{z}$,

в) $z^3 e^{\frac{1}{z}}$,

б) $\frac{e^z}{z}$,

г) $z^4 \cos \frac{1}{z}$.

▣▣▣▶

32. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ в ряд Лорана в с центром $z_0 = 0$. ▣▣▣▶

33. Для функции

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z-1)}$$

определить особые точки и установить их характер. ▣▣▣▶

Термины к главе 3

главная часть ряда Лорана		罗朗级数的主要部分
кольцо		环，圈，环形物；光环，光圈；年轮
особая точка		奇（异）点
особая точка функции		函数的奇（异）点
особенность		特点，特征；特性，特殊性
правильная часть ряда Лорана		罗朗级数的正确部分
разложение		[化]分解（作用）；解体，崩溃，腐败；[数]分解，展开（式）
разложение Лорана		罗朗分解
разложить-разлагать		[专]分解；[转]使分化，使瓦解，使腐化
разложить функцию в ряд		将函数展成级数
ряд Лорана	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_0)$	罗朗级数

ряд Тейлора		泰勒（台劳）级数
ряд Тейлора с центром в точке z_0	$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)$	以 z_0 点为中心的泰勒（台劳）级数
тип		型，式；种类，型别
тип особой точки		奇（异）点的类型

Глава 4

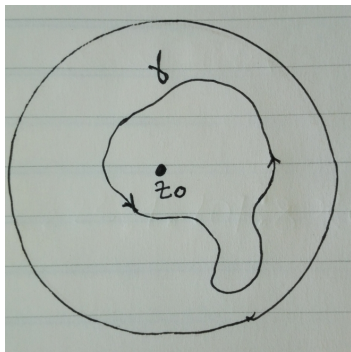
Вычеты

4.1 Определение вычета

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции f . Тогда f можно разложить в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

в некотором кольце $K = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < R\}$. Рассмотрим кривую $\gamma \subset K$ такую, что точка z_0 находится внутри.



Проинтегрируем функцию f по кривой γ :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{\gamma} (z - z_0)^k dz.$$

Вспомним¹, что

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^k dz = \begin{cases} 2\pi i, & k = -1, \\ 0, & k \neq -1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i c_{-1}. \quad (4.1)$$

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется величина

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Или, что тоже самое, в силу (4.1)

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Если посмотреть с другой стороны, то можно сказать, что интеграл равен вычету:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z).$$

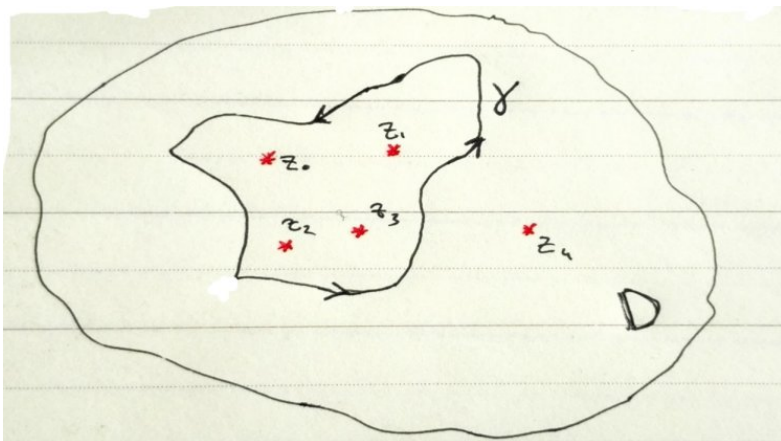
На самом деле справедливо более общее свойство.

¹См. пример 9.

Теорема 38 (Основная теорема теории вычетов) Пусть f — голоморфна в $D \subset \mathbb{C}$, за исключением изолированных особых точек $\{z_j\}$. γ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая не содержащая особых точек $\{z_j\}$. Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z),$$

где суммирование ведётся по всем точкам z_j находящимся внутри.



Суть теоремы 38 состоит в том, чтобы вместо интегрирования $\int_{\gamma} f(z) dz$ вычислять вычеты $\operatorname{Res}_{z=z_j} f(z)$ в изолированных особых точках.

4.1.1 Вычет в ∞

Пусть бесконечно удаленная точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$, т. е. существует такое $R < \infty$, что функция $f(z)$ является голоморфной при $\infty > |z| > R$.

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ называется величина

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z) dz,$$

где интеграл берется по ориентированной в отрицательном направлении (по часовой стрелке) кривой γ .

Если известно разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки (см. пункт 3.2.1), то

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

При этом следует отметить, что даже в случае, когда бесконечно удаленная точка является устранимой особой точкой, вычет в ней может быть отличен от нуля. В качестве простейшего примера можно рассмотреть функцию $f(z) = \frac{1}{z}$, для которой $z = \infty$ является устранимой особой точкой, но $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

Теорема 39 Пусть $f(z)$ — голоморфна, за исключением конечно числа особых точек $\{z_0, z_1, \dots, z_N\}$. Тогда сумма вычетов по всем особым точкам (включая ∞) равна нулю, т. е.

$$\sum_{j=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z).$$

4.2 Нахождение вычетов

Лемма 40 Если $z_0 \in \mathbb{C}$ — устранимая особая точка функции f , то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = 0.$$

Доказательство. Действительно, если z_0 — устранимая, то, в частности, $c_{-1} = 0$.

Лемма 41 Если ∞ — устранимая особая точка функции f , то

$$\operatorname{Res} = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(\lim_{w \rightarrow \infty} f(w) - f(z) \right).$$

Далее мы рассмотрим приёмы, которые позволяют находить вычеты в полюсах.

Лемма 42 Если z_0 — простой полюс (т.е. полюс порядка 1) функции f , то

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0) \cdot f(z)).$$

Доказательство. Если z_0 — простой полюс, то

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Тогда

$$(z - z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + c_2(z - z_0)^3 + \dots$$

и

$$(z - z_0)f(z) \rightarrow c_{-1} \quad \text{при } z \rightarrow z_0.$$

Последние две леммы являются частными случаями следующего утверждения.

Теорема 43 Если z_0 — полюс порядка m функции f , то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m \cdot f(z)).$$

Сравните приведённое выше утверждение с теоремой 18.

Лемма 44 Пусть f, g — голоморфна в точке z_0 функции. z_0 — ноль функции g порядка 1 (т. е. $g(z_0) = 0$, но $g'(z_0) \neq 0$) и $f(z_0) \neq 0$. Тогда функция $\frac{f}{g}$ имеет полюс первого порядка в точке z_0 и

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Пример 45. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$ во всех изолированных особых точках.

Решение. 1) Имеем

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1-z^2)} = \frac{-1}{z^3(z-1)(z+1)}.$$

Тогда 0 — полюс 3-го порядка, -1 и 1 — полюса первого порядка, а ∞ — устранимая особая точка.

2) Найдём вычет в точке 0. Для этого рассмотрим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана с центром в 0:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{z^3} \cdot (1+z^2+z^4+\dots) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + z + \dots$$

Отсюда $c_{-1} = 1$, и следовательно $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1$.

3) Вычеты в простых полюсах -1 и 1 найдём по лемме 42:

$$\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{-1}{z^3(z-1)} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-1}{z^3(z+1)} = -\frac{1}{2}.$$

4) По теореме 39

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0,$$

следовательно, $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$. △

Пример 46. Пусть $f(z) = \frac{e^z}{\sin z \cos z}$. Найдите $\operatorname{Res}_{z=\pi} f(z)$.

Решение. Имеем $f(z) = \frac{e^z}{\sin z \cos z} = \frac{2e^z}{\sin 2z}$.

Функции $2e^z$ и $\sin 2z$ голоморфны и точка π является нулём первого порядка для функции $\sin 2z$ ($\sin 2\pi = 0$, $\sin' 2\pi \neq 0$). Тогда по лемме 44

$$\operatorname{Res}_{z=\pi} \left(\frac{2e^z}{\sin 2z} \right) = \frac{2e^\pi}{(2 \cos 2\pi)} = e^\pi.$$

△

Задачи к 4.2

34. Найти вычеты функции $f(z)$ во всех изолированных особых точках:

а) $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$;

в) $f(z) = \operatorname{ctg} z$;

б) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$;

г) $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}$.



35. Найти вычеты функции $f(z)$ во всех изолированных особых точках:

а) $f(z) = \sin \frac{z}{z+1}$;

б) $f(z) = z^n e^{\frac{a}{z}}$;

в) $f(z) = \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z}$.



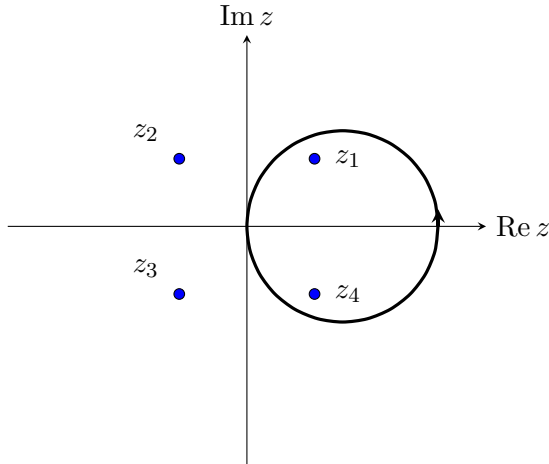
4.3 Вычисление интегралов

Пример 47. Вычислить интеграл $\int_C \frac{dz}{z^4+1}$, где, C — окружность $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. 1) Функция $z^4 + 1$ имеет четыре разных нуля порядка 1:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Другими словами, $z^4 + 1 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$. Тогда функция $\frac{1}{z^4+1}$ имеет четыре полюса порядка 1 (в точках z_1, z_2, z_3, z_4).



2) Два полюса (z_1 и z_4) находятся внутри. Тогда по основной теореме теории вычетов 38 получаем

$$\int_C \frac{dz}{z^4 + 1} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{1}{z^4 + 1} + \operatorname{Res}_{z=z_4} \frac{1}{z^4 + 1} \right).$$

3) Найдём вычеты. Поскольку функции $f(z) = 1$, $g(z) = z^4 + 1$ голоморфны и z_1, z_4 нули первого порядка функции $g(z)$ (т. е.

$g(z) = 0$, $g'(z) \neq 0$), то можно воспользоваться леммой 44. Напомним, что по лемме 44: $\operatorname{Res}_{z=z_j} (f(z)/g(z)) = f(z_0)/g'(z_0)$. В нашем случае

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4e^{3\pi i/4}}$$

и

$$\operatorname{Res}_{z=z_4} \frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{4z_4^3} = \frac{1}{4e^{-3\pi i/4}}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{z^4 + 1} &= 2\pi i \left(\frac{1}{4e^{3\pi i/4}} + \frac{1}{4e^{-3\pi i/4}} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{3\pi i/4} + e^{-3\pi i/4}}{4} \right) = 2\pi i \left(\frac{\cos 3\pi/4}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}. \end{aligned}$$

△

Пример 48. Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=2} f(z) dz = \int_{|z|=2} \frac{2z^7 - z^6 + 3z^4 + z - 5}{z^8 - 1} dz.$$

Решение. Функция $f(z)$ имеет восемь простых полюсов $z_k = e^{\frac{i\pi k}{4}}$, $k = 0, \dots, 7$, лежащих в круге $|z| < 2$, и по основной теореме теории вычетов

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^7 \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Поскольку в окрестности бесконечно удаленной точки

$$f(z) = \frac{2z^7 - z^6 + 3z^4 + z - 5}{z^8} \cdot \frac{1}{(1 - z^{-8})} =$$

$$\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^4} + \frac{1}{z^7} - \frac{5}{z^8}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{8k}} = \frac{2}{z} + \sum_{m=2}^{\infty} c_m \frac{1}{z^m},$$

то $c_{-1} = 2$, $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -2$, следовательно $I = 4\pi i$.

△

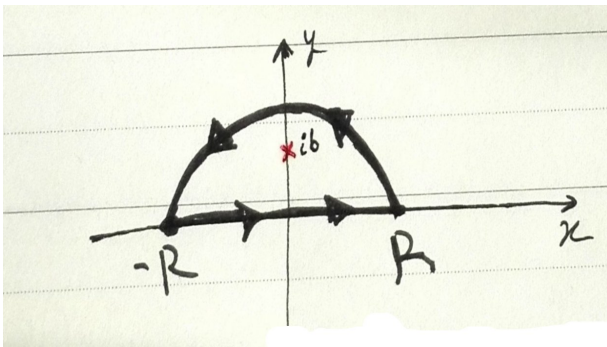
Пример 49. Найдём интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax} dx}{x^2 + b^2},$$

параметры $a, b > 0$.

Решение. 1) Рассмотрим замкнутый контур Γ_R состоящий из отрезка $[-R, R]$ и верхней полуокружности

$$C_R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}.$$



2) Имеем

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz} dz}{z^2 + b^2} = \int_{C_R} \frac{e^{iaz} dz}{z^2 + b^2} + \int_{[-R, R]} \frac{e^{iaz} dz}{z^2 + b^2}.$$

Первый интеграл

$$\int_{C_R} \frac{e^{iaz} dz}{z^2 + b^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty,$$

по лемме Жодана 12.

Второй интеграл

$$\int_{[-R,R]} \frac{e^{iaz} dz}{z^2 + b^2} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax} dx}{x^2 + b^2} \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

3) Функция $\frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}$ имеет полюс первого порядка в точке ib . Тогда по основной теореме теории вычетов 38

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz} dz}{z^2 + b^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ib} \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} = \frac{2\pi i e^{ia(ib)}}{2(ib)}.$$

4) Таким образом искомый интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax} dx}{x^2 + b^2} = \frac{\pi e^{-ab}}{b}.$$

△

Задачи к 4.3

36. Вычислить интегралы:

а) $\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz;$

в) $\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 1} dz;$

б) $\int_{|z|=t} \operatorname{tg} z dz;$

г) $\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} dz.$



37. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_{|z|=2} \frac{1}{1+z^4} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4} dz;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=2} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} dz;$$

$$\text{г) } \int_{|z|=5} \frac{z}{\sin z(1-\cos z)} dz.$$



38. Вычислить интеграл

$$\int_{|z-1-i|=2} \frac{\cos(1/z)}{iz+1} dz$$



39. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{\cos z},$$

где Γ – ориентированная против хода часовой стрелки граница полуполосы

$$P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0, -a < \operatorname{Im} z < a, a > 0\}.$$



40. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos \varphi} \quad (a > 1);$$

$$\text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2a \cos \varphi + a^2} \quad (|a| < 1);$$

$$\text{в) } \int_0^{2\pi} e^{\cos \varphi} \cos(n\varphi - \sin \varphi) d\varphi \quad (n \in \mathbb{N}).$$



41. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\varphi d\varphi}{1-2a \cos \varphi+a^2} \quad (|a| < 1, n \in \mathbb{N});$$

$$\text{б) } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+2 \cos \varphi)^n}{5+4 \cos \varphi} \cos n\varphi d\varphi \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$\text{в) } \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha}{\sin \varphi - \sin \alpha} \right)^n e^{in\varphi} d\varphi \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}).$$



Термины к главе 4

вы́чет		扣除; 扣除额
основная теорема теории вы́четов		残数 (留数) 理论的基本定理
теория вы́четов		残数理论, 留数理论
рационально-тригонометрический ин-теграл		有理三角数积分

Ответы

1. см. пример 1.. 2.(a) 0, (б) $1 + i$. 3. Указание: воспользоваться неравенством $||z| - |z_0|| \leq |z - z_0|$. 4. см. пример 3.. 5.(a) $e^z \sin e^z$, (б) $-2e^{-z^2}(1+z)/(1+2z)^2$. 6. $a = -b$. 7. $f(z) = z + iz$. 8. Нет не является. Указание: показать, что предел $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{-1/z^4}}{z}$ не существует.
- 9.(a) $(2/3)(1-i)$, (б) $4/3 + i2/3$. 10. $-2\pi i$. 11.(а) $8\pi i$, (б) 0. (в) 0, (г) 0. 12. 0. 13. $(1+i)^3 \cdot \frac{1}{3}$. 14. 0. 15.(a) 6, (б) π . (в) 4, (г) $8a$. 16. 0. 17. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$. 18. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\pi/4}$. 19. 0. 20. πi . 21. $\frac{\sin a}{a}$. 22. $\pi i \cos 1$. 23. $-\pi i/3$. 24.(a) π/e ; (б) $i(2\pi/3) \operatorname{ch} \pi$; (в) 0; (г) $-\pi i/45$. 25. $\frac{2\pi}{1-a^2}$ при $|a| < 1$, $\frac{2\pi}{a^2-1}$ при $|a| > 1$. 26.(a) $2\pi i$, (б) $-\pi i$, (в) $8\pi/3$. 27. 0. 28. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!}(z-1)^k$. 29.(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$; (б) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^n z^n}{b^{n+1}}$, $R = |b/a|$; (в) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(n-1)z^n$, $R = 1$ Указание: воспользоваться тем, что $(1/(z+1))' = -(1/(z+1))^2$;
- (г) $1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right)$. 30. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+4}$. 31.(a) $\frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots$, (б) $\frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots$. (в) $\dots + \frac{1}{z!} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{2!} + z^2 + z^3$, (г) $\dots - \frac{1}{z^2 6!} + \frac{1}{4!} - \frac{z}{2!} + z^4$. 32. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$. 33. $z = 0$ — устранимая, $z = 1$ — полюс, $z = \infty$ — существенно особая точка. 34.(a) $\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = 2 \sin 2$, $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -2 \sin 2$; (б) $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{9}$, $\operatorname{Res}_{z=3i} f(z) = \frac{i}{54} e^{3i}$, $\operatorname{Res}_{z=-3i} f(z) = -\frac{i}{54} e^{-3i}$, $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{27}(\sin 3 - 3)$; (в) $\operatorname{Res}_{z=k\pi} f(z) = (-1)^k$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $z = \infty$ — неизолированная особая точка; (г) $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = \frac{143}{24}$. 35.(a) $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = \cos 1$; (б) $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$; (в) $\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \sin 1$, $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$. 36.(a) $2\pi i(1-e^{-1})$; (б) $-4\pi i$; (в) π/e ; (г) 0. 37.(a) 0; (б) $-\pi i/121$; (в) $2\pi i$; (г) 0. 38. 2π , указание: использовать лемму 41. 39. $(2 \operatorname{ch} \pi/2)^{-1}$. 40.(a) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$; (б) $\frac{2\pi}{1-a^2}$; (в) $\frac{2\pi}{n!}$. 41.(a) $2\pi \frac{a^n}{1-a^2}$; (б) $\frac{2\pi i}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n$; (в) $\frac{\pi i^n}{2^{n-1}}$.