Оглавление

Глава 1

Ряды Фурье

1.1 Тригонометрический ряд Фурье

Тригонометрическим рядом Фурье для функции $f(x)$ называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\quad n=1,2,\ldots.$$

Задачи к 1.1

Разложить в тригонометрический ряд Фурье.

1. $f(x)=|\sin x|$ ➠

2. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$ ➠

Нарисовать графики и найти ряды Фурье следующих функций, предполагая, что они имеют период 2π:

3.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ 3, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

4.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi}{2} - x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

5.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

6.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ \sin x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

1.2 Разложения только по синусам или только по косинусам

> Если $f(x)$ — не чётная ($f(-x) = -f(x)$), то $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$.
>
> Если $f(x)$ — чётная ($f(-x) = f(x)$), то $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\,dx$.

★ Если $f(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ — чётная функция, то её ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

при этом

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

★ Если $f(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ — не чётная функция, то её ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

при этом

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Пусть теперь функция $f(x)$ задана на интервале $[0, \pi]$ ($f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$).

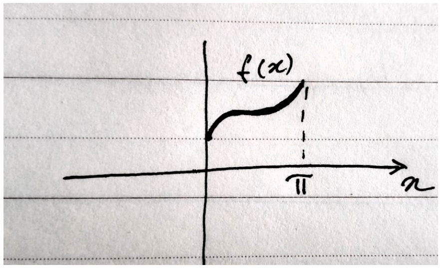


Рис. 1.1. $f(x)$

Рассмотрим обратную задачу: *Как разложить функцию* $f(x)$ *в ряд* ***только*** *по синусам (по* $\sin nx$ *)?* То есть требуется

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Чтобы это сделать, продолжим функцию f на весь интервал $[-\pi, \pi]$ так, что продолженная функция $\widetilde{f}(x)$ — не чётная и $\widetilde{f}(x) = f(x)$ для $x \in [0, \pi]$. Сделать это не трудно

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

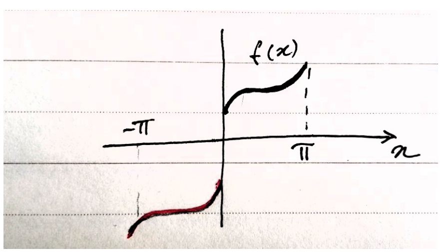


Рис. 1.2. $\widetilde{f}(x)$ — не чётное продолжение.

Тогда

$$\widetilde{f}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, x \in [-\pi, \pi] \quad \text{и} \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, x \in [0, \pi].$$

Аналогично, f можно разложить только по косинусам ($\cos nx$). Для этого, функцию f нужно продолжить чётным образом:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

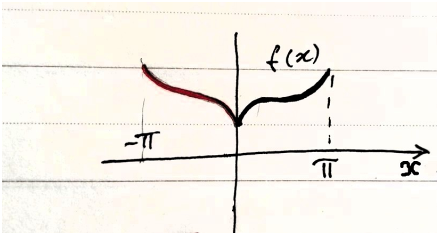


Рис. 1.3. $\widetilde{f}(x)$ — чётное продолжение.

Задачи к 1.2

7. Разложить функцию $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$ в ряд Фурье по синусам. ➠

8. Как следует продолжить интегрируемую на промежутке $[0, \pi/2]$функцию на промежуток $[-\pi, \pi]$,чтобы ее ряд Фурье имел вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \quad ?$$

➠

9. Как следует продолжить интегрируемую на промежутке $[0, \pi/2]$функцию на промежуток $[-\pi, \pi]$,чтобы ее ряд Фурье имел вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \quad ?$$

1.3 Ряд Фурье в комплексной форме

Пусть f — 2π-периодическая функция. Найдём разложение этой функции в ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Сначала заметим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ilx}\,dx = \begin{cases} 2\pi, \text{ если} & k = l, \\ 0, \text{ если} & k \neq l. \end{cases}$$

Тогда[1]

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ilx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} e^{-ilx}\,dx = 2\pi \cdot c_k.$$

Таким образом

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx.$$

Задачи к 1.3

10. Разложить функцию

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

на интервале $(-\pi, \pi)$ в ряд Фурье в комплексной форме.

[1] Если предположить, что $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$.

11. Следующие функции разложите в ряд Фурье с использованием комплексной формы ряда Фурье ($|a| < 1$):

а) $f(x) = \frac{a \sin x}{1-2a\cos x+a^2}$.

б) $f(x) = \frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}$,

в) $f(x) = \frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$.

1.4 Представимость функции своим рядом Фурье

1.4.1 Лемма Римана –Лбега

Лемма 1 (Римана –Лбега) *Если функция f интегрируема на промежутке $[a, b]$, то*

$$\lim_{p\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)e^{ipx}\,dx = 0.$$

Приведём доказательство когда f непрерывно дифференцируема в промежутке $[a, b]$.

Доказательство. *1) Интегрируем по частям:*

$$\int\limits_a^b f(x)e^{ipx}\,dx = \frac{1}{ip}\left(f(x)e^{ipx}\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)e^{ipx}\,dx\right).$$

2) Оценим модуль интеграла

$$\left|\int\limits_a^b f(x)e^{ipx}\,dx\right| = \left|\frac{1}{ip}\left(f(x)e^{ipx}\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)e^{ipx}\,dx\right)\right| \leq$$

$$\frac{1}{p}\left(\left|f(x)e^{ipx}\Big|_a^b\right| + \left|\int\limits_a^b f'(x)e^{ipx}\,dx\right|\right) \leq$$

$$\frac{1}{p}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int\limits_a^b |f'(x)|\,dx\right).$$

3) Поскольку величины $|f(b)|$, $|f(a)|$, $\int\limits_a^b |f'(x)|\,dx$ *— ограничены получаем*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)e^{ipx}\,dx\right| \to 0, \qquad \text{при } p \to \infty.$$

Используя формулу Эйлера, получаем следующее следствие:

$$\lim_{p\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\sin px\,dx = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{p\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\cos px\,dx = 0.$$

1.4.2 Ядро Дирихле

Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$, где $c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ilt}\,dt$. Тогда

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\right)e^{ikx}.$$

Преобразуем

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\,dt.$$

Вычисляя частичную сумму геометрической прогрессии имеем

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{iky} = \frac{e^{iyn}(1-e^{-2iyn})}{1-e^{iy}}. \tag{1.1}$$

Функция $D_n(y) = \frac{1}{2\pi} \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{iky}$ называется ***ядром Дирихле***.

Выполнено свойство
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(y)\, dy = 1.$$

В итоге
$$S_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_n(y)\, dy.$$

1.4.3 Теорема о представимости

Теорема 2 *Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая кусочно-гладкая функция. Тогда для её ряда Фурье верно*
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2}\big(f(x+0) + f(x-0)\big).$$

Задачи к 1.4

12. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos^2(nt)\, dt$.

13. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$

1.5 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Как и всегда в анализе, нам важно уметь дифференцировать и интегрировать.

Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая 2π-периодическая функция, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ — её ряд Фурье. Нас интересует вопрос: *каким будет ряд Фурье для производной $f'(x)$?*

$$f'(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k e^{ikx}.$$

Теорема 3 *При сделанных выше предположениях справедливы равенства $c'_k = ikc_k$.*

Доказательство. *Вычислим коэффициенты Фурье для производной:*

$$c'_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}\,dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(f(x)e^{-ikx}\,\Big|_{-\pi}^{\pi} + ix\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \right) = ikc_k \qquad \text{при } k \neq 0.$$

Если $k = 0$, то

$$c'_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = 0,$$

в силу 2π-периодичности функции $f(x)$.

Эта теорема обосновывает законность почленного дифференцирования ряда Фурье гладкой функции:

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}\right] \stackrel{?}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikx},$$

однако в результате мы получим формальный ряд Фурье для производной (который не обязательно сходится).

Отметим следующее достаточное условие сходимости ряда Фурье для производной.

Лемма 4 *Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая 2π-периодическая функция и $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$.*

Если

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k|c_k| < \infty,$$

то ряд Фурье для производной сходится:

$$f'(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikx}.$$

Перейдём к интегрированию. Пусть теперь функция $g(x)$ непрерывна, 2π-периодична и $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = 0$ [2]. Мы можем написать её формальный ряд Фурье (ничего не утверждая о его сходимости):

$$g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Рассмотрим, кроме того, непрерывно дифференцируемую 2π-периодическую функцию $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ и разложим ее в (схо-

[2] Это условие обеспечит 2π-периодичность интеграла $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$.

дящийся к ней) ряд Фурье:

$$G(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx}.$$

Теорема 5 *При сделанных выше предположениях справедливы равенства* $C_k = \frac{c_k}{ik}$, $C_0 = -\sum\limits_{k\neq 0} \frac{c_k}{ik}$.

Доказательство. *Поскольку* $G'(x) = g(x)$, *то по предыдущей теореме 3:* $c_k = ikC_k$, $k \neq 0$.

Найдём коэффициент C_0*:*

$$0 = G(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k = C_0 + \sum_{k\neq 0} C_k,$$

следовательно $C_0 = -\sum\limits_{k\neq 0} \frac{c_k}{ik}$.

Последняя теорема обосновывает законность почленного интегрирования ряда Фурье непрерывной функции:

$$\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}\,dt = \sum_{k\neq 0} \frac{c_k e^{ikx}}{ik} - \sum_{k\neq 0} \frac{c_k}{ik}.$$

Таким образом, при почленном интегрировании ряда Фурье не надо заботиться о его сходимости: для непрерывной функции даже из формального ряда мы получаем сходящийся.

Задачи к 1.5

14. Разложить функцию $f(x) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2)$ в ряд Фурье.

1.6 Равенство Ляпунова

Теорема 6 (равенство Ляпунова) *Пусть функция f такова, что*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx < \infty$$

и пусть c_k – ее коэффициенты Фурье. Тогда справедливо равенство,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx,$$

*называемое **равенством Ляпунова**.*

Доказательство. *1) В теореме 2 мы показали, что частичная сумма ряда Фурье $S_n(x) \to f(x)$ (при некоторых условиях на функцию $f(x)$). На самом деле, также верно, что*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)|^2\,dx \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.2}$$

2) Распишем квадрат модуля из соотношения (1.2)*:*

$$|S_n(x) - f(x)|^2 = (S_n(x) - f(x))(\overline{S_n(x) - f(x)}) =$$
$$(S_n(x) - f(x))(\overline{S_n(x)} - \overline{f(x)}) =$$
$$\overline{S_n(x)}S_n(x) - \overline{S_n(x)}f(x) - \overline{f(x)}S_n(x) + \overline{f(x)}f(x).$$

3) Проинтегрируем каждое из слагаемых:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{S_n(x)}S_n(x)\,dx = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx,$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi} (\overline{S_n(x)} f(x) + S_n(x)\overline{f(x)}+)\, dx = -4\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Таким образом

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)|^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2,$$

и, из (1.2) *получаем*

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx, \quad n \to \infty.$$

Для тригонометрического ряда Фурье (по синусам и косинусам) равенство Ляпунова имеет следующий вид:

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ({a_n}^2 + {b_n}^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$$

Задачи к 1.6

15. Напишите равенство Ляпунова для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & a < |x| < \pi \end{cases}$$

и найдите с его помощью суммы числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2}.$$

➠

16. Вычислите интеграл $\int_0^{2\pi} |3 + 4e^{10ix} + 5e^{100ix}|^2 dx$, используя равенство Ляпунова. ➠

17. Найти сумму ряда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathrm{e}^{inx} \right|^2 dx$$

➠

18. Пусть кусочно-гладкая функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[0, \pi]$. Докажите, что при выполнении условия

$$\int_0^{\pi} f(x)\, dx = 0$$

имеет место неравенство

$$\int_0^{\pi} [f(x)]^2\, dx \le \int_0^{\pi} [f'(x)]^2\, dx,$$

называемое неравенством Стеклова, и убедитесь, что равенство в нем осуществляется лишь для функций вида $f(x) = A\cos x$. ➠

19. Пусть кусочно-гладкая функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[0, \pi]$. Докажите, что при выполнении условия $f(0) = f(\pi) = 0$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^\pi [f(x)]^2\,dx \le \int\limits_0^\pi [f'(x)]^2\,dx,$$

также называемое неравенством Стеклова, и убедитесь, что равенство в нем имеет место лишь для функций вида $f(x) = B\sin x$.

20. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[-\pi, \pi]$ и имеет в нем (за исключением разве лишь конечного числа точек) производную $f'(x)$, интегрируемую с квадратом. Докажите, что если при этом выполнены условия

$$f(-\pi) = f(\pi) \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0,$$

то имеет место неравенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\,dx,$$

называемое неравенством Виртингера, причем равенство в нем имеет место лишь для функций вида $f(x) = A\cos x + B\sin x$.

1.7 Периодические решения

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая функция. Рассмотри дифференциальное уравнение

$$y' + \alpha y = f(x) \tag{1.3}$$

и зададимся вопросом: *как найти периодическое решение $y(x)$?*

Предположим, что такое решение существует. Запишем ряды Фурье для правой части $f(x)$ и неизвестной функции $y(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}, \qquad y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{ikx}.$$

Подставим эти разложения в (1.3):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} iky_k e^{ikx} + \alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx},$$

откуда получаем, что $iky_k + \alpha y_k = f_k$, и, следовательно

$$y_k = \frac{f_k}{ik+\alpha} \quad (\text{ если } \alpha \neq ik).$$

Тогда периодическим решением (1.3) является

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k}{ik+\alpha} e^{ikx}.$$

Задачи к 1.7

Найти периодические решения.

21. $y'' + 2y = \sin x$

22. $y'' + 2y' + y = \sin x$

23.

а) $y'' - y = 0,$ б) $y'' + y = 0.$

24. $y'' + 4y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$

傅里叶级数的一些基本公式与定理

傅里叶级数是由周期函数所确定的一种三角级数，对于周期为2π的周期函数，傅里叶级数有以下形式：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中 a_n, b_n 傅里叶系数，可由以下公式推出：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\quad n=1,2,\ldots.$$

将周期为2π的周期函数展开为傅里叶级数需： 1) 求出傅里叶系数a_n,b_n; 2) 将其写成傅里叶级数形式： $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

对复数形式的傅里叶级数来说，有以下推论和性质:

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx},\quad c_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}\,dx.$$

傅里叶级数的部分和记作： $S_n(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}$. 最根本的问题是求证：部分和的极限是否等于$f(x)$? 为什么？ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)\stackrel{?}{=}f(x)$.

黎曼-勒贝格定理 如果函数$f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的可积函数，则：

$$\lim_{p\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)e^{ipx}\,dx=0.$$

狄利克雷核指的是以下一族函数：

$$D_n(y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{iky}.$$

容易得出以下表达式：

$$D_n(y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-e^{-2iny}}{1-e^{iy}}e^{iny} = \frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x/2)}.$$

狄利克雷核的一些性质：

1） $D_n(y+2pi) = D_n(y)$ （2π周期 ）;

2） $D_n(-y) = D_n(y)$ （偶函数）;

3） $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(y)\,dy = 1.$

狄利克雷核在求傅里叶级数部分和时有很重要的应用

$$S_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-y)D_n(y)\,dy.$$

下面是最主要的一些分解定理之一

设函数$f(x)$是周期为2π的周期函数，且分段光滑，此时其傅里叶级数满足：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big).$$

帕塞瓦尔恒等式表明，函数$f(x)$在L_2空间上的范数与其傅里叶级数有以下关系：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx.$$

Глава 2

Преобразование Фурье

Пусть $f(x)$ — интегрируемая функция. Определим преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi x\xi}\, dx.$$

Преобразование фурье обозначают: $\mathcal{F}(f) = \hat{f}(\xi)$. Отметим следующие свойства: $\hat{f}(\xi)$ — ограничена и $f(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to 0$. Но мы не можем утверждать, что $\hat{f}(\xi)$ интегрируема и, следовательно, не определён интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i2\pi x\xi}\, d\xi,$$

который задаёт (как мы увидим позже) обратное преобразование Фурье.

Для того, чтобы иметь возможность представления

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi t\xi}\, dt e^{i2\pi x\xi}\, d\xi$$

потребуется рассмотреть более узкое пространство функций.

2.1 Пространство $\mathcal{S}$ быстро убывающих функций

Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (Schwartz space) на $\mathbb{R}$, состоит из таких функций f, что сама функция и все её производные быстро убывают:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k| \cdot |f^{(l)}(x)| < \infty \quad \text{для всех } k, l \geq 0.$$

Заметим, что если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, то

$$f'(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{и} \quad xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Примером функции из пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ может служить функция Гаусса (Gaussian)

$$f(x) = e^{-x^2},$$

которя играет важную роль не только в преобразовании Фурье, но и в других областях математики и физики. На самом деле $e^{-ax^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ для всех $a > 0$.

2.2 Преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Преобразование Фурье $\mathcal{F}(f)$ для функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ это

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi x\xi}\, dx.$$

Будем обозначать $\mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(\xi)$. В следующем утверждении приведены свойства преобразования Фурье.

Лемма 7 *Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, тогда:*

1) $\mathcal{F}(f(x+h)) = \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i h \xi}$;

2) $\mathcal{F}(f(x)e^{-2\pi i x h}) = \hat{f}(\xi + h)$;

3) $\mathcal{F}(f(\delta x)) = \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$;

4) $\mathcal{F}(\frac{d}{dx}f(x)) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$;

5) $\mathcal{F}(-2\pi i x f(x)) = \frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$.

Обратите внимание, что умножению на $-2\pi i x$ соответствует производная $\frac{d}{d\xi}$, а производной $\frac{d}{dx}$ соответствует умножение на $2\pi i \xi$.

Доказательство.

Теорема 8 *Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, то $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. *Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, то $\sup|\hat{f}(\xi)| < \infty$, также верно, что*

$$\sup|\xi^k \hat{f}^{(l)}(\xi)| < \infty,$$

т. к.

$$\xi^k \hat{f}^{(l)}(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{(2\pi i)^k}\left(\frac{d}{dx}\right)^k ((-2\pi i x)^l f(x))\right).$$

2.2.1 Гауссова функция $e^{-\pi x^2}$

Мы уже знаем, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(\pi x)^2}\,d\sqrt{\pi}x = 1.$$

То есть

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1.$$

Важным свойством функции Гаусса заключается в том, что преобразование Фурье оставляет её на месте:

Теорема 9 *Если $f(x) = e^{-\pi x^2}$, то $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$.*

Доказательство.

Определим функцию

$$K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}.$$

Лемма 10 *Функция $K_\delta(x)$ обладает следующими свойствами:*

1) $\hat{K}_\delta(\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x)\,dx = 1$;

3) $\forall \eta > 0$ *имеем* $\lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_{|x|>\eta} K_\delta(x)\,dx = 0$.

Задачи к 2.2

В следующих задачах вычислите перобразование Фурье функции $f(x)$:

25.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

26.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x), & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

27.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

28.

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

2.3 Свёртка

Опеределим операцию свёртки

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Для свёртки выполнены следующие свойства:

Лемма 11 *Пусть* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *тогда*
1) $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$;
2) $f * g = g * f$;
3) $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$.

Лемма 12 *Пусть* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *тогда* $(f * K_\delta)(x) \to f(x)$ *равномерно по* x *при* $\delta \to 0$.

2.3.1 Функция Хевисайда

Функция

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Можно считать, что $H(0) = \frac{1}{2}$.

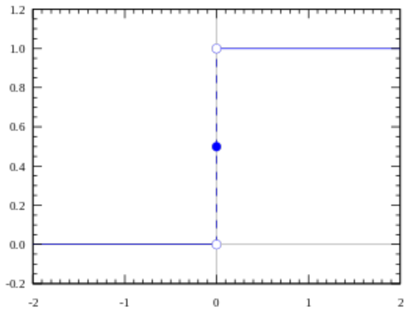


Рис. 2.1. Функция Хевисайда

Задачи к 2.3

В следующих задачах вычислите свертку

29. $H(x) * H(x)$

30. $H(x) * H(1+x)$

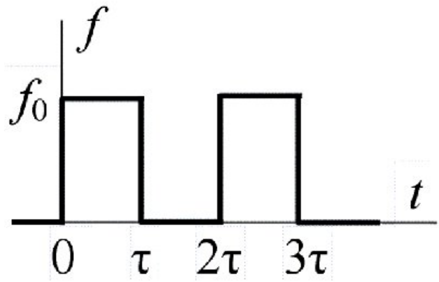
31. $H(1-x^2) * H(1-x^2)$

32. $e^{-|x|} * e^{-|x|}$

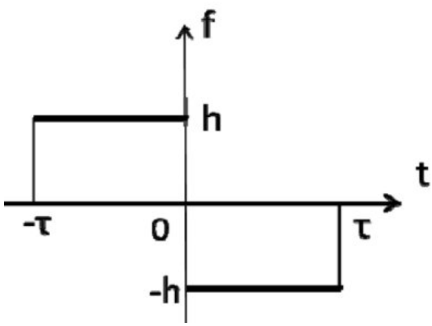
33. $e^{-ax^2} * (xe^{-ax^2})$, $a > 0$.

Найти преобразования Фурье, функций представленных графически

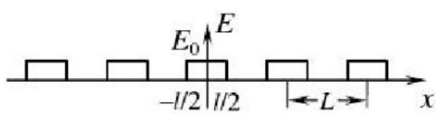
34. Два прямоугольных импульса



35. Два прямоугольных импульса



36. Пять прямоугольных импульса



2.4 Скалярное произведение и норма

Пусть $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ опеределим скалярное произведение и норму:

$$(f, g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx,$$

$$\|f\| = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следующая теорема является аналогом равенства Ляпунова для рядов Фурье.

Теорема 13 (равенство Парсеваля) *Пусть $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, тогда*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi,$$

и, в частности

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Глава 3

Преобразование Лапласа

3.1 Функции ограниченного роста (оригинал)

> Функция $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ называется функцией ограниченного роста, если существует вещественное число a такое, что интеграл
> $$\int\limits_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at}\, dt < \infty$$

Точная нижняя граница всех таких a называется показателем роста функции f и обозначается через $a(f)$.

Пример 14. *Проверить являются ли функции*

$$H(x), \quad e^x, \quad \sin x$$

функциями ограниченного роста. Найти показатель роста.

3.2 Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа функции $f(t)$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Функция, называемая ***изображением***, $F(p)$ определена в комплексной полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > a(f)$. В свою очередь, функция $f(t)$ называется ***оригинал***.

Пример 15. *Пусть* $f(t) = H(t)$, *тогда*

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} H(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = \frac{1}{p}.$$

То есть $F(p) = \frac{1}{p}$. △

Пример 16. *Пусть* $f(t) = t^n$, $t > 0$. *Вычислить преобразование Лапласа* $\{f(t)\}$.
Hint: сначала показать, что $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{p}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}$.

Обратное преобразование Лапласа задаётся формулой

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} F(s)\, ds.$$

Другими словами $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = f(t)$. Мы почти не будет пользоваться этой формулой, а вычислять обратное преобразование Лаплпса будем исходя из других соображений. Так $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{p}\} = 1$ находим из примера 16..

Если $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполняется свойство линейности:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Теорема 17 (подобия) *Если $f(t)$ — оригинал, то для любого $\alpha > 0$ выполняется равенство*

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\}(p) = \alpha^{-1}F(\alpha^{-1}p).$$

Теорема 18 (смещения) *Если $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = F(p)$, то*

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}f(t)\}(p) = F(p+\alpha)$$

Пример 19. *Используя теорему смещения 18 и пример 16. мы можем вычислить преобразование Лапласа функции $e^{\alpha t}$.*

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cdot 1\} = F(p-\alpha) = \frac{1}{p-\alpha}.$$

$\triangle$

Задачи к 3.2

37. Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и теоремой подобия, найти изображения следующих оригиналов

а) $f(t) = \cos\omega t$, в) $f(t) = \operatorname{ch}\omega t$,

б) $f(t) = \sin\omega t$, г) $f(t) = \operatorname{sh}\omega t$.

38. Вычислить преобразования Лапласа.

а) $f(t) = t^2 - 2$,

б) $f(t) = \cos^2 t$,

в) $f(t) = (\cos t + \sin t)^2$,

г) $f(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$.

➠

39. Вычислить преобразование Лапласа функции $f(t) = \sin 2t \cos 2t$.
➠

40. Вычислить преобразования Лапласа.

а) $f(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t \qquad (\alpha, \omega \in \mathbb{C})$,

б) $f(t) = e^{\alpha t} \sin \omega t \qquad (\alpha, \omega \in \mathbb{C})$,

в) $f(t) = t^n e^{\alpha t} \qquad (n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C})$.

➠

41. Найти преобразование Лапласа функции $f(t) = (1 + e^{2t})^2$. ➠

42. Найти оригинал $f(t)$, если его изображение $F(p)$ равняется

а) $F(p) = \frac{1}{p^2+9}$,

б) $F(p) = \frac{3}{p+2}$,

в) $F(p) = \frac{3p-2}{p^2+1}$,

г) $F(p) = \frac{2p+1}{p^2-4}$.

➠

43. Вычислить обратное преобразование Лапласа $F(p) = \ln \frac{p+2}{p-5}$.
➠

3.3 Преобразование Лапласа производных и интеграла

Теорема 20 (дифференцирование оригинала)
Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $t \geq 0$ и дифференцируема при $t > 0$, причём $f'(t)$ является оригиналом.

Тогда $f(t)$ — тоже оригинал и

$$\mathcal{L}\{f'\}(p) = pF(p) - f(0)$$

.

Применяя теорему о дифференцировании оригинала несколько раз получаем следующее следствие

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots f^{n-1}(0).$$

Теорема 21 (интегрирование оригинала)
Пусть функция $g(t)$ непрерывна при $t \geq 0$ и $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p)$. Тогда

$$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^t g(u)\,du\right\} = \frac{1}{p}G(p).$$

Пример 22. *Найти $f(t)$, если*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \frac{1}{p(p^2+\omega^2)}$$

.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{p(p^2+\omega^2)} = \frac{1}{p}\mathcal{L}\{\omega^{-1}\sin\omega t\},$$

тогда по теореме об интегрировании оригинала:

$$f(t) = \int\limits_0^t \omega^{-1} \sin \omega u \, du = \frac{\cos \omega t - 1}{\omega^2}.$$

△

3.4 Дифференцирование и интегрирование изображений

Теорема 23 (дифференцирование изображения) *Если функции $f(t)$, $tf(t)$ являются оригиналами и $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, то*

$$F'(p) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}.$$

Если применить эту теорему несколько раз, то получим следующую формулу

$$F^{(n)}(p) = \mathcal{L}\{(-1)^n t^n f(t)\}.$$

Теорема 24 *Если функции $f(t)$, $\frac{f(t)}{t}$ являются оригиналами и $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, то*

$$\int\limits_p^\infty F(q) \, dq = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

Доказательство. *Пусть $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, тогда по теореме о дифференцировании изображения имеем*

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{tg(t)\} = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{g(t)\},$$

следовательно $\mathcal{L}\{g(t)\} \int\limits_p^\infty F(q)\,dq.$

Задачи к 3.4

44. Используя теорему о дифференцировании изображения найти $F(p)$

а) $f(t) = t\cos\omega t$,

б) $f(t) = t\sin\omega t$,

в) $f(t) = t^2\cos t$.

45. Используя теорему об интегрировании изображения найти оригиналы $f(t)$

а) $F(p) = \frac{1}{(p-4)^2}$,

б) $F(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$,

в) $F(p) = \frac{P^2+1}{(p-1)^2}$.

Доказать Формулы

46. $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)\right\} = \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$.

47. $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)\right\} = \frac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2}$.

48. $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right\} = \ln\frac{p+b}{p+a}$.

49. $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin\omega t}{t}\right\} = \operatorname{arcctg}\frac{p}{\omega}$.

3.5 Решение дифференциальных уравнений

Задачи к 3.5

50. Используя преобразование Лапласа, решить следующие задачи:

а) $y'' - y = 1, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$

б) $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-t}, \qquad y(0) = y'(0) = 3;$

в) $y'' + 2y' - 3y = 10\,\mathrm{sh}\,2t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$

Ответы

1. $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$. **2.** $\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos((2k+1)x)}{2k+1}$. **3.** $2+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)}$. **4.** $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **5.** $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)x$. **6.** $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$. **7.** $\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx$. **8.** $f(-x)=f(x)$, $f(\pi-x)=-f(x)$. **9.** $f(-x)=-f(x)$, $f(\pi-x)=f(x)$. **10.** $-\frac{i}{\pi}\sum\frac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1}$. **11.**(а) $\frac{1}{2i}\sum\limits_{n\neq 0}a^{|n|e^{inx}}$, (б) $1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\cos nx$, (в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\cos nx$. **12.** $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$, указание: $\cos^2 nx=(1+\cos 2nx)/2$, далее использовать лемму Римана–Лебега 1. **13.** $(\pi-1)/2$. **14.** $-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\cos nx$. **15.** $\frac{2a}{a\pi}=\left(\frac{2a}{a\pi}\right)^2+\sum\limits_{k\neq 0}\left(\frac{\sin ka}{\pi k}\right)^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}=\frac{a(\pi-a)}{2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2}=(\pi^2-3\pi a+3a^2)/6$. **16.** 100π. **17.** $(2/3)\pi$. **18.** Указание: написать равенство Ляпунова для $f(x)$ и для $f'(x)$. **19.** Указание: см. предыдущую задачу. **20.** Указание: см. две предыдущие задачи. **21.** $\sin x$ **22.** $-(1/2)\cos x$. **23.**(а) 0, (б) $A\cos x+B\sin x$. **24.** $A_2\cos 2x+B_2\sin 2x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2(n^2-4)}$, указание: использовать тригонометрический ряд Фурье. **25.** $\hat{f}(\xi)=\frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi}$. **26.** $\hat{f}(\xi)=\frac{1-\cos 2\pi\xi}{\pi\xi i}$. **27.** $\hat{f}(\xi)=\frac{i}{2\pi^2}\frac{2\pi\xi\cos 2\pi\xi-\sin 2\pi\xi}{\xi^2}$. **28.** $\hat{f}(\xi)=\frac{i}{2\pi^2}\frac{2\pi\xi\sin 2\pi\xi+\cos 2\pi\xi-1}{\xi^2}$. **29.** $xH(x)$. **30.** $(x+1)H(x+1)$. **31.** $(2-|x|)H(2-|x|)$. **32.** $(1+|x|)e^{-|x|}$. **33.** $-0.25a^{-0.5}xe^{a0.5x^2}$. **34.** . **35.** . **36.** . **37.**(а) $\frac{p}{p^2+\omega^2}$, (б) $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, (в) $\frac{p}{p^2-\omega^2}$, (г) $\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$. **38.**(а) $\frac{2}{p^3}-\frac{2}{p}$, (б) $\frac{1}{2p}+\frac{p}{p^2+4}$, (в) $\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2+4}$, (г) $\frac{p}{p^2+1}$. **39.** $\frac{2}{p^2+16}$. **40.**(а) $\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$, (б) $\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$, (в) $\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$. **41.** $\frac{1}{p}+\frac{2}{p-2}+\frac{1}{s-4}$. **42.**(а) $\frac{\sin 3t}{3}$, (б) $3e^{-2t}$, (в) $3\cos t-2\sin t$, (г) $2\,\mathrm{ch}\,2t+0.5\,\mathrm{sh}\,2t$. **43.** $f(t)=\frac{e^{5t}-e^{-2t}}{t}$. **44.**(а) $\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$, (б) $\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$, (в) $\frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$. **45.**(а) , (б) , (в) . **46.** Указание: использовать задачу 44. **47.** Указание: использовать задачу 44. **48.** Указание: использовать теорему об интегрировании изображения. **49.** Указание: использовать теорему об интегрировании изображения. **50.**(а) , (б) , (в) .