МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра высшей математики

Н. А. Евсеев

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ

Учебно-методическое пособие

Последняя версия :
http://www.phys.nsu.ru/evseev/complex2017/pdf/cn.pdf.

Новосибирск
2015

Оглавление

Предисловие

Цель данного пособия — помочь студентам Китайско-российского института, специализирующимся по направлению «физика», освоить начальные понятия комплексного анализа, которые необходимы для успешного изучения последующих разделов этого курса.

В первой главе вводится понятие комплексного числа. Изучаются свойства комплексных чисел и рассматриваются основные алгебраические операции.

Вторая глава посвящена геометрической интерпретации комплексных чисел. Решение задач на комплексной плоскости сопровождается подробными иллюстрациями. Изучаются различные формы записи комплексных чисел.

Последовательности комплексных чисел рассматриваются в третьей главе.

В четвёртой главе изучаются числовые и степенные ряды. Отдельные пункты посвящены абсолютно сходящимся и степенным рядам.

В пятой главе вводится понятие функции комплексного переменного. Подробно рассматриваются комплексная экспонента, тригонометрические функции, логарифм и степенная функция.

В заключении каждой главы приводится список ключевых математических терминов с переводом на китайский язык. По каждой теме помещены задания для самостоятельного решения. Все задачи снабжены ответами, а в ряде случаев приводятся указания.

В конце пособия для упрощения усвоения материала находится китайско-русский словарь. В нём содержатся общие математические термины, а также некоторые слова и выражения, используемые в ходе занятий и часто встречающиеся в письменной речи. Подбор терминов для словаря осуществил В. А. Александров, перевод на китайский язык — Ван Цян (王强).

Теоретические сведения представлены в соответствии с работами [5, 7, 8]. Часть задач заимствована из [3, 4].

1. Комплексные числа

Системы чисел удобно рассматривать в тесной связи с решениями разного рода уравнений. Проследим эту связь, расширяя последовательно известные числовые множества и используя несложные уравнения для примеров.

Рассмотрим простейшие линейные уравнения, общий вид которых

$$x + a = b, \text{ где } a, b \in \mathbb{N},$$

например, $n + 1 = 2$, $d + 12 = 33$ и т.д. И напомним, что $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ — это множество *натуральных чисел*, т.е. чисел, используемых при счёте и нумерации. Очевидно, что при $a \leq b$ подобные уравнения будут иметь решения, причём $x \in \mathbb{N}$. Но известно, что для случая $b > a$ такие уравнения не имеют натуральных корней.

В этом случае решения таких уравнений (например, $k + 1 = 0$, $z + 7 = 2$ и т.д.) будут принадлежать уже множеству *целых чисел* $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$, которое включает в себя отрицательные числа.

Однако, в целых числах не удасться решить такие уравнения, как, например, $2r = 1$, $4r = -5$ и другие вида

$$ax = b, \text{ где } a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0.$$

Корни таких уравнений могут быть дробными и будут принадлежать множеству рациональных чисел. Напомним, что множество *рациональных чисел* $\mathbb{Q}$ — это числа вида $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, т.е. все числа, представимые в виде обыкновенной дроби.

Рациональные корни будут иметь также и квадратные уравнения вида

$$x^2 = b^2 \Leftrightarrow x^2 - b^2 = 0, \quad b \in \mathbb{Q}$$

Но такие элементарные квадратные уравнения, как

$$x^2 = 2, \quad x^2 = 3, \quad x^2 = 11 \text{ и подобные им,}$$

уже не будут разрешимы в рациональных числах, т.к. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11} \notin \mathbb{Q}$. Напомним, что такие числа, которые нельзя представить в виде обыкновенной дроби (при этом их можно представить в виде бесконечной непериодической дроби) называют *иррациональными*. Множество *действительных* (*вещественных*) *чисел* $\mathbb{R}$ является объединением множества рациональных и множества иррациональных чисел.

И всё же существуют такие уравнения, которые нельзя решить, ограничиваясь только действительными числами. Например, решая уравнение

$$x^2 + 1 = 0, \tag{1}$$

видим, что не существует ни одного действительного числа, удовлетворяющего данному уравнению (т.е. нет такого действительного числа, квадрат которого равен -1). Для решения такого рода уравнений требуется уже более широкая система чисел, а именно множество комплексных чисел. Для решения уравнения (1) ввели в рассмотрение символ $\sqrt{-1}$, аналогично, решая уравнение

$$x^2 + b^2 = 0 \tag{2}$$

можно записать формальное решение как $b\sqrt{-1}$. При решении более общего уравнения

$$(x - a)^2 + b^2 = 0 \tag{3}$$

получаем следующее выражение для его корней $a + b\sqrt{-1}$. Введя в обозначение символ $i = \sqrt{-1}$, имеем выражение $a + ib$. Таким образом, множеством *комплексных чисел* назвали множество всех чисел, представимых в виде $a + ib$. Множество комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$. Заметим, что комплексных чисел оказывается достаточно для решения любого квадратного уравнения с действительными коэффициентами.

Итак, имеем следующие включения

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Отметим также тот факт, что все действительные числа являются комплексными, т.е. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{C}$.

1.1. Арифметика комплексных чисел

Комплексное число — это число вида $z = x + iy$, где x и y — вещественные числа, i — мнимая единица, определяемая следующим образом:

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{или} \quad i^2 = -1. \tag{4}$$

Запись комплексного числа вида $z = x + iy$ называется ***алгебраической*** формой комплексного числа. Число x называется ***действительной частью*** комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Re} z$, число y называется ***мнимой частью*** z и обозначается $\operatorname{Im} z$. Так, для числа $z = 3 - 4i$ действительная часть $\operatorname{Re} z = 3$, а мнимая часть $\operatorname{Im} z = -4$. Если $z = 5$, то $\operatorname{Re} z = 5$ и $\operatorname{Im} z = 0$. И вообще, для любого действительного числа x $\operatorname{Re} x = x$ и $\operatorname{Im} x = 0$. Наконец, можно сказать, что любое комплексное число имеет вид

$$z = \operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z.$$

Число $x - iy$ называется сопряжённым к $x + iy$ (см. п. 1.5.).

Всюду далее предполагается, что z — это комплексное число, а x и y — вещественные (и по умолчанию $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$).

Отметим, что нулём на множестве комплексных чисел является число $z = 0 + i0 = 0$.

Два комплексных числа z_1 и z_2 ***равны*** ($z_1 = z_2$) тогда и только тогда, когда совпадают вещественные и мнимые части, т. е.

$$z_1 = z_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$$

Из определения равенства вытекает, что два числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ различны, т. е. $z_1 \neq z_2$, если выполнено хотя бы одно из неравенств: $x_1 \neq x_2$ или $y_1 \neq y_2$.

Заметим, что понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определены, т. е. выражения $3 + 4i > 3 + i$ и $i > 0$ и им подобные не имеют смысла.

1.2. Арифметические операции

Сумма комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется следующим образом:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

т. е. $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$ и $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$. Например,

$$(3 + 4i) + (5 + 6i) = 8 + 10i.$$

Аналогично определена ***разность***:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Противоположным к комплексному числу z называется такое число $-z$, что

$$z + (-z) = z - z = 0.$$

Произведение комплексных чисел z_1 и z_2 задаётся равенством

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i. \tag{5}$$

Произведение двух комплексных чисел находится при помощи выполнения обычных алгебраических операций и использования равенства $i^2 = -1$:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1y_2i + y_1ix_2 + y_1iy_2i =$$
$$x_1x_2 + x_1y_2i + y_1x_2i - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i.$$

Формула (5), вообще говоря, не требует запоминания. При умножении же комплексных чисел удобнее производить непосредственно вышеописанные действия.

Например,

$$(3 + 4i) \cdot (5 + 6i) = 3 \cdot 5 + 4i \cdot 5 + 3 \cdot 6i + 4i \cdot 6i =$$
$$15 + 20i + 18i - 24 = 15 - 24 + (20 + 18)i = -9 + 38i.$$

Отметим, что если в равенстве (5), определяющем умножение комплексных чисел, положить $y_1 = 0$, то получим правило умножения действительного числа на комплексное:

$$x_1(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2.$$

Нетрудно проверить, что законы, которым подчиняются определённые выше операции над комплексными числами, те же самые, что и законы действий над вещественными числами:

$$\begin{aligned} &z_1 + z_2 = z_2 + z_1 && \text{(коммутативность сложения)},\\ &(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) && \text{(ассоциативность сложения)}, \end{aligned}$$

то же самое относится к умножению:

$$\begin{aligned} &z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 && \text{(коммутативность умножения)},\\ &(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) && \text{(ассоциативность умножения)}, \end{aligned}$$

наконец, справедливо свойство, устанавливающее связь между этими двумя действиями:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \qquad \text{(дистрибутивность)}.$$

Пример 1. *Дано комплексное число $z_0 = a + ib$. Найти другое комплексное число, такое, чтобы произведение его на данное число было действительным числом. Сколько таких чисел можно подобрать?*

Решение. Допустим, $z = x + iy$ — число, удовлетворяющее указанному условию, т. е. $z_0 \cdot z$ является действительным числом. Имеем

$$z_0 \cdot z = (a + ib) \cdot (x + iy) = (ax - by) + (ay + bx)i.$$

По предположению $z_0 \cdot z$ — действительное число. Это означает, что мнимая часть числа $z_0 \cdot z$ равняется нулю, т. е.

$$\operatorname{Im}(z_0 \cdot z) = ay + bx = 0.$$

Таким образом, при умножении данного числа $z_0 = a+ib$ на другое комплексное число $z = x+iy$, для которого выполнено свойство $ay+bx = 0$, в результате получается действительное число. Такое число z можно записать в виде $z = t - \frac{b}{a}ti$, где $t \in \mathbb{R}$ — произвольный вещественный параметр. Итак, чисел, удовлетворяющих заданному условию, бесконечно много. △

> ***Частным*** от деления комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq 0$ называется такое комплексное число $w = \dfrac{z_1}{z_2}$, которое при умножении на z_2 даёт z_1.

Можно показать, что частное двух комплексных чисел вычисляется по правилу

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i. \tag{6}$$

Действительно,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\cdot(x_2 - iy_2)} =$$
$$\frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (y_1x_2 - x_1y_2)i}{(x_2^2 + y_2^2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

Здесь мы воспользовались тем свойством, что $(x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 + y^2$, а затем выделили действительную и мнимую части.

Далее выводим,

$$\operatorname{Re}\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \text{ и } \operatorname{Im}\frac{z_1}{z_2} = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Нет необходимости также запоминать и формулу (6). Чтобы разделить одно комплексное число на другое, достаточно числитель и знаменатель полученной дроби умножить на сопряжённое число к знаменателю, что позволит выделить действительную и мнимую части. Например,

$$\frac{3+4i}{5+6i} = \frac{(3+4i)\cdot(5-6i)}{(5+6i)\cdot(5-6i)} = \frac{39+2i}{25+36} = \frac{39}{61} + \frac{2}{61}i.$$

Для любого комплексного числа $z \neq 0$ существует ***обратное число*** z^{-1} такое, что $z \cdot z^{-1} = 1$.

Отметим, что если $z = x + iy \neq 0$, то

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Например,

$$(1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Также стоит упомянуть очевидное свойство

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}.$$

1.2.1. Возведение в степень

Произведение n равных комплексных чисел z называется n-й ***степенью*** числа z и обозначается символом z^n:

$$z^n = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ раз}}.$$

Например,

$$(3+4i)^3 = (3+4i) \cdot (3+4i) \cdot (3+4i) = -117 + 44i.$$

Возведение комплексного числа $z \neq 0$ в отрицательную степень определяется как

$$z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

Например,

$$(3+4i)^{-3} = \frac{1}{(3+4i)^3} = \frac{1}{-117+44i} = -\frac{117}{117^2+44^2} - i\frac{44}{117^2+44^2}.$$

Полезно помнить следующие свойства возведения в степень:

$$z^{n \cdot m} = (z^n)^m, \quad z^{n+m} = z^n \cdot z^m.$$

1.2.2. Извлечение корня

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w, такое, что

$$w^n = z.$$

Стандартное обозначение: $w = \sqrt[n]{z}$ или $w = z^{\frac{1}{n}}$.

Пусть известно число z и требуется найти число $\sqrt[n]{z} = w$. Представим w в виде $w = x + iy$, тогда $z = (x+iy)^n$. Следовательно, w можно определить из системы уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x+iy)^n; \\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(x+iy)^n. \end{cases} \tag{7}$$

Рассмотрим частный случай, $n = 2$, т. е. извлечение квадратного корня. Пусть требуется найти $\sqrt{z} = x + iy$. По определению корня квадратного корня имеем $z = (x+iy)^2$. Обозначим $z = a + ib$ (т. е. $\operatorname{Re} z = a$ и $\operatorname{Im} z = b$). Тогда система (7) эквивалентна системе

$$\begin{cases} a = \operatorname{Re}(x+iy)^2; \\ b = \operatorname{Im}(x+iy)^2. \end{cases} \tag{8}$$

Далее $(x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, поэтому система (8) принимает вид

$$\begin{cases} a = x^2 - y^2; \\ b = 2xy. \end{cases} \tag{9}$$

Отметим, что в системе (9) параметры $a, b \in \mathbb{R}$ и неизвестные $x, y \in \mathbb{R}$. Рассмотрим три отдельных случая.

1. Если $a = b = 0$, то $x = y = 0$. Другими словами, $\sqrt{0} = 0$.

2. Если $b = 0$ и $a \neq 0$, тогда $z = a$ (т. е. $z \in \mathbb{R}$). Если $a > 0$, то решениями являются

$$x = -\sqrt{a}, y = 0 \text{ и } x = \sqrt{a}, y = 0.$$

Если $a < 0$, то решениями являются

$$x = 0, y = -\sqrt{-a} \text{ и } x = 0, y = \sqrt{-a}.$$

3. Если $b \neq 0$, то из второго уравнения системы (9) имеем $x = \frac{b}{2y}$. Тогда первое уравнение системы (9) можно переписать как

$$a = \frac{b^2}{4y^2} - y^2,$$

или

$$4y^4 + 4ay^2 - b^2 = 0. \tag{10}$$

Решая биквадратное уравнение (10), находим

$$y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \quad \text{или} \quad y = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

В этом случае решениями системы (9) являются

$$x = \pm\frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

В итоге

$\sqrt{z} = 0, \quad$ если $z = 0$;

$\sqrt{z} = \pm\sqrt{a}, \quad$ если $z = a$ и $a > 0$;

$\sqrt{z} = \pm i\sqrt{a}, \quad$ если $z = a$ и $a < 0$;

$$\sqrt{z} = \pm\frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}} \pm i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \quad \text{если } z = a + ib \text{ и } b \neq 0.$$

Следует обратить внимание, что если $z \neq 0$, то существуют два различных значения квадратного корня $\sqrt{z}$. В общем случае, если $z \neq 0$, то существуют n различных значений корня n-й степени $\sqrt[n]{z}$.

Пример 2. *Вычислить* $\sqrt{1+i}$.

Решение. Пусть $\sqrt{1+i} = x + iy$, тогда $(x+iy)^2 = 1 + i$. Приравнивая мнимые и действительные части, имеем

$$\begin{cases} 1 = x^2 - y^2; \\ 1 = 2xy. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x = \frac{1}{2y}$, и первое уравнение можно переписать как

$$4y^4 + 4y^2 - 1 = 0.$$

Находим $y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ и $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}$. В итоге значениями квадратного корня $\sqrt{1+i}$ будут

$$\frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

(см. также пример 21. на с. 39). △

Определение степенной функции вводится в п. 5.4.

1.3. Формулы сокращённого умножения

Пусть $a, b \in \mathbb{C}$ — два комплексных числа. Как и в случае действительных чисел, справедливы следующие формулы:

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b),$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3. \tag{11}$$

В общем случае для любого натурального n имеем[1]

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \tag{12}$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Справедливость приведённых формул можно доказать, пользуясь правилами действий над комплексными числами.

[1] Часто формулу (12) называют биномом Ньютона.

1.4. Модуль комплексного числа

Модуль числа $z = x + iy$ определяется как

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{13}$$

и имеет тот же геометрический смысл, что и модуль вещественного числа — расстояние до нуля. В частности, для действительного числа x имеем $|x| = \sqrt{x^2}$.

Для модуля комплексного числа выполняются следующие свойства:

$$\begin{aligned}
&|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0;\\
&|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad |z^n| = |z|^n;\\
&\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{при } z_2 \neq 0;\\
&|\operatorname{Re} z| \leqslant |z| \text{ и } |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|, \qquad (|x| \leqslant |z| \text{ и } |y| \leqslant |z|);\\
&|z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|, \qquad (|z| \leqslant |x| + |y|);\\
&|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \qquad \text{(неравенство треугольника)};\\
&||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|.
\end{aligned} \tag{14}$$

Пример 3. *Найти модули комплексных чисел:*

$$z_1 = 2 - \sqrt{3}i, \quad z_2 = 3 + 4i.$$

Решение. По формуле (13) находим

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}.$$

и

$$|z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

△

1.5. Сопряжение

> Комплексные числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, т. е. числа, которые отличаются только знаком мнимой части, называются ***сопряжёнными***.

При этом справедливы следующие свойства:

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};$$
$$\bar{\bar{z}} = z;$$
$$z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2\,, \quad (z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2);$$
$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}};$$
$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z \quad \text{и} \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z;$$

Также отметим, что сопряжённые числа имеют одинаковый модуль

$$|\bar{z}| = |z|.$$

Остановимся подробней на произведении сопрёженных чисел. Имеем

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2. \tag{15}$$

Из определения модуля числа z (13), выражение (15) можно переписать в виде

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2. \tag{16}$$

Из формулы (16) очевидно, что произведение сопряжённых чисел всегда является действительным неотрицательным числом. В самом деле, из определения модуля $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 \geqslant 0$. Отметим также из (16) полезное равенство

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}.$$

Ещё одно свойство операции сопряжения состоит в том, что

$$z = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} z = 0,$$

т. е. сопряженное $\bar{z}$ число равно исходному z тогда и только тогда, когда это число является действительным ($z \in \mathbb{R}$). Также, из равенств

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z \quad \text{и} \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z,$$

полезно отметить, что

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Таким образом, сумма двух сопряжённых чисел есть всегда число действительное, а разность сопряжённых чисел, в свою очередь, всегда является чисто мнимым числом [2].

Пример 4. *Показать, что для любых* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *выполнено равенство*

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \tag{17}$$

Решение. Используя выражение (16), имеем

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1 + z_2}) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_2,$$
$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2) \cdot (\overline{z_1 - z_2}) = z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_2.$$

Откуда получаем

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Замечание. Выражение (17) называется ***равенством параллелограмма***. △

Отметим также, что деление комплексных чисел удобно выполнять следующим образом:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Пример 5. *Известно, что z не является действительным числом* (*т. е.* $\operatorname{Im} z \neq 0$) *и* $|z| = 1$. *Показать, что* $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ *является чисто мнимым числом* (*т. е.* $\operatorname{Re} w = 0$).

[2] Чисто мнимое число — это комплексное число вида $z = 0 + iy$.

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда

$$w = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x+iy-1)\cdot(x-iy+1)}{(x+iy+1)\cdot(x-iy+1)} = \frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2}.$$

Поскольку $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$, то

$$w = \frac{2iy}{(x+1)^2+y^2}.$$

Таким образом, число w имеет вид αi, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\alpha \neq 0$, следовательно, w — чисто мнимое число. $\triangle$

Пример 6. *Вычислить* $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^6$.

Решение. Имеем

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6 = \left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^6 = \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^6 = (i)^6 = \left((i)^2\right)^3 = -1.$$

$\triangle$

Пример 7. *Решить уравнение с модулями для комплексных чисел:* $|z+2i| = |z-2|$.

Решение. Возведём обе части равенства в квадрат:

$$|z+2i|^2 = |z-2|^2.$$

В силу свойства сопряжения ($|z|^2 = z\cdot\overline{z}$ (16)) это равенство примет вид

$$(z+2i)\overline{(z+2i)} = (z-2)\overline{(z-2)}.$$

Далее

$$(z+2i)(\overline{z}-2i) = (z-2)(\overline{z}-2),$$

$$z\overline{z} - 2iz + 2i\overline{z} + 4 = z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 4,$$

$$-iz + i\overline{z} = -z - \overline{z},$$

$$i(z - \overline{z}) = z + \overline{z}.$$

Теперь, записав в виде $z = x + iy$, получим

$$i(x + iy - (x - iy)) = x + iy + x - iy,$$

$$i(2iy) = 2x.$$

Таким образом, ответ $y = -x$, т. е. решениями уравнения являются все комплексные числа z, для которых $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z$.

Тождество для двух квадратов[3]

Из равенства $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ вытекает одно замечательное следствие. Пусть z_1 и z_2 — два комплексных числа. Имеем

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = z_1 \overline{z}_1 \cdot z_2 \overline{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2,$$

следовательно,

$$|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2. \tag{18}$$

Пусть $z_1 = a + ib$ и $z_2 = c + id$, тогда

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + cb)i,$$

и равенство (18), принимает вид

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + cb)^2. \tag{19}$$

Таким образом мы получили ***тождество для двух квадратов***[4], которое можно прочитать как: *произведение суммы квадратов на сумму квадратов есть сумма двух квадратов*. Например,

$$(1^2 + 2^2)(3^2 + 5^2) = 7^2 + 11^2.$$

[3] см [10].

[4] Это равенство также известно под названием тождество Брахмагупты.

Задачи к главе 1

1. Выполнить действия:

$$\text{а) } (1-i)^2; \quad \text{б) } (1+i)^3; \quad \text{в) } \frac{1}{i}.$$

2. Найти частное от деления чисел $z_1 = i$ на $z_2 = 1 + i$.

3. Найти значение выражения $\dfrac{z_1(z_2+z_3)}{z_2}$, где $z_1 = 4+5i$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = 7 - 9i$.

4. Вычислить:

$$\text{а) } i^3; \quad \text{б) } i^6; \quad \text{в) } i^{100}; \quad \text{г) } i^{2015}.$$

5. Вычислить:

$$\text{а) } (1+i)^2; \quad \text{б) } (1-i)^3; \quad \text{в) } (1+i)^4; \quad \text{г) } (1-i)^5.$$

6. Вычислить $z = \dfrac{(-1+5i)^2(3-4i)}{1+3i} + \dfrac{10+7i}{5i}$.

7. Пусть $z_1 = -3 + 5i$ и $z_2 = 4 - 6i$, найти

$$\text{а) } z_1 + z_2; \quad \text{б) } z_1 - z_2; \quad \text{в) } z_1 \cdot z_2; \quad \text{г) } \frac{z_1}{z_2}; \quad \text{д) } z_1^2.$$

8. Вычислить $z = \left(\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^2$.

9. Вычислить $i^{17} - i^{26} + \dfrac{1}{i^{25}}$.

10. Вычислить $(1-i)^3 - (1+i)^3$.

11. Вычислить $(1+i)^4 + (1-i)^4$.

12. Вычислить $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}$.

13. Найти все числа $z \in \mathbb{C}$, такие, что $z \cdot (5 - 3i) \in \mathbb{R}$.

14. Пусть $z = x + iy$. Найти $\operatorname{Re} z^2$ и $\operatorname{Im} z^2$.

15. Пусть $z \in \mathbb{C}$ такое, что $\operatorname{Im} z \neq 0$ и $|z| = 1$. Показать, что для $w = \dfrac{z+1}{z-1}$ выполнено условие $\operatorname{Re} w = 0$.

16. Вычислить $\dfrac{(1+i)^{17}}{(1-i)^{16}}$.

17. Какое число нужно возвести в квадрат, чтобы получить $2i$?

18. Вычислить $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$.

19. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Вычислить $\overline{z^2} - (\overline{z})^2$.

20. Найти все такие комплексные числа z, что $\bar{z} = -z$.

21. Найти модуль числа $z = (10 + 5i)(1 + 10i)(4 + 2i)(5 + 2i)$

22. Верно ли неравенство $|i - 1| > |1|$?

23. Пусть $a \in \mathbb{C}$, найти максимальное значение $|z^n + a|$ для таких z, что $|z| \leq 1$.

24. Найти $\operatorname{Im} z$, если известно, что $|z| = |z - 3i|$.

25. Известно, что комплексное число z является корнем уравнения $x^2 + x + 1 = 0$. Найти $z^4 + \frac{1}{z^4}$.

26. Найти решение уравнения

$$\frac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}} = -z^2.$$

27. Найти корни уравнения $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

28. Найти наименьшее натуральное число n, для которого $(-\sqrt{2} + i\sqrt{6})^n$ является целым числом.

Термины к главе 1

абсолю́тная величина́ компле́ксного числа́	$\lvert z\rvert = \sqrt{x^2+y^2}$	复数的绝对值
веще́ственная часть компле́ксного числа́	$\operatorname{Re} z = x$	复数的实数部分
компле́ксное число́	$z = x + iy$	复数
компле́ксное сопряже́ние	$\overline{z} = x - iy$	复数共轭
ко́рень квадра́тный из компле́ксного числа́	$\sqrt{z}$	复数的平方根
ко́рень n-ой сте́пени из компле́ксного числа́	$\sqrt[n]{z}$	复 数 的n次 幂 根（n次根）
мни́мая едини́ца	i	虚数单位
мни́мая часть компле́ксного числа́	$\operatorname{Im} z = y$	复数的虚数部分
мо́дуль компле́ксного числа́	$\lvert z\rvert$	复数的模数
нера́венство треуго́льника	$\lvert z_1+z_2\rvert \leqslant \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$	三角形的不等式
сопряжённое компле́ксное число́	$\overline{z}$	共轭复数
сте́пень компле́ксного числа́	z^n	复数的幂

2. Геометрия комплексных чисел

В первой главе комплексные числа изучались с алгебраической точки зрения. Мы рассмотрели основные алгебраические операции и свойства комплексных чисел.

Но комплексные числа имеют и геометрическую интерпретацию как точки на плоскости или двумерные векторы. Действительно, каждое комплексное число z определяется парой вещественных чисел (x, y): $z = x + iy$.

2.1. Комплексная плоскость

Рассмотрим плоскость и прямоугольную систему координат на ней. Ось абсцисс (ось Ox) обозначим $\operatorname{Re} z$, а ось ординат (ось Oy) обозначим $\operatorname{Im} z$ (см. рис 1). Каждому комплексному числу $z = x + iy$ сопоставим точку на этой плоскости с координатами (x, y), и, другими словами, радиус-вектор с координатами (x, y).

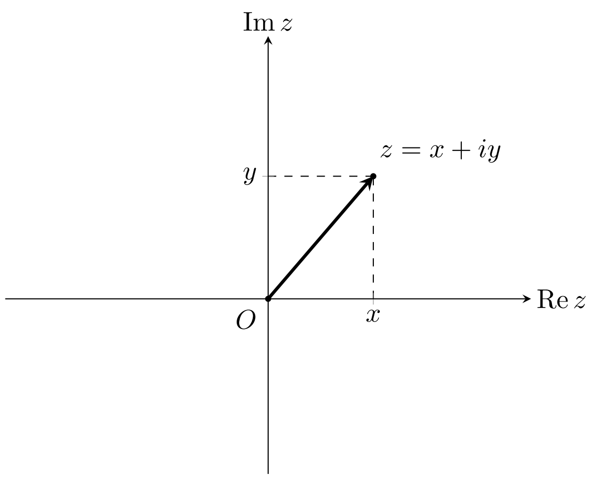


Рис. 1. Комплексная плоскость z

Заметим, что каждому комплексному числу соответствует только одна точка плоскости, и, наоборот, каждой точке на плоскости соответствует только одно комплексное число.

Длина вектора с координатами (x, y) равна $\sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом, модуль комплексного числа $z = x + iy$ равен длине вектора, который соответствует данному числу на комплексной плоскости (см. равенство (13)). Часто модуль обозначают $|z| = \rho$. Несложно проверить, что расстояние между двумя точками комплексной плоскости z_1 и z_2 равно $|z_1 - z_2|$. Таким образом, модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками на комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.

> ***Аргументом*** комплексного числа $z = x+iy$ называется угол φ между вектором (x, y) и положительным направлением действительной оси $\operatorname{Re} z$ измеряемый против хода часовой стрелки (рис. 2).

Аргумент числа z обозначается $\operatorname{Arg} z$.

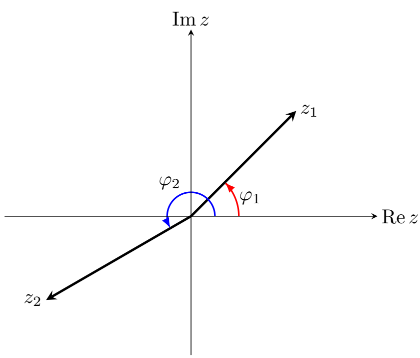


Рис. 2. Аргумент комплексного числа: $\operatorname{Arg} z_1 = \varphi_1$, $\operatorname{Arg} z_2 = \varphi_2$

Строго говоря, аргумент комплексного числа определен не однозначно, в общем виде аргумент можно записать как

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z},$$

где $0 \leqslant \arg z < 2\pi$ — ***главное значение*** аргумента. В свою очередь, главное значение аргумента комплексного числа определено однозначно (и принимает значения в промежутке $[0, 2\pi)$).

Единственное комплексное число, для которого значение аргумента не определяют, это $z = 0$. Впрочем, это также единственное число, у которого модуль равен нулю, поэтому неопределённость аргумента в данном случае не является проблемой. Также можно отметить: для действительных чисел ($\operatorname{Im} z = 0$) $\arg z = 0$, если число положительное, и $\arg z = \pi$, если число отрицательное.

Геометрически сложение чисел z_1 и z_2 производится по правилу сложения векторов (по правилу параллелограмма). Разность $z_1 - z_2$ представляется вектором, конец которого находится в точке z_1, а начало — в точке z_2 (см. рис. 3).

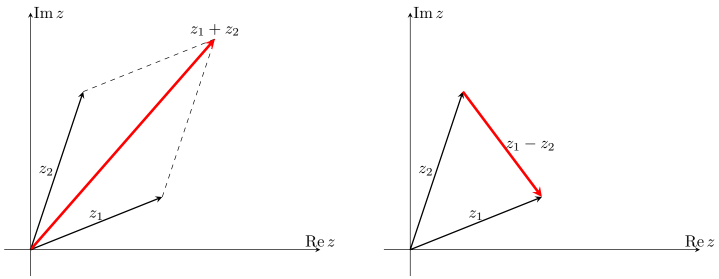


Рис. 3. Геометрическое представление суммы и разности

Геометрический смысл умножения на мнимую единицу i состоит в повороте на угол $\pi/2$ (или $90°$). Действительно, пусть $z = x + iy$, тогда $i \cdot z = -y + ix$. Преобразование $(x, y) \mapsto (-y, x)$ — это поворот вектора (x, y) на $\pi/2$ против часовой стрелки.

Умножение комплексного числа $z = x + iy$ на комплексную экспоненту $e^{i\theta}$ соответствует повороту на угол θ против часовой стрелки (см. подробней пункты 2.2.1. и 2.3.1.).

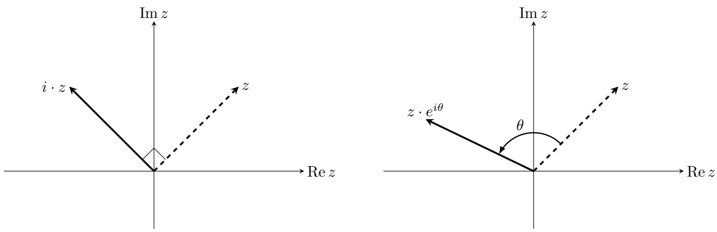


Рис. 4. Геометрический смысл умножения на i и на $e^{i\theta}$

Геометрический смысл операции сопряжения $z \mapsto \overline{z}$ состоит в отражении относительно оси Ox.

Пример 8. *Исходя из геометрических рассуждений, доказать неравенство*

$$\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| \leqslant \arg z.$$

Решение. Число $\frac{z}{|z|}$ находится на единичной окружности.

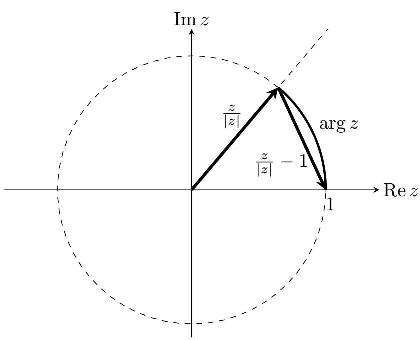


Рис. 5. Длина дуги больше длины отрезка.

Построим на комплексной плоскости вектор, соответствующий разности $\frac{z}{|z|} - 1$ (рис. 5).

Длина дуги единичной окружности, соединяющей точки 1 и $\frac{z}{|z|}$, равна $\arg z$ и не может быть меньше длины отрезка соединяющего эти точки. △

Пример 9. *Зафиксируем* $z_0 \in \mathbb{C}$ *и* $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. *Изобразить на комплексной плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам* z, *которые удовлетворяют условиям:*

$$1)\ |z - z_0| = r, \quad 2)\ |z - z_0| \leqslant r.$$

Решение. 1) Пусть $z = x + iy$ и $z_0 = x_0 + iy_0$. Распишем модуль комплексного числа $|z - z_0|$ по определению:

$$|z - z_0| = |x + iy - (x_0 + iy_0)| = \\ |x - x_0 + i(y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Тогда равенство $|z - z_0| = r$ равносильно

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \quad \text{или} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

В свою очередь, уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ задаёт окружность с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом r.

2) Рассуждая аналогичным образом, приходим к выводу, что неравенство $|z - z_0| \leqslant r$ равносильно неравенству $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r^2$, которое задаёт круг.

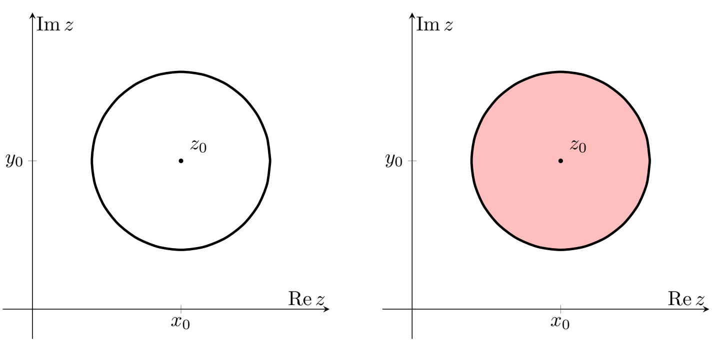


Рис. 6. Окружность и круг с центром в точке z_0.

Таким образом уравнения $|z - z_0| = r$ и $|z - z_0| \leqslant r$ определяют на комплексной плоскости окружность и круг с центром в точке z_0 и радиусом r (рис. 6).

$\triangle$

Пример 10. *Выяснить геометрический смысл указанных соотношений:*

$$\text{а) } |z| = \operatorname{Re} z + 1, \qquad \text{б) } |z| = \operatorname{Im} z + 1.$$

Решение. а) Пусть $z = x + iy$, тогда первое соотношение можно переписать как

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1. \tag{20}$$

Отметим, что модуль комплексного числа $|z|$ всегда больше или равен нулю. Поэтому $x \geqslant -1$ (или $\operatorname{Re} z \geqslant -1$).

Возведём обе части уравнения (20) в квадрат и приведём подобные:

$$y^2 = 2x + 1. \tag{21}$$

Уравнение (21) задаёт параболу с вершиной в точке $(-\frac{1}{2}, 0)$.

б) Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что второе соотношение эквивалентно уравнению

$$x^2 = 2y + 1,$$

которое задаёт параболу с вершиной в точке $(0, -\frac{1}{2})$ (см. рис. 7).

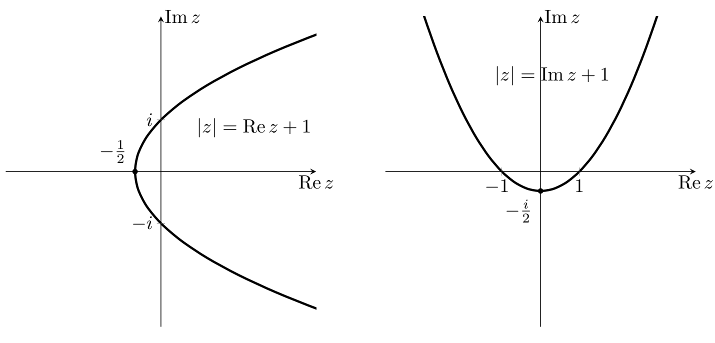


Рис. 7. Параболы

$\triangle$

Пример 11. *Изобразить множество точек на комплексной плоскости, соответствующих числам, которые удовлетворяют условию*

$$|z-1| + |z+1| = 3. \tag{22}$$

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда (22) равносильно

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 3.$$

Перенесём второе слагаемое вправо и возведём обе части равенства в квадрат:

$$(x-1)^2 + y^2 = 9 - 6\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + (x+1)^2 + y^2,$$

или, сокращая,

$$6\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 9 + 4x. \tag{23}$$

Возведём обе части равенства (23) в квадрат:

$$36(x^2 + 2x + 1 + y^2) = 81 + 2 \cdot 36x + 16x^2,$$

и далее

$$20x^2 + 36y^2 = 45. \tag{24}$$

Перепишем уравнение (24) в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } a^2 = \frac{9}{4},\ b^2 = \frac{5}{4}.$$

Таким образом, исходное уравнение (22) равносильно каноническому уравнению эллипса (рис. 8).

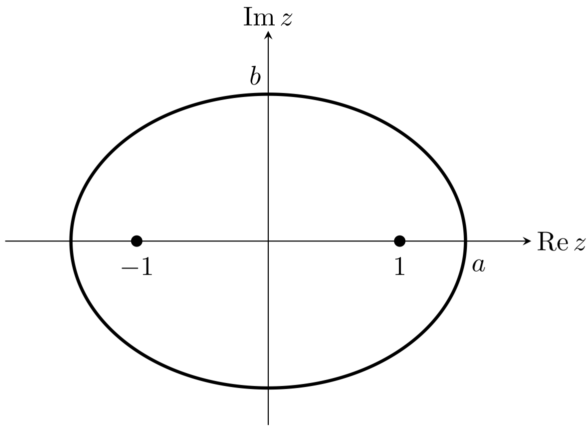


Рис. 8. Эллипс (большая полуось $a = \frac{3}{2}$, малая полуось $b = \frac{\sqrt{5}}{2}$)

Замечание. Вообще говоря, с самого начала можно было заметить, что уравнение (22) задаёт множество точек z, для которых сумма расстояний до двух данных (-1 и 1) постоянна (и равна 3). Другими словами, это уравнение эллипса с фокусами в точках -1 и 1.

$\triangle$

Пример 12. *Найти множество точек z на комплексной плоскости, для которых выполняется условие*

$$|z - i| = |z - 1|. \tag{25}$$

Решение. Заметим, что $|z-i|$ — это расстояние от z до i, а $|z-1|$ — расстояние от z до 1. Таким образом, множество точек z, удовлетворяющих (25), является множеством точек, равноудалённых от двух данных (от i и от 1). Это множество представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему данные точки (рис. 9).

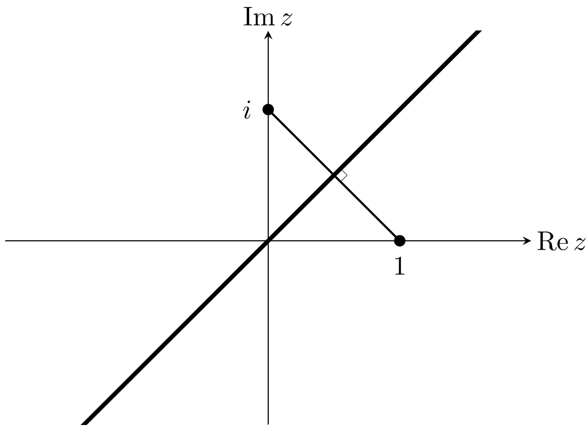


Рис. 9. Серединный перпендикуляр к отрезку $[1, i]$

△

Пример 13. *Для всех комплексных чисел* z *и* w*, удовлетворяющих соотношениям* $|z| = 12$ *и* $|w - 3 - 4i| = 5$*, найти минимум и максимум модуля разности* $|z - w|$.

Решение. Заметим, что все числа z, удовлетворяющие соотношению $|z| = 12$, образуют окружность с центром в нуле и радиусом 12. Соотношение $|w - 3 - 4i| = 5$ задаёт окружность с центром в точке $3 + 4i$ и радиусом 5. В свою очередь, величина $|z - w|$ есть расстояние между точками z и w. Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти минимальное и максимальное расстояние между точками z и w, лежащими на соответствующих окружностях. Построим эти окружности.

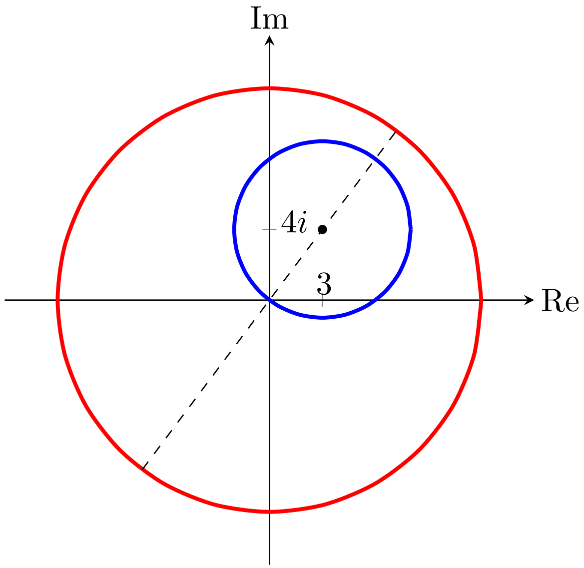


Рис. 10. Окружности $|z| = 12$ и $|w - 3 - 4i| = 5$

Из рис. 10 очевидно , что 12 — максимальное расстояние, а 2 — минимальное[5].

2.2. Тригонометрическая форма записи

Пусть $z = x + iy$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$, тогда

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{26}$$

Обозначим $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Из (26) выводим

$$\operatorname{Re} z = x = \rho\cos\varphi \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} z = y = \rho\sin\varphi. \tag{27}$$

[5]Кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися окружностями радиусов R и r равно $d - (R + r)$, если одна окружность лежит вне другой, и $R - (d + r)$, если одна – внутри другой (d — расстояние между центрами).

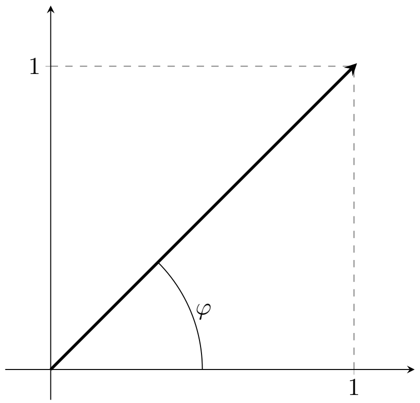
В итоге из (27) имеем

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

> Запись комплексного числа вида $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\rho = |z|$, а $\varphi = \operatorname{Arg} z$, называется ***тригонометрической***.

Пример 14. *Записать число $z = 1 + i$ в тригонометрической форме.*

Решение. Данное число z на комплексной плоскости является вектором с координатами $(1, 1)$.



Вектор направлен по диагонали единичного квадрата, и поэтому угол $\varphi = \pi/4$. Длина вектора (модуль z) $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.
Таким образом,

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

△

2.2.1. Произведение в тригонометрической форме

Пусть $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, а $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ — два комплексных числа (в тригонометрической записи), тогда несложно проверить, что их произведение можно вычислить следующим образом: [6]

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{28}$$

[6] Используя формулы $\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ и $\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Другими словами, модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения.

В свою очередь, деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, имеет вид

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Таким образом, модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.

Пример 15. *Найти произведение и частное комплексных чисел:*

$$z_1 = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right), z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Решение. По формуле умножения комплексных чисел в тригонометрической форме получаем

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) =$$
$$6 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\sqrt{2} + i3\sqrt{2}.$$

По формуле деления получаем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) =$$
$$\frac{3}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = 3\sqrt{2} + i3\sqrt{2}.$$

△

Формула (28) для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена. В частности,

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),$$

$$z^{-1} = \rho^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

И для любого целого числа k верно

$$z^k = \rho^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi). \tag{29}$$

Другими словами, формула (29) задаёт способ возведения комплексного числа в степень.

Пример 16. *Вычислить*

$$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}.$$

Решение. Представим число $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометрической форме. Получим

$$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Далее по формуле (29) вычисляем:

$$\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^{10} = \left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

△

При $\rho = 1$ из выражения (29) выводится ***формула Муавра***[7]:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi. \tag{30}$$

Эту формулу можно использовать для нахождения синусов и косинусов кратных углов.

[7] Часто формулой Муавра называют выражение (29).

Пример 17. *Вывести формулы для* $\sin 3\varphi$ *и* $\cos 3\varphi$.

Решение. Запишем выражение (30) в частном случае ($k = 3$):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Используя формулу (11), распишем левую часть:

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 &= \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi \\ &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi) = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, имеем

$$\begin{aligned}\sin 3\varphi &= 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi, \\ \cos 3\varphi &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi.\end{aligned}$$

△

Пример 18. *Вычислить* $(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi + 1)^n$.

Решение. Воспользуемся следующими тригонометрическими формулами:

$$1 + \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi \quad \text{и} \quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi.$$

Тогда имеем

$$\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi + 1 = 2\cos^2\varphi + 2i\sin\varphi\cdot\cos\varphi = \\ 2\cos\varphi(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Далее с помощь формулы Муавра (30) возводим в степень n:

$$(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi + 1)^n = 2^n \cdot \cos^n\varphi \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

△

Пример 19. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ *и известно, что* $z^{2n} \neq -1$. *Проверить, что* $\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$ *является действительным числом* (*т. е.* $\operatorname{Im} \frac{z^n}{1+z^{2n}} = 0$).

Решение. Поскольку $|z| = 1$, то

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

а по формуле (30)

$$z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \quad \text{и} \quad z^{2n} = \cos 2n\varphi + i\sin 2n\varphi.$$

Далее, используя формулы

$$1 + \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi \quad \text{и} \quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi,$$

имеем

$$1 + z^{2n} = 1 + \cos 2n\varphi + i\sin 2n\varphi =$$
$$2\cos^2 n\varphi + i2\sin n\varphi\cos n\varphi = 2\cos n\varphi(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Тогда

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}} = \frac{\cos n\varphi + i\sin n\varphi}{2\cos n\varphi(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)} = \frac{1}{2\cos n\varphi}.$$

△

Пример 20. *Вычислить* $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2013}$.

Решение. Представим число $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в тригонометрической форме:

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi.$$

Применяя формулу возведения в степень, получим

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2013} = \cos\left(2013 \cdot \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(2013 \cdot \frac{2}{3}\pi\right) =$$
$$\cos 1342\pi + i\sin 1342\pi = 1.$$

△

2.2.2. Извлечение корней из комплексных чисел

Тригонометрическая запись комплексных чисел оказывается удобной и для извлечения корней n-й степени.

Напомним, что корень n-й степени $z^{\frac{1}{n}}$ (или $\sqrt[n]{z}$) — это комплексное число w, для которого выполнено условие $w^n = z$, т. е. при возведении этого числа в степень n мы получим z.

> Если $z \neq 0$, то существует n различных корней n-й степени из числа z:
>
> $$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}), \qquad (31)$$
>
> где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и $\varphi = \arg z$.

При этом числа w_k имеют одинаковый модуль (равный $\sqrt[n]{|z|}$) и расположены в вершинах правильного n-угольника (для случаая $\sqrt[8]{1}$ см рис. 11). Ести $n = 2$, то значения корня лежат на диаметре окружности с центром в нуле.

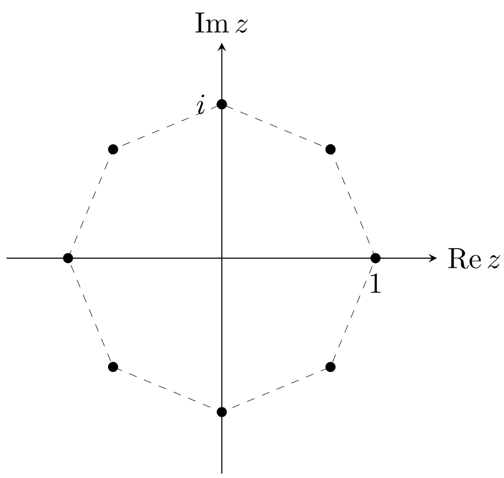


Рис. 11. Все значения $\sqrt[8]{1}$

Заметим, что в формуле (31) $\sqrt[n]{|z|}$ — это арифметический корень из положительного числа, а значит, определён однозначно.

Особенность извлечения корня из комплексного числа заключается в следующем. Если мы будем рассматривать $\sqrt[n]{z}$ как функцию от z:

$$f(z) = \sqrt[n]{|z|},$$

то в каждой точке (за исключением нуля) $f(z)$ будет принимать ровно n различных значений. Таким образом, $\sqrt[n]{z}$ является примером многозначной функции.

Пример 21. *Вычислить $\sqrt{1+i}$ и изобразить на комплексной плоскости.*

Решение. Сначала нужно представить число $1+i$ в тригонометрической форме. Мы это уже сделали в примере 14.:

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),$$

где $\rho = |z| = \sqrt{2}$ и $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

Поскольку $n = 2$, то в соответствии с формулой (31) имеем два корня:

$$w_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}),$$
$$w_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}).$$

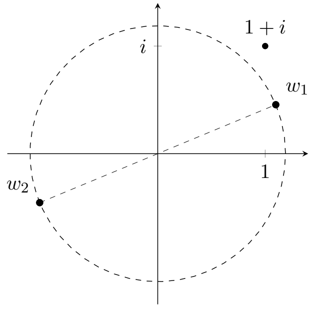


Рис. 12. Значения квадратного корня $\sqrt{1+i}$

На рис. 12 изображены значения корня w_1, w_2, они расположены на окружности радиусом $\sqrt[4]{2}$. $\triangle$

Пример 22. *На комплексной плоскости задан треугольник с вершинами в точках* $1, 2i, -1$ *(рис. 13).*

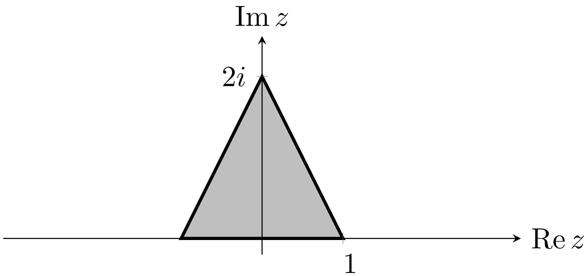


Рис. 13. треугольник с вершинами в точках $1, 2i, -1$

Найти, как изменится треугольник, если для всех точек z *из этого треугольника выполнить следующие действия:*

$$1)\, z \cdot i, \quad 2)\, z + i, \quad 3)\, \frac{z}{i}, \quad 4) z - i.$$

Решение. Исходя из геометрического смысла указанных действии можно увидеть: 1) умножение на i - поворот против часовой стрелки на угол 90°, 2) прибавление i - сдвиг по мнимой оси в положительном направлении, 3) деление на i - поворот против часовой стрелки на угол 90°, 4) вычитание i - сдвиг в отрицательном направлении (см. рис. 14).

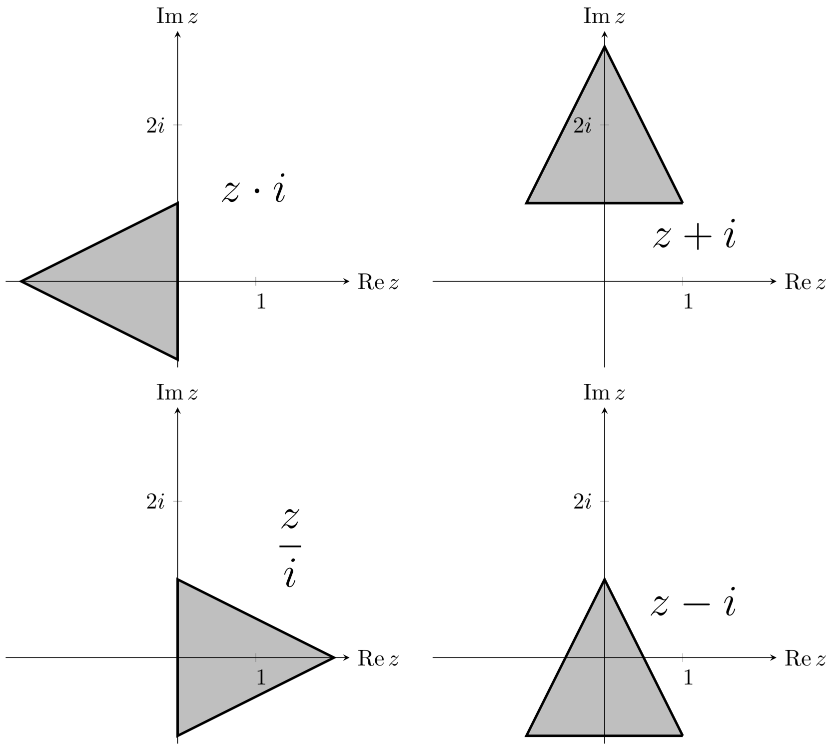


Рис. 14. Образ треугольника при различных действиях

$\triangle$

Пример 23. *Найти все такие $z \in \mathbb{C}$, что*

$$\arg(z - i) < \frac{\pi}{6}.$$

Решение. Обозначим $w = z - i$ и решим неравенство $\arg(w) < \frac{\pi}{6}$. Все числа w, аргумент которых меньше чем, $\pi/6$, находятся в заштрихованной области на рис. 15. Поскольку $z = w + i$, то искомая область будет сдвинута на единицу по мнимой оси в положительном направлении.

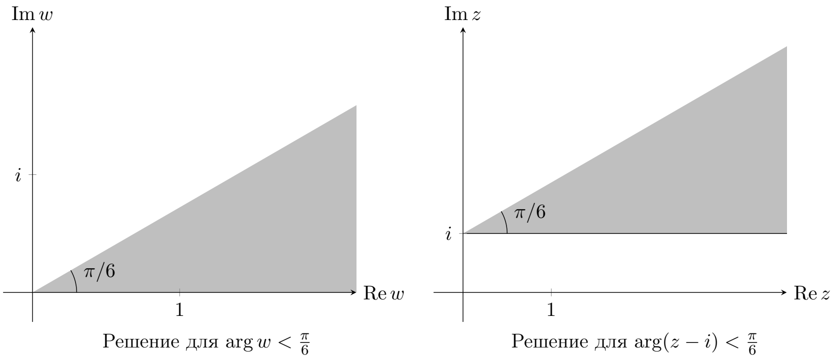


Рис. 15. К примеру 23.

△

2.3. Показательная форма записи

Существует ещё одна форма записи комплексных чисел. Для этой формы потребуется ввести понятие комплексной экспоненты e^z.

2.3.1. Комплексная экспонента

Экспонента e^z является примером комплексной функции комплексного переменного.

> Комплексную экспоненту определяют в виде суммы степенного ряда (см. п. 4.4.):
>
> $$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$
>
> или как предел последовательности:
>
> $$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \qquad (32)$$

Основные свойства функции e^z — это

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad \text{и} \quad (e^z)^w = e^{z \cdot w}, \tag{33}$$

где $z, w \in \mathbb{C}$ — любые комплексные числа. Далее нам потребуется ***формула Эйлера***:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{34}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — действительное число.

В частности получаем, что

$$|e^{i\varphi}| = 1$$

для любого $\varphi \in \mathbb{R}$.

При подстановке в формулу (34) конкретных значений φ выводим следующие соотношения:

$$e^0 = 1, \quad e^{\frac{\pi i}{2}} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1,$$

и

$$e^{2\pi k i} = 1, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Равенство

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

связывает между собой пять самых распространённых математических постоянных и считается одним из величайших математических соотношений.

2.3.2. Запись в показательной форме

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $\rho = |z|$ и $\varphi = \arg z$, тогда число z можно записать в виде

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Пример 24. *Записать число $z = 1 + i$ в показательной форме.*

Решение. Ранее в примере 14. мы вычислили величины $\arg z = \frac{\pi}{4}$ и $\rho = \sqrt{2}$. Следовательно,

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

$\triangle$

Показательная форма удобна для таких операций, как умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.
Пусть $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$, тогда

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

и

$$(z)^n = \rho^n e^{in\varphi}, \qquad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Пример 25. *Найти действительные корни уравнения*

$$\cos x + i\sin x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i.$$

Решение. По формуле Эйлера $\cos x + i\sin x = e^{ix}$, $|e^{ix}| = 1$ для любого действительного x, значит, $|\cos x + i\sin x| = 1$.

С другой стороны, для модуля правой части имеем

$$\left|\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i\right| = \frac{\sqrt{13}}{4} \neq 1.$$

Следовательно, у данного уравнения действительных корней не существует. $\triangle$

Сфера Римана. Бесконечно удаленная точка

В этом пункте мы рассмотрим подход, который позволяет ввести понятие бесконечно удаленной точки на комплексной плоскости. Более полное изложение приведено в [8].

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство с координатами (ξ, η, θ) и совместим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с плоскостью $O\xi\eta$ так, чтобы действительная ось совпала с осью $O\xi$, мнимая ось с осью $O\eta$, и положительные направления на соответствующих осях совпадали.

Обозначим через S сферу с центром в точке $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ радиуса $\frac{1}{2}$, имеющую уравнение

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \tag{35}$$

а точку $(0, 0, 1)$ назовем ***полюсом*** сферы S и обозначим символом P. Соединим отрезком точку $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ с полюсом P, при этом отрезок пересечет сферу S в единственной точке $M(\xi, \eta, \theta)$. Точка M называется ***стереографической проекцией*** точки $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ на сферу S.

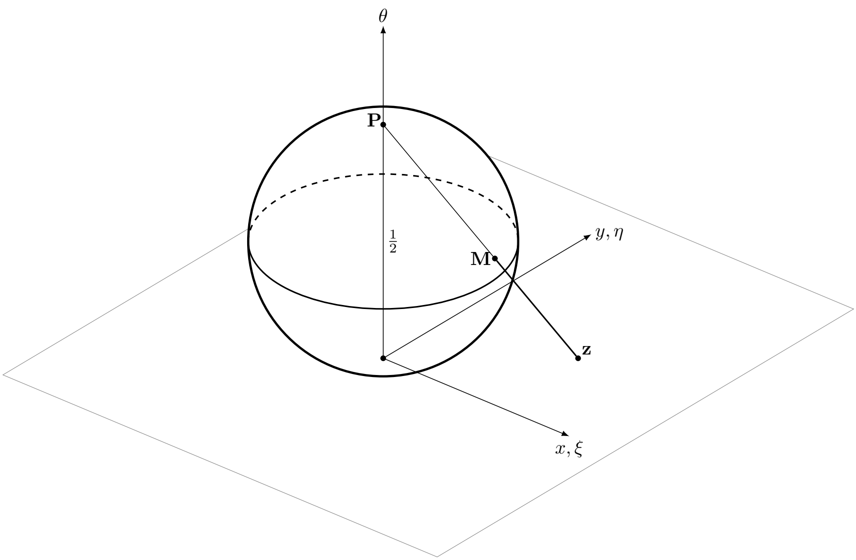


Рис. 16. Сфера Римана

Стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и точками сферы S с выколотым полюсом P.

В силу колинеарности точек $P(0,0,1)$, $M(\xi,\eta,\theta)$ и $\mathbf{z}(x,y,0)$ имеем
$$\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}=\frac{1-\theta}{1},$$
откуда выводим
$$x=\frac{\xi}{1-\theta},\ y=\frac{\eta}{1-\theta}, z=\frac{\xi+i\eta}{1-\theta}. \tag{36}$$

Поскольку
$$|z|^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\theta)^2},$$
то из уравнения сферы (35) получаем
$$|z|^2=\frac{\theta}{1-\theta}. \tag{37}$$

Выражая из равенства (37) значение θ и подставляя его в равенства (36), находим
$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2},\ \eta=\frac{y}{1+|z|^2},\ \theta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \tag{38}$$
Формулы (38) называют формулами стереографической проекции.

При неограниченном удалении точки z от нуля в произвольном направлении (вдоль произвольной прямой) образ этой точки на сфере всегда будет стремиться к полюсу P. Добавим к комплексной плоскости $\mathbb{C}$ *идеальный объект*, называемый ***бесконечно удаленной точкой*** и обозначаемый символом ∞. Далее комплексную плоскость с присоединенной к ней бесконечно удаленной точкой будем называть ***расширенной комплексной плоскостью*** и обозначать символом $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

Если мы доопределим стереографическую проекцию, полагая полюс P образом бесконечно удаленной точки, то получим взаимно однозначное соответствие между расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$ и сферой S.

Стандартной окрестностью полюса P на сфере является «шапочка», т.е. часть сферы S, расположенная выше некоторой плоскости $\theta = a,\ 0 < a < 1$. Стандартной окрестностью бесконечно удаленной точки на комплексной плоскости является прообраз стандартной окрестности полюса P при стереографической проекции, т.е. множество $U = \{|z| > r > 0\}$ — внешность круга с центром в нуле. При таком определении стереографическая проекция будет непрерывна и в бесконечно удаленной точке. При этом отображение всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на сферу S будет гомеоморфизмом. Сферу S, на которой изображены комплексные числа, называют ***сферой Римана***.

Естественным образом определяется сходимость последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ к бесконечно удаленной точке: $z_n \to \infty$, если для любой окрестности бесконечно удаленной точки U найдется такой номер n_0, что при $n > n_0$ точки z_n принадлежат окрестности U. Это определение эквивалентно тому, что $|z_n| \to +\infty$ (более подробно про предел последовательности см. главу 3.).

Задачи к главе 2

29. $z = 1 - i$. Найти $|z|$ и $\arg z$.

30. Пусть $|z| = 2$ и $\arg z = \frac{\pi}{6}$. Представить z в виде $x + iy$.

31. Пусть $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ и $z_0 \in \mathbb{C}$ фиксированная точка. Найти геометрическое место точек z на комплексной плоскости, таких, что:

а) $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$, б) $\alpha \leqslant \arg(z - z_0) \leqslant \beta$.

32. Найти геометрическое место точек z на комплексной плоскости, которые удовлетворяют соотношению $|z - i| + |z + i| = 16$.

33. Пусть z_1, z_2 — фиксированные комплексные числа. Найти геометрическое место точек, соответствующих числам z, таким, что:

$$\text{а) } |z - z_1| = |z - z_2|, \quad \text{б) } |z - z_1| = |z + z_1|.$$

34. Представить $z = \sqrt{3} + i$ в тригонометрической форме.

35. Представить $z = -2 + i2\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

36. Представить $\dfrac{2 - 2i}{1 - \sqrt{3}}$ в тригонометрической форме.

37. Представить число

$$\frac{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha}{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}$$

в алгебраической форме.

38. Найти произведение комплексных чисел $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right), z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

39. Вычислить $(1 + \sqrt{3}i)^9$.

40. Вычислить $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9$.

41. Вычислить:

$$\text{а) } u = (1+i\sqrt{3})^{13}+(1-i\sqrt{3})^{13}; \quad \text{б) } v = \frac{(1 + i\sqrt{3})^{13} - (1 - i\sqrt{3})^{13}}{i}.$$

42. Вывести формулы для $\sin 5\varphi$ и $\cos 5\varphi$.

43. Вычислить $(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi - 1)^n$.

44. Вычислить $(1+\cos\theta + i\sin\theta)^n$, где $n\in\mathbb{N}$.

45. Вывести формулу для $(1+i)^n + (1-i)^n$.

46. Представить в показательной форме числа $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ и $z_2 = 1-i$

47. Представить в показательной форме следующие комплексные числа:

а) $(1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha)^{-1}$; если$|\alpha|<\pi/2$, б) $1+i\sqrt{3}$; в) $-\sqrt{6}+i\sqrt{2}$;
г) $1-(2-\sqrt{3})i$; д) $1+\cos\alpha + i\sin\alpha$; где $|\alpha|<\pi$;
е) $1-\cos\alpha - i\sin\alpha$ при $0<\alpha<2\pi$;
ж) $(1-e^{2i\alpha})(1-e^{2i\beta})$; если $0<\alpha,\beta<\pi$.

48. Доказать, что при $z=\rho e^{i\theta}$

$$\frac{1}{(z-\bar{z})(1-z\bar{z})}\left(\frac{z^{n+1}}{1-z^2}-\frac{\bar{z}^{n+1}}{1-\bar{z}^2}\right)=$$

$$\frac{\rho^n(\sin\theta(n+1)-\rho^2\sin\theta(n-1))}{(1-\rho^2)\cdot\sin\theta\cdot(1-2\rho^2\cos 2\theta+\rho^4)}.$$

49. Проверить, что для всех $z_1, z_2\in\mathbb{C}$ выполнено неравенство

$$|z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1 z_2|\leqslant 2|z_1 z_2|.$$

50. Найти образы точек

$$\text{а) } z = 1, \qquad \text{б) } z = i, \qquad \text{в) } z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

при стереграфической проекции. ➠

51. При каком условии стереографическими проекциями точек z_1 и z_2 являются диаметрально противоположные точки сферы Римана? ➠

52. Что соответствует на сфере Римана семейству параллельных прямых на комплексной плоскости? ➠

Термины к главе 2

аргуме́нт компле́ксного числа́	$\operatorname{Arg} z$	复数的宗数
бесконе́чность	∞	无限; 无穷(性)
ве́ктор	$\vec{v}$	向量；矢量，矢
геометри́ческая интерпрета́ция		几何说明(解释)
гла́вное значение аргуме́нта компле́ксного числа́	$\arg z$	整数宗数的主要意义
длина́		长度
еди́ничная окру́жность		单位圆
компле́ксная пло́скость		复平面
компле́ксная экспоне́нта	e^z	复变指数
поля́рные координа́ты	(ρ, φ)	极坐标
поля́рный ра́диус	ρ	极半径
поля́рный у́гол	φ	极角
постро́ить на пло́скости		在平面上建设
тригонометри́ческая фо́рма компле́ксного числа́	$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$	复数的三角形式
фо́рмула Муа́вра	$z^k = \rho^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$	棣(狄)美弗公式
фо́рмула Э́йлера	$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$	欧拉公式

3. Последовательности комплексных чисел

> ***Последовательность*** комплексных чисел — это закон (или правило), по которому каждому натуральному числу соответствует определённое комплексное число.

Обычно последовательность записывают в виде

$$z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots, z_n, \ldots$$

Также последовательность можно изображать в виде точек на комплексной плоскости (рис. 17).

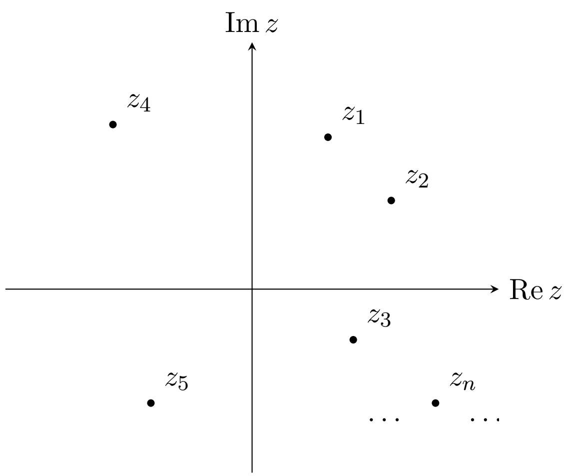


Рис. 17. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$

Пример 26. *Записать несколько первых членов последовательностей и изобразить их на комплексной плоскости*

$$\text{а) } z_n = i^n, \qquad \text{б)} w_n = (1-i)^n.$$

Решение. а) Возводя мнимую единицу в степени $1, 2, 3, 4, 5$, имеем

$$z_1 = i, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -i, \quad z_4 = 1, \quad z_5 = i.$$

Далее значения последовательности будут повторяться таким образом, что

$$z_{4k} = 1, \quad z_{4k+1} = i, \quad z_{4k+2} = -1, \quad z_{4k+3} = -i,$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$, т. е. все элементы последовательности сосредоточены в четырёх точках (рис. 18).

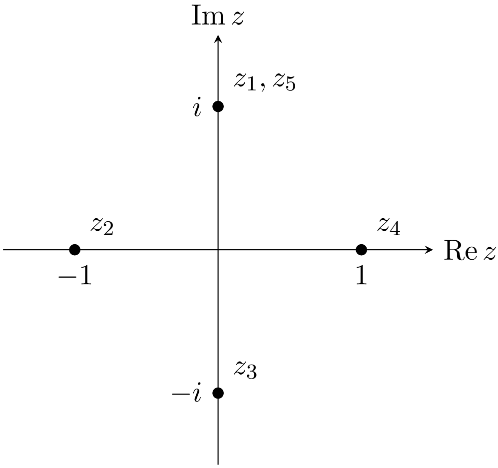


Рис. 18. Последовательность $z_n = i^n$

б) По формуле возведения в степень в тригонометрической форме (29) имеем

$$(1-i)^n = (\sqrt{2})^n (\cos\left(n\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{7\pi}{4}\right)),$$

и

$$w_1 = 1 - i, \quad w_2 = -2i, \quad w_3 = -2 - 2i, \quad w_4 = -4, \quad w_5 = -4 + 4i.$$

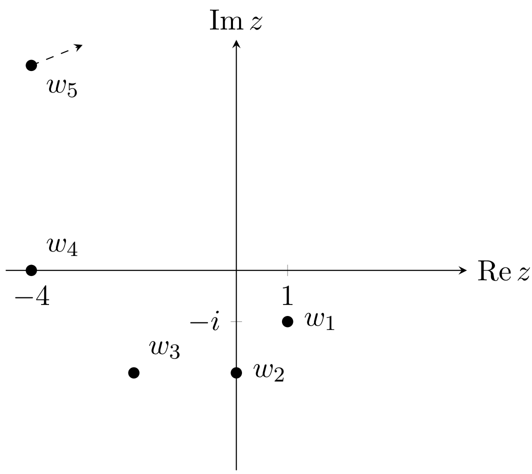


Рис. 19. Последовательность $w_n = (1-i)^n$

Элементы данной последовательности лежат на раскручивающейся спирали (рис. 19). $\triangle$

> Последовательность называется ***ограниченной***, если все её значения ограничены, т. е. существует положительное число $M < \infty$, такое, что $|z_n| < M$ для всех n.

Другими словами, последовательность ограничена, если все её элементы содержаться в некотором круге (в данном случае радиусом M). Так, последовательность $z_n = i^n$ из примера 26. ограничена (действительно, для $M = 2$ имеем $|z_n| = 1 < M$). С другой стороны, последовательность $z_n = (1-i)^n$ не является ограниченной (для любого M найдётся номер n_M, такой, что $|1-i|^{n_M} > M$).

Предел последовательности

Комплексное число a называется ***пределом*** последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n - a| < \varepsilon.$$

Используются стандартные обозначения

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \qquad \text{или} \qquad z_n \to a, \text{ при } n \to \infty.$$

Последовательность, которая имеет предел $a \in \mathbb{C}$, называется ***сходящейся***.

Примерами сходящихся последовательностей могут служить:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad \text{где } 0 < p < \infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0 \quad \text{при } |z| < 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Будем считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, если $|z_n| \to \infty$. Например,

$$\lim_{n\to\infty} (1-i)^n = \infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \infty \quad \text{при } p < 0.$$

На комплексной плоскости сходящаяся последовательности выглядит так, как представлено на рис. 20

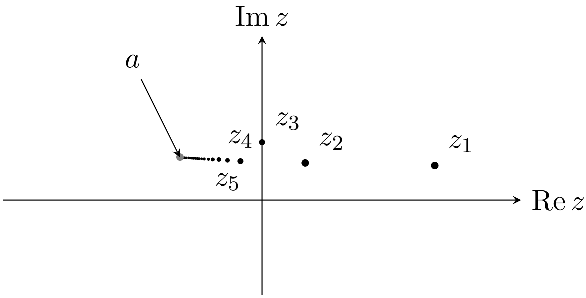


Рис. 20. Сходящаяся последовательность

Следует отметить, что каждой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$: $z_n = x_n + y_n$. Верно следующее утверждение:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a = \alpha + i\beta \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} y_n = \beta.$$

Другими словами, сходимость последовательности комплексных чисел означает одновременную сходимость действительной и мнимой частей (и наоборот).

> Если для данной последовательности не существует предела, то последовательность называется ***расходящейся***.

Отметим, что из расходимости действительной или мнимой части следует расходимость всей последовательности.

Пример 27. *Найти предел последовательности:*

$$z_n = \frac{3-n}{n} + i\frac{n+1}{2n+3}.$$

Решение. Действительная и мнимая части последовательности z_n равны

$$x_n = \frac{3-n}{n}, \quad y_n = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Найдём пределы действительной и мнимых частей по отдельности:

$$x_n = \frac{3}{n} - 1 \to -1, \quad y_n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} \to \frac{1}{2}.$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\dfrac{1}{n} \to 0$ и $\dfrac{3}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}.$$

В итоге, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -1 + i\frac{1}{2}$. △

Пример 28. *Показать, что последовательность $z_n = (1+i)^n$ расходится.*

Решение. Запишем число $1+i$ в тригонометрической форме[8]:

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

Используя формулу возведения в степень в тригонометрической форме (29), имеем

$$z_n = (1+i)^n = (\sqrt{2})^n(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}).$$

Последовательность действительных частей $x_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}$ расходится (т. к. $(\sqrt{2})^n \to \infty$, а величина $\cos\frac{n\pi}{4}$ ограничена при $n \to \infty$). Следовательно, исходная последовательность z_n расходится. △

Свойства предела

Приведём некоторые свойства предела последовательности [9]. Рассмотрим две сходящиеся последовательности $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} w_n = b.$$

Выполняются следующие свойства:

---

[8] См. пример 14.

[9] Более подробно см. работы [6, 8, 9].

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n + w_n) = a + b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = a \cdot b$;

3) если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{a}{b}$.

> ***Критерий Коши:*** для того чтобы последовательность $\{z_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N = N(\varepsilon)$, чтобы для всех $n > N$ и $m > N$ выполнялось неравенство $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Вычисление пределов последовательностей

Предположим, требуется доказать (непосредственно по определению), что последовательность $\{z_n\}$ сходится к a, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Обычно поступают следующим образом:

1) оценивают модуль разности $|z_n - a|$:

$$|z_n - a| \leqslant E(n),$$

таким образом, чтобы число $E(n)$ зависело только от n,

2) если удаётся подобрать оценку $E(n)$ так, что $E(n)$ убывает до нуля с ростом n ($E(n) \searrow 0$ при $n \to \infty$), то для любого $\varepsilon > 0$ находят такой номер N, что $E(n) < \varepsilon$. И, следовательно, $|z_n - a| \leqslant E(n) < \varepsilon$.

Пример 29. *Пусть* $z_n = 1 + i\frac{(-1)^n}{n}$. *Доказать, что* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

Решение. 1) Имеем $|z_n - 1| = |i\frac{(-1)^n}{n}| = \frac{1}{n}$. Таким образом,

$$|z_n - 1| \leqslant \frac{1}{n}.$$

2) Используем $\frac{1}{n} \searrow 0$ при $n \to \infty$. Для произвольного (малого) $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное число N, такое, что $\frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$ (например, $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, где $[\cdot]$ — целая часть числа). Следовательно, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ для любых $n > N$.

В итоге, мы доказали: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$ выполнено $|z_n - 1| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$. △

Пример 30. *Найти предел последовательности* $z_n = \dfrac{3n+i}{2n-i}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на n:

$$\frac{3n+i}{2n-i} = \frac{3+\frac{i}{n}}{2-\frac{i}{n}}.$$

Так как $\frac{i}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \frac{3}{2}$. △

Пример 31. *Пусть* $z_n = e^{i\frac{\pi}{n}}$. *Изобразить последовательность на комплексной плоскости и найти предел.*

Решение. Найдём несколько первых членов последовательности:

$$z_1 = e^{i\pi} = -1, \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i,$$

$$z_3 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_4 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

и т. д.

$$z_n = e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}.$$

Изобразим последовательность z_n на комплексной плоскости. Заметим, что все члены последовательности лежат на единичной окружности (рис. 21).

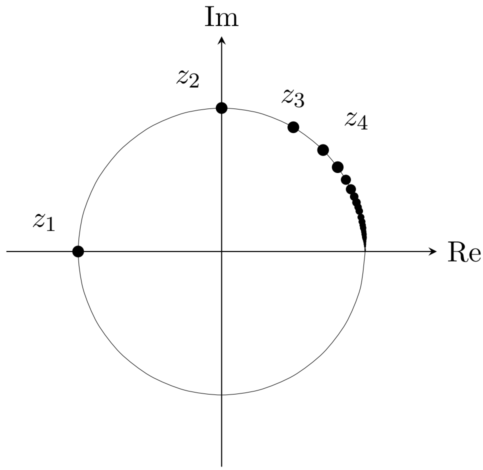


Рис. 21. Последовательность $z_n = e^{i\frac{\pi}{n}}$

Теперь найдём предел. Запишем действительную и мнимую части последовательности:

$$\operatorname{Re} z_n = \cos\frac{\pi}{n}, \quad \operatorname{Im} z_n = \sin\frac{\pi}{n}.$$

Найдём пределы $\operatorname{Re} z_n$ и $\operatorname{Im} z_n$ по отдельности

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n} = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1 + i0,$$

что вполне согласуется с рис. 21[10]. △

Задачи к главе 3

53. Пусть

$$z_1 = 2i, \quad z_2 = \frac{7i}{3}, \quad z_3 = \frac{5i}{2}, \quad z_4 = \frac{13i}{5}.$$

[10] На самом деле, это рис. 21 согласуется с ответом. Сам по себе рисунок не является доказательством, а только может натолкнуть на некоторые идеи.

Найти выражение для z_n.

54. Записать несколько первых членов последовательности $z_n = (1+i)^n$ и изобразить их на комплексной плоскости.

55. Найти предел последовательности $z_n = \frac{3n-1}{2n+2} + \frac{n+1}{n-1} i$ при $n \to \infty$.

56. Найти предел последовательности

$$z_n = -2 + i\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{при } n \to \infty.$$

57. Найти предел последовательности

$$z_n = \frac{\sqrt{n} + i(n+1)}{n}, \quad \text{при } n \to \infty.$$

58. Найти следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{3+in^2}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{n+in^2}{n^2+1};$$

$$\text{в) } \lim_{n\to\infty} \frac{(i)^n}{3^{n+1}}; \qquad \text{г) } \lim_{n\to\infty} \frac{in}{2^n}.$$

59. Изобразить последовательность $z_n = ie^{i\frac{\pi}{n}}$ на комплексной плоскости и найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

60. Найти предел последовательности

$$z_n = \frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

при $n \to \infty$.

Термины к главе 3

Послéдовательность чи́сел	$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$	数的连续性
предéл послéдовательности чи́сел	$\lim\limits_{n\to\infty} z_n$	数的连续性的限度

4. Ряды

В этой главе вводится понятие ряда и некоторые свойства [11].

Пусть задана последовательность (комплексных) чисел $\{a_n\}$. Формальная сумма $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ называется числовым ***рядом*** и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{39}$$

Сумма называется формальной, поскольку неизвестно заранее, можно ли выполнить сложение для заданной последовательности. Так, сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots$$

равна бесконечности, а для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \cdots$$

сумма не определена вовсе. С другой стороны, во многих случаях сумму ряда посчитать можно. Примерами могут служить следующие ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = 1; \tag{40}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{2n-1} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \cdots = \pi;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}; \tag{41}$$

[11] Подробней см. [2, 6, 9].

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2. \qquad (42)$$

Далее мы приведём строгое определение суммы ряда. Определим последовательность ***частичных сумм*** $\{s_n\}$ ряда $\sum a_n$ следующим образом:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \end{aligned} \qquad (43)$$

> Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$ и $|S| < \infty$, то говорят, что ряд $\sum a_n$ ***сходится*** и сумма ряда равна S:
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Ели предела частичных сумм не существует или равен бесконечности, то говорят, что ряд ***расходится***. Например, для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots \qquad (44)$$

предел частичных сумм равен бесконечности [12]. Следовательно, этот ряд расходится.

[12] Ряд (44) называется гармоническим.

Заметим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Пример 32. *Проверить, сходится ли ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n(n+1)}.$$

Решение. Запишем частичные суммы:

$$\begin{aligned}
&s_1 = \frac{i}{2},\\
&s_2 = \frac{i}{2} + \frac{i}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}i,\\
&s_3 = \frac{i}{2} + \frac{i}{2\cdot 3} + \frac{i}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}i,\\
&s_4 = \frac{i}{2} + \frac{i}{2\cdot 3} + \frac{i}{3\cdot 4} + \frac{i}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}i,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&s_n = \dots\dots = \frac{n}{n+1}i.
\end{aligned}$$

Далее имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}i = i$. Таким образом, мы показали, что ряд сходится, и нашли сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n(n+1)} = i.$$

$\triangle$

Как и в случае последовательностей, ряд можно разделить на действительную и мнимую части:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n,$$

где $x_n = \operatorname{Re} a_n$, $y_n = \operatorname{Im} a_n$. Выполнено следующее свойство: *ряд сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды действительных и мнимых частей.* Причём если $\sum a_n = S$, $\sum x_n = S_x$, $\sum y_n = S_y$, то $S = S_x + iS_y$. С другой стороны, если один из двух указанных рядов расходится, то расходится и исходный ряд.

Пример 33. *Найти сумму ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n ni}{n^2}.$$

Решение. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n i}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Таким образом, мы разложили исходный ряд на два уже изветных ряда (см. (41) и (42) на стр. 63). В итоге ряд сходится, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n ni}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + i \ln 2.$$

△

Пример 34. *Показать, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i}{n}$$

расходится.

Решение. Разделим ряд на действительную и мнимую части:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ряд составленный из действительных частей сходится ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$). Ряд, составленный из мнимых частей, является гармоническим и, как мы знаем, расходится. Следовательно, исходный ряд расходится. △

> ***Необходимый признак сходимости:*** если ряд $\sum a_n$ сходится, то
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Так, ряд из примера 32. сходится, и $a_n = \frac{i}{n(n+1)} \to 0$. Отметим, что необходимый признак применяется для доказательства расходимости ряда. Например, расходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \cdots$$

можно показать, используя этот признак. Действительно, последовательности членов ряда $a_n = n$ и $a_n = (-1)^n$ не стремятся к нулю, и, следовательно, по необходимому признаку сходимости данные ряды сходиться не могут.

Следует обратить внимание, что выполнение необходимого признака не влечёт сходимости. Например, для ряда (44) имеем $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, но ряд расходится.

Пример 35. *Показать, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+i}$$

расходится.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+i} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, в силу необходимого признака сходимости ряд $\sum \frac{n}{n+i}$ расходится. △

4.1. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность, которая строится следующим образом. Пусть даны b и q — два комплексных числа. Определим последовательность:

$$a_1 = b \quad \text{и} \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{для } n = 2, 3, \ldots,$$

т. е.

$$b, \quad bq, \quad bq^2, \quad bq^3, \quad bq^4, \quad \dots$$

Число q называется ***знаменателем прогрессии***. Если дана геометрическая прогрессия $\{a_n\}$, то числа b и q можно найти из следующих соотношений:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad b = \frac{a_n}{q^{n-1}}.$$

Пример 36. *Дана геометрическая прогрессия:*

$$i, \quad -2+i, \quad -4-3i, \quad 2-11i, \quad \dots$$

Найти знаменатель прогрессии q и выражение для общего члена прогрессии a_n.

Решение. Найдём знаменатель прогрессии из соотношения $q = \frac{a_2}{a_1}$:

$$q = \frac{-2+i}{i} = \frac{(-2+i)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} = \frac{1+2i}{1} = 1+2i.$$

Для любой геометрической прогрессии общий член выражается в виде $a_n = a_1 q^{n-1}$. В нашем случае $a_1 = i$ и

$$a_n = i \cdot (1+2i)^{n-1}.$$

△

4.1.1. Частичная сумма геометрической прогрессии

Пусть $\{a_n\}, a_n \in \mathbb{C}$ — геометрическая прогрессия. Если знаменатель прогрессии $q \neq 1$, то сумму n первых членов можно вычислить по формуле

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Если $q = 1$, то последовательность имеет вид $b, b, b, \dots$ (т. е. $a_n = b$), в этом случае частичная сумма $s_n = n \cdot b$. Заметим, что если $a_1 = 0$, то $s_n = 0$. Далее будем считать, что $a_1 \neq 0$.

Отметим важный частный случай, когда $a_1 = 1$. Тогда *формула частичной суммы геометрической прогрессии* имеет вид

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{45}$$

Пример 37. *Найти частичную сумму s_n геометрической прогрессии $a_n = (1 + i) \cdot 2^{n-1}$.*

Решение. Имеем $a_1 = 1 + i$ и знаменатель прогрессии $q = 2$. Тогда по формуле частичной суммы геометрической прогрессии

$$s_n = (1 + i) \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = (1 + i) \cdot (2^n - 1).$$

$\triangle$

Пример 38. *Найти частичную сумму s_n геометрической прогрессии $a_n = (\frac{i}{2})^{n-1}$ и вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.*

Решение. Имеем $a_1 = 1$ и $q = \frac{i}{2}$. Тогда по формуле частичной суммы геометрической прогрессии

$$s_n = \frac{1 - (\frac{i}{2})^n}{1 - \frac{i}{2}}.$$

Найдём предел частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - (\frac{i}{2})^n}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{i}{2})^n}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{1 - 0}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{2}{2 - i} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i.$$

$\triangle$

Пример 39. *Найти выражение для частичных сумм ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots$$

Решение. Последовательность $a_n = (-1)^n$ является геометрической прогрессией: $a_1 = -1$ и $q = -1$. Тогда по формуле для частичных сумм имеем

$$s_n = (-1) \cdot \frac{1-(-1)^n}{1+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ — чётное;} \\ 1, & \text{если } n \text{ — нечётное.} \end{cases}$$

$\triangle$

Пример 40. *Пусть* $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. *Вычислить* $1 + z + z^2 + ... + z^{20}$.

Решение. Воспользуемся формулой частичной суммы геометрической прогрессии (45):

$$1 + z + \ldots z^{20} = \frac{1-z^{21}}{1-z}.$$

Заметим, что в данном случае $z = e^{\frac{i\pi}{4}}$, что позволит вычислить z^{21}. Имеем[13]

$$z^{21} = (e^{\frac{i\pi}{4}})^{21} = e^{i\frac{21\pi}{4}} = e^{5\pi i + \frac{i\pi}{4}} = e^{5\pi i} e^{\frac{i\pi}{4}} = -e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Далее

$$\frac{1-z^{21}}{1-z} = \frac{1+e^{\frac{i\pi}{4}}}{1-e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1+\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{2}-1-i} =$$
$$\frac{(\sqrt{2}+1+i)\cdot(\sqrt{2}-1+i)}{(\sqrt{2}-1-i)\cdot(\sqrt{2}-1+i)} = \frac{\sqrt{2}i}{2-\sqrt{2}} =$$
$$\frac{\sqrt{2}i\cdot(2+\sqrt{2})}{2} = (1+\sqrt{2})i.$$

[13] Напомним, что $e^{5\pi i} = -1$.

4.1.2. Сумма геометрической прогрессии

Рассмотрим ряд, элементами которого являются члены геометрической прогрессии, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{где} \quad a_1 = b \text{ и } a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \tag{46}$$

и при этом $b, q, a_n \in \mathbb{C}$. Известны частичные суммы этого ряда:

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{и} \quad s_n = n \cdot b, \text{ если } q = 1.$$

Далее исследуем вопрос о сходимости ряда (46). Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 \lim_{n\to\infty} q^{n-1}.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ только если $|q| < 1$[14]. Следовательно, при $|q| \geqslant 1$ ряд (46) расходится в силу необходимого признака сходимости. С другой стороны, при $|q| < 1$ последовательность частичных сумм ряда (46) имеет конечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Таким образом, при $|q| < 1$ ряд (46) сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}. \tag{47}$$

Таким образом, мы получили *формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии*. В частности,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}. \tag{48}$$

Заметим, что в формуле (48) суммирование начинается с нуля, а не с единицы.

[14]Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$ только при $|z| < 1$.

Пример 41. *Исследовать сходимость ряда и найти его сумму:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{i}{3^{n-1}}\right).$$

Решение. Ряд сходится, так как его действительная и мнимая части являются геометрическими прогрессиями со знаменателями $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ соответственно. С помощью формулы (47) вычислим сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{i}{3^{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=$$
$$\frac{1}{1-1/2}+i\frac{1}{1-1/3}=2+\frac{3}{2}i.$$

△

Пример 42. *Вычислить суммы следующих рядов:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n\varphi,\quad \sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin n\varphi,$$

при условии, что $0<r<1$.

Решение. Пусть $z=re^{i\varphi}$. Тогда $|z|=r<1$ и по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии (47) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}z^n=\frac{z}{1-z}=\frac{re^{i\varphi}}{1-e^i\varphi}.$$

Используя формулу Эйлера (34) и проводя соответствующие преобразования, получим

$$\frac{re^{i\varphi}}{1-e^i\varphi} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{1 - r\cos\varphi - ir\sin\varphi} =$$
$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{1 - r\cos\varphi - ir\sin\varphi} \cdot \frac{1 - r\cos\varphi + ir\sin\varphi}{1 - r\cos\varphi + ir\sin\varphi} =$$
$$\frac{r\cos\varphi - r^2\cos^2\varphi + ir^2\cos\varphi\sin\varphi + ir\sin\varphi - ir^2\cos\varphi\sin\varphi - r^2\sin\varphi}{(1 - r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} =$$
$$\frac{r\cos\varphi - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi + ir\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} =$$
$$\frac{r\cos\varphi - r^2 + ir\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}.$$

С другой стороны, применяя формулу Муавра и выделяя действительную и мнимую части, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(re^{i\varphi})^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\varphi + i\sum_{n=1}^{\infty} r^n\sin n\varphi.$$

В итоге выводим

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\varphi = \frac{r\cos\varphi - r^2}{1 - 2r\cos\varphi + r^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n\sin n\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}.$$

△

4.2. Абсолютно сходящиеся ряды

Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***сходится абсолютно***, если сходится другой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из модулей членов исходного ряда.

Пример 43. *Проверить, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$ *сходится абсолютно.*

Решение. Чтобы исследовать ряд на абсолютную сходимость, запишем выражения для модулей членов ряда:

$$|a_n| = \left|\left(\frac{i}{2}\right)^n\right| = \left|\frac{i}{2}\right|^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

Мы уже знаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится и его сумма равна единице (это геометрическая прогрессия с $a_1 = \frac{1}{2}$ и $q = \frac{1}{2}$). Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. $\triangle$

Отметим важное свойство: *если ряд сходится абсолютно, то он сходится* (*в обычном смысле*). Так, ряд из примера 43. сходится не только абсолютно, но и в обычном смысле [15]. Другими словами, если мы сумели доказать абсолютную сходимость ряда, то сходимость в обычном смысле будет следовать автоматически.

Однако из сходимости ряда не следует его абсолютная сходимость. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится. Но этот ряд не является абсолютно сходящимся, поскольку ряд, составленный из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходится. Если ряд сходится, но не является абсолютно сходящимся, то говорят, что ряд ***сходится условно***. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно.

[15] Это геометрическая прогрессия с $a_1 = \frac{i}{2}$ и $q = \frac{i}{2}$.

Пример 44. *Показать, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{5^n n^2}$$

сходится.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$|a_n| = \left|\frac{(3+4i)^n}{5^n n^2}\right| = \frac{1}{5^n} \cdot \frac{|3+4i|^n}{n^2} = \frac{1}{5^n} \cdot \frac{(\sqrt{9+16})^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Поскольку ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится (его сумма равна $\frac{\pi^2}{6}$), то исходный ряд сходится абсолютно. А из абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{5^n n^2}$ получаем, что он сходится (в обычном смысле). △

Данный пример демонстрирует, что иногда бывает удобнее проверять абсолютную сходимость вместо «обычной».

Исследование рядов на абсолютную сходимость

Чтобы исследовать ряд $\sum a_n$ на абсолютную сходимость, нужно исследовать сходимость ряда $\sum |a_n|$. Обозначим $\alpha_n = |a_n|$, тогда $\alpha_n \geqslant 0$ и для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \qquad (49)$$

применимы признаки сходимости знакопостоянных рядов. Приведём основные из этих признаков.

1. ***Признак сравнения.*** Пусть $\sum \beta_n$ — другой ряд с неотрицательными членами. Если выполнено неравенство

   $$\alpha_n \leqslant \beta_n,$$

   то из сходимости ряда $\sum \beta_n$ следует сходимость ряда (49), из расходимости ряда (49) следует расходимость ряда $\sum \beta_n$.

2. ***Признак Даламбера.*** Если $\alpha_n > 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = p,$$

то при $p < 1$ (49) сходится, а при $p > 1$ расходится.

3. ***Признак Коши.*** Если $\alpha_n \geqslant 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = p,$$

то при $p < 1$ (49) сходится, а при $p > 1$ расходится.

Пример 45. *Исследовать ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}$$

на абсолютную сходимость.

Решение. Имеем $|a_n| = \left|\frac{n}{(2i)^n}\right| = \frac{n}{2^n}$. Таким образом, требуется исследовать сходимость ряда $\sum \alpha_n = \sum \frac{n}{2^n}$. Воспользуемся признаком Даламбера. Для этого найдём отношение двух последующих членов

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}} = \frac{n+1}{n\cdot 2}$$

и вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $p = \frac{1}{2} < 1$, и, значит, ряд $\sum \frac{n}{2^n}$ сходится (по признаку Даламбера). Отсюда следует абсолютная сходимость исходного ряда $\sum \frac{n}{(2i)^n}$. △

Пример 46. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n ni}{n^2}.$$

Решение. Проверим абсолютную сходимость. Для этого найдём модули членов ряда:

$$|a_n|^2 = \left|\frac{1+(-1)^n ni}{n^2}\right|^2 = \left|\frac{1}{n^2} + i\frac{(-1)^n}{n}\right|^2 = \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2} = \frac{1+n^2}{n^4}.$$

Таким образом, $|a_n| = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2}$ и верно следующее неравенство:

$$|a_n| = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Но ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, и, следовательно, по признаку сравнения (см. с. 75) ряд $\sum |a_n|$ также расходится. Значит, ряд $\sum \frac{1+(-1)^n ni}{n^2}$ не является абсолютно сходящимся. Тем не менее, как мы знаем из примера 33., этот ряд сходится. Таким образом, мы исследовали сходимость ряда $\sum \frac{1+(-1)^n ni}{n^2}$ и показали, что он сходится условно. △

Пример 47. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}.$$

Решение. Имеем $|a_n| = |\frac{n!}{(in)^n}| = \frac{n!}{(n)^n}$. Исследуем сходимость ряда, составленного из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n)^n}.$$

Для этого воспользуемся признаком Даламбера:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = e^{-1}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{e} < 1$, и, следовательно, ряд сходится абсолютно. △

4.3. Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов

Рассмотрим ряды следующего вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n, \quad \text{где} \quad a_n \in \mathbb{R}, b_n \in \mathbb{C}.$$

Имеют место следующие признаки сходимости.

> ***Признак Дирихле.*** Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$, а последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ ограничена, т. е. найдётся число M такое, что для любого $N \in \mathbb{N}$ верно $\left|\sum\limits_{n=0}^{N} b_n\right| < M$.

Пример 48. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\theta n}}{n}.$$

Решение. Обозначим $a_n = \frac{1}{n}$ и $b_n = e^{in\theta}$. Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ монотонно стремится к нулю. Для последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ имеем

$$\sum_{n=1}^{N} e^{in\theta} = \frac{e^{i(N+1)\theta} - e^{i\theta}}{e^{i\theta} - 1},$$

это выражение ограничено при $\theta \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, при $\theta \neq 2\pi k$ ряд сходится в силу признака Дирихле. При $\theta = 2\pi k$ ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

и, следовательно, расходится. △

Признак Абеля. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ сходится.

4.4. Степенные ряды

При изучении функций комплексного переменного весьма важное значение имеет их представление в виде суммы некоторого ряда уже хорошо изученных функций. Простейшим классом таких функциональных рядов являются *степенные ряды.*

Итак, ряд вида
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{50}$$
называется ***степенным рядом***.

Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — фиксированные комплексные числа, а z — комплексное переменное [16].

Ряд (50) сходится при одних значениях z и расходится при других. Точно можно сказать, что при $z = 0$ ряд (50) сходится (так как $\sum a_n 0^n = 0 + 0 + \cdots = 0$). Примерами степенных рядов могут служить следующие ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}} = z + \frac{z^2}{\sqrt{2}} + \frac{z^3}{\sqrt{3}} + \cdots,$$

[16] Часто степенным рядом называют ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. В этом случае ряд (50) получается путём несложных преобразований.Степенной ряд — это простейший пример функционального ряда, т. е. ряда, членами которого являются функции от z: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{\frac{1}{n}} z^n = ez + 2e^{\frac{1}{2}} z^2 + 3e^{\frac{1}{3}} z^3 + \cdots .$$

Следующая теорема характеризует сходимость степенного ряда.

> ***Теорема Абеля.*** Если степенной ряд $\sum a_n z^n$ сходится в точке z_0, то он сходится в любой точке z, такой, что $|z| < |z_0|$.
>
> Если степенной ряд $\sum a_n z^n$ расходится в точке z_1, то он расходится в любой точке z, такой, что $|z| > |z_1|$.

Более точную информацию о том, где сходится степенной ряд, даёт

> ***Формула Коши–Адамара.*** Пусть
>
> $$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$
>
> Обозначим $R = \frac{1}{l}$ (если $l = \infty$, то $R = 0$; если $l = 0$, то $R = \infty$). Тогда степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ сходится абсолютно в круге $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$

Число R называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда. Множество $\{z : |z| < R\}$ называется *кругом сходимости* степенного ряда. Внутри круга сходимости степенной ряд сходится абсолютно, а вне круга — расходится. В точках границы круга сходимости $|z| = R$ ряд может, как сходится, так и расходится.

Если $R = 0$, то это означает, что степенной ряд сходится только в одной точке $z = 0$.

Заметим, что формула Коши–Адамара не даёт ответа, сходится ли ряд на границе круга сходимости $|z| = R$. Поэтому при решении задач этот вопрос нужно исследовать дополнительно.

Пример 49. *Найти радиусы сходимости рядов:*

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n}, \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n.$$

Решение. а) Имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{i^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Радиус сходимости $R = 1$.

б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|n^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$. Радиус сходимости $R = 0$. $\triangle$

Пример 50. *Исследовать сходимость степенного ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}. \tag{51}$$

Решение. 1. Найдём радиус сходимости. Имеем $\lim\limits_{n\to 0} |\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}| = 1$, радиус сходимости $R = 1$. Отсюда по формуле Коши–Адамара ряд (51) сходится (абсолютно) при $|z| < 1$, а расходится при $|z| > 1$.

2. Исследуем сходимость на границе круга сходимости, т. е. при $|z| = 1$. Если $|z| = 1$, то $z = e^{i\varphi}$, и ряд (51) на границе круга сходимости имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n^2}. \tag{52}$$

Проверим абсолютную сходимость ряда (52). С учётом (41) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{e^{in\varphi}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Получаем, что ряд (52) сходится абсолютно при всех φ. Следовательно, ряд (51) сходится абсолютно на границе круга сходимости. В итоге ряд (51) сходится абсолютно при $|z| \leqslant 1$. $\triangle$

Задачи к главе 4

61. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+i)^n$?

62. Доказать что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+3i+5}$ расходится.

63. Найти частичные суммы s_n геометрической прогрессии и вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, где $a_1 = \frac{1}{2i}$ и $q = \frac{1}{2i}$.

64. Вычислить $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{50}$.

65. Дана геометрическая прогрессия

$$i,\ -2,\ -4i,\ 8,\ 16i, \ldots .$$

Найти знаменатель q этой прогрессии и выражение для a_n.

66. Найти выражение для n-й частичной суммы s_n ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^n.$$

67. Пусть $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, вычислить $1 + z + z^2 + ... + z^{19}$.

68. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{5^{n+1}}$ для $|z| < 5$.

69. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{n-1}}{n!}$ сходится абсолютно.

70. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{i}{10^n}\right)$.

71. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} - \frac{i}{2^n}\right)$ и найти его сумму.

72. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{i}{2^n}\right)$.

73. Исследовать сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$\text{а) } a_n = \frac{ni}{(1+i)^n}; \qquad \text{б) } a_n = \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2}i;$$

$$\text{в) } a_n = \frac{i^{2n}}{n}; \qquad \text{г) } a_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n.$$

74. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

75. Исследовать сходимость ряда

$$P(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{i(n-1)\theta}$$

и найти значения $P(\pi/2)$, $P(\pi)$

76. Найти все значения действительного параметра α, при которых сходятся следующие ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{in}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{i\pi/n};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (n^2+1)^{-\alpha}(e^{in}-1); \qquad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(\ln n^2+1)^{\alpha}}{n}.$$

77. Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n z^n.$$

78. Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \cos in.$$

79. Найти радиусы сходимости степенных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n.$$

80. Исследовать сходимость степенных рядов (в том числе и на границе круга сходимости):

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Термины к главе 4

ра́диус сходи́мости степенно́го ря́да	$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}$	幂级数的收敛半径
ряд	$\sum_n a_n$	系列；[数]级数
степенно́й ряд	$\sum_n a_n z^n$	幂级数
су́мма ря́да	$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$	级数和
части́чная су́мма ря́да	$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$	级数的部分总和
числово́й ряд	$\sum_n a_n$	数量级数

5. Функции комплексного переменного

> Если каждому числу z из некоторого множества $E \subset \mathbb{C}$ поставлены в соответствие одно или несколько комплексных чисел w, то говорят, что на множестве E задана ***функция*** $f(z) = w$ комплексного переменного.

Если каждому z соответствует лишь одно значение w, то функция называется ***однозначной***, если некоторым z соответствует более чем одно значение w — ***многозначной***. Так, $f(z) = e^z$, $f(z) = z^n$ и $\arg z$ — однозначные функции. Примерами многозначных функций могут служить $f(z) = \sqrt[n]{z}$ (n различных значений) и $f(z) = \operatorname{Arg} z$ (бесконечно много различных значений). Пусть f, g — две многозначные функции, тогда

$$f(z) = g(z) \Leftrightarrow \{f(z)\} = \{g(z)\}.$$

Другими словами, две многозначные функции ***равны*** в точке z, если совпадают множества их значений в данной точке.

Любая функция комплексного переменного может быть записана в виде

$$f(z) = u(z) + iv(z) \quad \text{или} \quad f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

где $u(x,y)$, $v(x,y)$ — действительнозначные функции. Функция u называется действительной частью f и обозначается $u = \operatorname{Re} f$, v — мнимая часть f и обозначается $v = \operatorname{Im} f$.

5.1. Предел и непрерывность

> Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется ***пределом*** функции f в точке z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся тоакое $\delta > 0$, что для всех чисел z таких, что $0 < |z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$.

Стандартное обозначение:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lambda.$$

Для существования предела функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно одновременное существование пределов функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0):

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = a \quad \text{и} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = b,$$

где $\lambda = a + ib$.

> Функция $f(z)$ называется ***непрерывной*** в точке z_0, если
>
> $$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Непрерывность функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, как функции комплексного переменного z, эквивалентна одновременной непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0), как функций двух действительных переменных.

Более подробно см. [1].

5.2. Экспонента и тригонометрические функции

Мы уже встречались с комплексной экспонентой в п. 2.3.1.. Напомним, что по определению

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Используя свойство $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ и формулу Эйлера, можно получить

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

т. е.

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

откуда находим

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{53}$$

Учитывая эти соотношения, определим косинус и синус комплексного переменного:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Все тригонометрические тождества верны и в случае комплексного переменного:

1) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1;$
2) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1;$
3) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$
4) $\sin z_1 + \sin z_2 = 2 \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2};$
5) $\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2}.$

Кроме того, полезно помнить, что

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{и} \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Определены тангенс и котангенс комплексного переменного:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Гиперболические косинус и синус определяются следующим образом:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

Выполняются свойства:

1) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1;$
2) $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_2 \operatorname{ch} z_1;$
3) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2;$
4) $\operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 = 2 \operatorname{sh} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 - z_2}{2};$
5) $\operatorname{ch} z_1 + \operatorname{ch} z_2 = 2 \operatorname{ch} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 - z_2}{2}.$

Также

$$\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z \quad \text{и} \quad \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z.$$

Определены гиперболические тангенс и котангенс комплексного переменного:

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны следующими соотношениями:

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \qquad \sin iz = i \operatorname{sh} z. \tag{54}$$

Важным классом функций комплексного переменного являются периодические функции.

> Функция комплексного переменного $f(z)$ называется ***периодической***, если найдётся такое число $T \in \mathbb{C}$, $T \neq 0$, что
>
> $$f(z+T) = f(z) \qquad \text{для всех } z \in \mathbb{C}.$$

Все приведённые выше тригонометрические и гиперболические функции являются периодическими. Например, $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$, другими словами, e^z — периодическая функция с периодом $T = 2\pi i$

Свойства периодичности

$f(z)$	T
$\sin z$, $\cos z$	2π
$\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$	π
$\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$	$2\pi i$
$\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$	πi
e^z	$2\pi i$

Пример 51. *Для функции*

$$f(z) = e^{e^z}$$

найти значение $f(i)$.

Решение. Имеем $e^i = \cos 1 + i\sin 1$. Далее

$$e^{e^i} = e^{\cos 1 + i\sin 1} = e^{\cos 1} e^{i\sin 1}.$$

В свою очередь $e^{i\sin 1} = \cos(\sin 1) + i\sin(\sin 1)$. Тогда окончательно

$$f(i) = e^{\cos 1}(\cos(\sin 1) + i\sin(\sin 1)).$$

$\triangle$

Пример 52. *Функцию* $f(z) = \cos z$ *записать в виде* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *и найти* $|\cos z|$.

Решение. 1. Применяя формулу косинуса суммы и (54), имеем

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cos iy - \sin x\sin iy = \cos x \operatorname{ch} y - \sin x \cdot i \operatorname{sh} y.$$

Таким образом,

$$\cos z = u(x,y) + iv(x,y),$$

где $u(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y$ и $v(x,y) = -\sin x \operatorname{sh} y$.

2. Вычислим модуль $|\cos z| = \sqrt{u^2 + v^2}$:

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 y} =$$
$$\sqrt{\cos^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y + (1 - \cos^2 x) \cdot \operatorname{sh}^2 y} =$$
$$\sqrt{\cos^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y - \cos^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 y} =$$
$$\sqrt{\cos^2 x \cdot (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) + \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$$

Заметим, что также верно $|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$. $\triangle$

Подчеркнём, что комплексные синус и косинус не являются ограниченными функциями. Более того, каждая из этих функций может принимать любые значения.

Пример 53. *Найти такие* z, *что:*

$$1)\ \operatorname{Re}\cos z = 0, \qquad 2)\ \operatorname{Im}\cos z = 0.$$

Решение. Из примера 52.

$$\operatorname{Re}\cos z = \cos x \operatorname{ch} y \quad \text{и} \quad \operatorname{Im}\cos z = -\sin x \operatorname{sh} y.$$

1) Функция $\operatorname{ch} y \neq 0$ для всех вещественных y. Поэтому $\operatorname{Re}\cos z = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$. Таким образом, $\operatorname{Re}\cos z = 0$ для $z = \frac{\pi}{2} + \pi k + iy$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{R}$ — любое.

2) $\operatorname{Im}\cos z = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ или $\operatorname{sh} y = 0$. Значит, $\operatorname{Im}\cos z = 0$ при $z = \pi k + iy$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{R}$ — любое и при $z = x$, $x \in \mathbb{R}$ — любое $(y = 0)$. △

Пример 54. *Вычислить сумму*

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = 1 + \cos x + \dots + \cos nx,$$

где $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Из соотношений (53) имеем $\cos kx = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{k=n} \cos kx = 1 + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \dots + \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} =$$

$$\frac{1}{2}(1 + e^{ix} + \dots + e^{inx}) + \frac{1}{2}(1 + e^{-ix} + \dots + e^{-inx}).$$

Используя формулу частичной суммы геометрической прогрессии (45), имеем

$$(1 + e^{ix} + \dots + e^{inx}) = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}},$$

$$(1 + e^{-ix} + \dots + e^{-inx}) = \frac{1 - e^{-i(n+1)x}}{1 - e^{-ix}}.$$

Снова используя соотношения (53), получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} + \frac{1-e^{-i(n+1)x}}{1-e^{-ix}}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{inx}-e^{-ix}-e^{i(n+1)x}+1+e^{-inx}-e^{ix}-e^{-i(n+1)x}+1}{(1-e^{ix})\cdot(1-e^{-ix})}\right) =$$

$$\frac{\cos nx - \cos x - \cos((n+1)x)+1}{2(1-\cos x)}.$$

△

5.3. Комплексный логарифм

Напомним, что

> Функция $f^{-1}(w)$ называется ***обратной*** к $f(z)$, если
>
> $$f^{-1}(f(z)) = z \quad \text{и} \quad f(f^{-1}(w)) = w \quad \text{для всех } z, w \in \mathbb{C}.$$

> ***Комплексный логарифм*** $\operatorname{Ln} z$ является обратной функцией к комплексной экспоненте e^z и определяется равенством
>
> $$e^{\operatorname{Ln} z} = z.$$

Пусть $\operatorname{Ln} z = u(z) + iv(z)$, где $u(z)$ и $v(z)$ — действительнозначные функции. Тогда в соответствии с определением имеем

$$z = e^{u(z)+iv(z)} = e^{u(z)}e^{iv(z)}.$$

Отсюда получаем $|z| = e^{u(z)}$ и $\operatorname{Arg} z = v(z)$ или $u(z) = \ln|z|$ и $v(v) = \arg z + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $|z| \neq 0$ (здесь $\ln|z|$ — это логарифм от положительного числа). Следовательно, мы можем записать формулу для комплексного логарифма:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + 2\pi k i, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}. \tag{55}$$

Таким образом, комплексный логарифм является многозначной функций.

Главным значением комплексного логарифма называется функция

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Заметим, что главное значение комплексного логарифма для положительных вещественных чисел совпадает с «обычным» логарифмом, а для отрицательных нужно вычислить «обычный» логарифм модуля и прибавить $i\pi$. Например, $\ln(-5) = \ln 5 + i\pi$.

Пример 55. *Вычислить* $\operatorname{Ln} 1$, $\operatorname{Ln}(-1)$ *и* $\operatorname{Ln} i$.

Решение. В соответствии с формулой (55) имеем

$$\operatorname{Ln} 1 = \ln 1 + i \arg 1 + 2\pi k i = 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \arg(-1) + 2\pi k i = \pi i + 2\pi k i = \pi i(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

и

$$\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i \arg(i) + 2\pi k i = 0 + i\frac{\pi}{2} + 2\pi k i = \pi i(\frac{1}{2} + 2k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

△

Отметим, что и в комплексном случае логарифм нуля не определён.

5.4. Показательная и степенная функции

Определим показательную функцию.

Пусть $a \in Z$ и $a \neq 0$, тогда

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} = e^{z(\ln|a| + i \arg a + 2\pi k i)}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Функция $f(z) = a^z$ является многозначной функцией. Однако ***главное значение показательной функции*** $a^z = a^{\ln z}$ является однозначной функцией.

В п. 1.2.1. мы определили операцию возведения комплексного числа в целую степень. Возведение в комплексную степень определяют следующим образом:

> Пусть $z, \alpha \in \mathbb{C}$ и $z \neq 0$, тогда
>
> $$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha(\ln|z| + i\arg z + 2\pi k i)}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, в общем случае функция $f(z) = z^\alpha$ является многозначной. Однако выполняются следующие свойства:

$$f(z) = z^\alpha \text{— однозначная функция } \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$$

и

$$f(z) = z^\alpha \text{— конечнозначная функция } \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Так, корень n-й степени $f(z) = z^{1/k}$ принимает ровно n различных значений. Кроме того, мы можем записать следующую формулу извлечения корня n-й степени:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha(\ln|z| + i\arg z + 2\pi k i)}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 56. *Вычислить все значения* $1^{\sqrt{2}}$.

Решение. Имеем

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{2\sqrt{2}\pi k i} = \cos 2\sqrt{2}\pi k + i \sin 2\sqrt{2}\pi k.$$

Число $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, и поэтому $1^{\sqrt{2}}$ принимает бесконечно много различных значений. △

Пример 57. *Вычислить* i^i.

Решение. Из примера 55. $\operatorname{Ln} i = \pi i \cdot (\frac{1}{2} + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{-\pi(2k + \frac{1}{2})}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку k принимает целые значения (в том числе и отрицательные), то также верно, что

$$i^i = e^{\pi(2k - \frac{1}{2})}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$\triangle$

Заметим, что $i^i \cdot i^{-i} \neq 1$, а корректная запись $i^i \cdot i^{-i} = e^{2\pi k}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

5.5. Обратные тригонометрические функции

Обратные тригонометрические функции $\operatorname{Arcsin} z$ и $\operatorname{Arccos} z$ определяются из условий

$$\sin(\operatorname{Arcsin} z) = z \quad \text{и} \quad \cos(\operatorname{Arccos} z) = z.$$

Выведем формулу для $\operatorname{Arcsin} z$. Обозначим $w = \operatorname{Arcsin} z$, тогда

$$\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \quad \text{или} \quad \sin w = \frac{u - \frac{1}{u}}{2i} = z,$$

где $u = e^{iw}$. Отсюда приходим к уравнению

$$u^2 + -2izu - 1 = 0,$$

решая которое, находим

$$u = iz + \sqrt{i^2 z^2 + 1} = iz + \sqrt{i^2 z^2 - i^2} = iz + i\sqrt{z^2 - 1}.$$

Здесь имеется в виду комплексный квадратный корень, который принимает два значения. Получаем $e^{iw} = i(z + \sqrt{z^2 - 1})$, или

$$iw = \operatorname{Ln} i(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Отсюда получаем формулу

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} i(z + \sqrt{z^2 - 1}). \tag{56}$$

Аналогичным способом можно получить формулу

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Пример 58. *Найти все значения* $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}$.

Решение. По формуле (56) имеем

$$\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2} = -i\operatorname{Ln} i(\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}) = -i\operatorname{Ln}(\frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}) =$$
$$-i(\ln|\frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}| + i\arg(\frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}) + 2k\pi i) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi. \end{cases}$$

△

Пример 59. *Найти все такие* $z \in \mathbb{C}$, *что* $\sin z + \cos z = 2$.

Решение. Умножая обе части равенства на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и применяя формулу для синуса суммы, переходим к эквивалентному равенству

$$\sin(z + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2},$$

откуда получаем

$$z = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{Arcsin}\sqrt{2}.$$

Далее

$$\operatorname{Arcsin}\sqrt{2} = -i\operatorname{Ln} i(\sqrt{2} + \sqrt{2-1}) = i\operatorname{Ln} i(\sqrt{2} \pm 1) = -i\operatorname{Ln}(i\sqrt{2} \pm i).$$

Вычислим логарифм:

$$\operatorname{Ln}(i\sqrt{2} \pm i) = \ln|i\sqrt{2} \pm i| + i\arg(i\sqrt{2} \pm i) + 2k\pi i =$$
$$\ln(\sqrt{2} \pm 1) + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i.$$

В итоге

$$z = -\frac{\pi}{4} - i\ln(\sqrt{2} \pm 1) + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

△

Пример 60. *При каких* $a \in \mathbb{C}$ *разрешимо уравнение*

$$\operatorname{th} z + \operatorname{cth} z = a?$$

Решение. Имеем

$$\operatorname{th} z + \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} + \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{\operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z}{\operatorname{ch} z \operatorname{sh} z} = a.$$

Применяя формулы для гиперболических функций (см. с. 88), получим

$$\frac{\operatorname{ch} 2z}{\operatorname{sh} 2z} = \frac{a}{2} \quad \text{или} \quad \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{e^{2z} - e^{-2z}} = \frac{a}{2}.$$

Обозначим $u = e^{4z}$, тогда уравнение можно переписать в виде

$$u + 1 = \frac{a}{2}(u - 1),$$

откуда находим $e^{4z} = u = \dfrac{a+2}{a-2}$. Таким образом,

$$z = \frac{1}{4} \operatorname{Ln} \frac{a+2}{a-2}.$$

Комплексный логарифм определён всюду, кроме нуля. Следовательно, уравнение разрешимо для всех a, таких, что $a \neq \pm 2$.

Задачи к главе 5

81. Показать, что функция $f(z) = |z|$ непрерывна при любом z.

82. Для функции

$$f(z) = e^{e^z}$$

найти значение $f(1 + i\pi/2)$.

83. Функцию $f(z) = \sin z$ записать в виде $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ и найти $|\sin z|$.

84. Найти такие z, что

$$1) \operatorname{Re} \sin z = 0, \qquad 2) \operatorname{Im} \sin z = 0.$$

85. Функцию $\operatorname{tg} z$ записать в виде $\operatorname{tg}(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ и найти $|\operatorname{tg} z|$.

86. Показать, что $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ и $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$.

87. Вычислить $\ln 1$ и $\ln(-1)$.

88. Вычислить 1^{-i}.

Термины к главе 5

арккóсинус (арк-косинус)	$\arccos z$	反余弦
арксúнус (арк-синус)	$\arcsin z$	反正弦
ареакóсинус гиперболúческий	$\operatorname{arch} z$	双曲区余弦
ареасúнус гиперболúческий	$\operatorname{arsh} z$	双曲区正弦
арккотáнгенс	$\operatorname{arcctg} z$	反余切
арктáнгенс	$\operatorname{arctg} z$	反正切
гиперболúческий кóсинус	$\operatorname{ch} z$	双曲线余弦
гиперболúческий сúнус	$\operatorname{sh} z$	双曲线正弦
значéние фýнкции	$w = f(z)$	函数值
комплéксная фýнкция	$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$	复变数函数
комплéксная экспонéнта	e^z	复变指数
кóсинус	$\cos z$	余弦
котáнгенс	$\operatorname{ctg} z$	余切
логарúфм	$\operatorname{Ln} z$	对数
непрерывная фýнкция	$f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$	连续函数

пери́од фу́нкции	T	函数的周期
периоди́ческая фу́нкция	$f(z+T)=f(z)$	周期函数
показа́тельная фу́нкция	a^z	指数函数
преде́л фу́нкции	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$	函数的极限
преде́л фу́нкции в то́чке	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$	函数在点上的极限
си́нус	$\sin z$	正弦
сте́пенная фу́нкция	z^α	幂函数
та́нгенс	$\operatorname{tg} z$	正切
тригонометри́ческая фу́нкция	$\sin, \cos, \operatorname{tg}, \ldots$	三角函数

Словарь

аксиоматúческий мéтод		公理化方法
áлгебра		代数学, 代数
алгебраúческое выражéние		代数式
алгебраúческое доказáтельство		代数证明
арифметúческое дéйствие		算术演算
аргумéнт		(数)宗数； 自变数； 论据
бесконéчность	∞	无限; 无穷(性)
бóльше	$>$	大于
бóльше úли равнó	$\geqslant$	大于或等于
вершúна квадрáта		正方形的顶点
вещéственная перéменная		实数变量(变数)
вещéственное числó (действúтельное числó)	$x \in \mathbb{R}$	实数
вещéственно-знáчная фýнкция		实值函数
возвестú-возводúть в квадрáт	x^2	自乘
вопрóс	?	问题
вы́делить-выделя́ть пóлный квадрáт	$(a+b)^2$	推导出整方(完全平方)
выражение		表达式
вычислить-вычислять		计算出, 算出

геоме́трия		几何学; 几何形状
гипотену́за		斜边; 直角三角形的弦
гра́фик		图表, 表格; [数]图像, 图形; 曲线图; 进度表
гра́фик фу́нкции		函数表
де́йствие		[数]演算, 运算; 作用, 效应; 行动, 动作, 操作
для всех	$\forall$	适用于所有人
доказа́тельство		证明, 论证, 证据
доказа́ть-дока́зывать		证明, 证实; 检验
дома́шнее зада́ние		家庭作业(习题、课题)
дома́шняя зада́ча		课后题(算题)
дробь	$\frac{a}{b}$	[阴] 小数, 分数
едини́ца	1	一个；单位；单元
Есть ли вопро́сы?		大家有没有问题?
зада́ча		课题, 算题; 任务, 使命
замеча́ние		说明; 评语, 意见
заме́на переме́нной		变数更换, 变元
зачёт		测验, 考查
звезда́		星, 恒星; 星形物
звёздочка	$*$	星形物; 星形分电器; 链轮, 星形轮; 闪光轮

знак		符号, 记号, 标证, 标志
знак ми́нуса	$-$	减号, 负号
знак нера́венства	$\neq$	不等号
знак плю́са	$+$	加号; 正号
знак ра́венства	$=$	等号
знамена́тель		分母; 级数的公比
знамена́тель дро́би	$\frac{a}{\mathbf{b}}$	分数的分母
изуча́ть		研究, 调查, 学习
интерва́л		[物]音程; 间隔, 时间间隔; 范围, 区间
интервал веще́ственных чи́сел		实数的区间
и́нфимум	$\inf$	下确界
испра́вить-исправля́ть оши́бку		改正错误
ка́тет		直角边, 股
квадра́т		方; 平方; [电]接线方柱; 方格
квадра́т числа́	x^2	数的平方
контро́льная рабо́та		平时的测验
ко́рень квадра́тный	$\sqrt{}$	平方根
ко́рень многочле́на		多项式的根
ко́рень уравне́ния		方程的根
коэффицие́нт		系数, 因数, 常数, 率, 比

коэффицие́нт многочле́на		多项式的系数
круг		圆, 圈; 范围
ле́вая часть ра́венства	$\mathbf{a} = b$	等式的左侧部分
ле́кция		课堂; 报告, 讲座
ле́мма		引理, 辅助定理
лине́йная а́лгебра		线性代数
лине́йное преобразова́ние		线性变换
лине́йность		直线性, 直线度
лине́йность преобразова́ния		变换的直线性
ма́сса	m	[物]质量; [技]体质, 物质; 总量, 大量
матема́тика		数学
математи́ческая тео́рия		数学理论
математи́ческий ана́лиз		数学分析
ме́ньше	$<$	小于
ме́ньше и́ли ра́вен	$\leqslant$	小于或等于
контро́льная рабо́та		平时的测验
ми́нус	$-$	减, 负号, 负值
многочле́н	$a_n x^n + \cdots$	多项式
мно́жество		集合

мно́житель		因数, 乘数
моно́м		单项式
напомина́ние		提醒
напо́мнить-напомина́ть		提醒, 使想起, 使记起
направле́ние обхо́да		转动方向，绕飞方向
направле́ние обхо́да по часово́й стре́лке	$\circlearrowright$	顺时针转动
направле́ние обхо́да про́тив часово́й стре́лки	$\circlearrowleft$	逆时针转动
нарисова́ть-рисова́ть		描绘, 描画
натура́льное число́	$n \in \mathbb{N}$	自然数
нача́ло		[数]原点; 原理; 原则; 基础; 定律
нача́ло координа́т	$(0,0)$	坐标原点
незави́симая переме́нная		自变数
нера́венство		不相等, 不等; [数]不等式; 不平衡
нестро́гое нера́венство	$\leqslant, \geqslant$	不严格不等式
нечётная фу́нкция	$f(-x) = -f(x)$	奇函数
ну́жно доказа́ть		需要证明
нуль	0	零
нуль фу́нкции	$f(x) = 0$	函数的零点
о́бласть		区域, 部分; 领域, 范围, 方面

о́бласть определе́ния фу́нкции		函数的定义范围
обра́тная теоре́ма		逆定理
обра́тная функция	f^{-1}	反函数
обозначе́ние		符号, 标记, 记号, 表示
обоснова́ние		根据, 基础; 论证, 理由
обоснова́ть-обосно́вывать		论证, 提出根据; 说明理由
объясне́ние		解释, 说明; 说明书
объясни́ть-объясня́ть		解释, 说明
объясни́ть-объясня́ть на приме́ре		用例子证明
ограни́ченная о́бласть		限制区
одночле́н		单项式
окре́стность		[数]邻域
окру́жность		圆, 圆周
определи́ть-определя́ть		测定, 确定, 规定; 算出, 求出; 下定义
определе́ние		算出, 求出; 测定, 确定; 定义
отве́т		答案, 回答, 应答
отре́зок		[数]线段, 截距; 断片, 切片; 一段, 一块(布料及材料等)
отре́зок прямо́й (отре́зок прямолине́йный)		直线段

отрица́тельное число́	$x < 0$	负数
оши́бка		误差; 错误
пара́метр		参数, 变数; 数据, [矿]标轴
пе́рвый слу́чай		第一种情况
переры́в		休息, 停, 中断, 间歇
переры́в ме́жду уро́ками		课间休息
пере́менная (пере́менное число́)	x	变数, 变量
перемно́жить-перемножа́ть два числа́	$a \cdot b$	将两个数互乘
перемно́жить со-мно́жители		将多个余因子 (余因式, 相乘数) 互乘
пло́щадь		面积, 广场
плюс	$+$	加, 加号; 正(值);有余
подмно́жество	$A \subset B$	子集, 子集合
подмно́жество мно́жества		集合的子集
подо́бные		相似, 相同(项)
подо́бные чле́ны		同类项
показа́тель		[数]指数, 幂数; 率; 指标, 指示器; 指示剂
положи́тельное число́	$x > 0$	正数
поня́тие		概念, 观念

пра́вая часть ра́венства	$a = \mathbf{b}$	等式的右端
пра́вило		定则, 规则, 法则; 定律; 条例, 规程, 章程; 要领
пра́вило Ле́йбница	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	莱布尼茨定则
пра́вильно		正确
пра́вильное реше́ние		正确的解答 (解法, 解题)
предположи́ть-предполага́ть		假定, 假设
предположе́ние		假设, 假定, 推测; 打算, 预定, 猜想
преобразова́ние		变换, 转变, 转换; 改造, 改革, 换算
преобразова́ние выраже́ния		奇函数
привести́ подо́бные		[数]取消, 相约
привести́ подо́бные чле́ны		合并同类项
приме́р		例题, 例子, 示例; 榜样, 范本
продолжи́ть вычисле́ния		继续计算(运算)
произведе́ние чи́сел	$a \cdot b$	数的乘积
произво́дная	$f',\ \frac{d}{dx}f$	导数, 微商
произво́дная поря́дка n	$f^{(n)},\ \frac{d^n}{dx^n}f$	n阶导数
прямá́я		直线; [数]正(比例)

прямáя лúния		直线; 直通线
пусть		[数]假定, 设, 令
пусть данó, что		设给定...
рáвенство	$a = b$	[数]等式; 相等, 平衡
рáдиус		半径
рáдиус окрýжности	r	圆的半径
разложéние		[化]分解(作用); 解体, 崩溃, 腐败; [数]分解, 展开(式)
разложúть-разлагáть		[专]分解; [转]使分化, 使瓦解, 使腐化
разложúть многочлéн на мнóжители		将多项式的因子分解
раскрьíть-раскрывать скóбки		去括号
рассказáть-расскáзывать решéние		讲一讲解题方法
расстоя́ние		距离, 间隔
рационáльное числó	$x \in \mathbb{Q}$	有理数
результáт		结果; 效果, 成果
решéние		解答, 解法, 解题, 演算; 决议, 决定, 方案; 处理
решúть-решáть		决定, 拿定主意; 作出决议或判决; 答出, 解开(算题等); 解决(问题等)
решúть задáчу		解开题

реши́ть уравне́ние		解方程式
сво́йство		性能, 性质, 特性
сдвиг		位移, 移动; 剪移, 剪切; [地]断层
семина́р		课堂讨论
ско́бка	()	括号
слага́емое		[数]被加数; 部分
сле́дствие		结果, 后果
сле́дствие из теоре́мы		定理的结果
сложе́ние	$+$	构成, 合成, 构造; [数]加
сложи́ть два числа́	$a+b$	将两个数相加
слу́чай		事件, 事故; 情况; 机会
содержа́ние ку́рса		课程内容
содержа́ть		设置; 包含; 维持, 保持
содержа́ть внутри́ себя́		本身内部包含
сократи́ть-сокраща́ть		缩短, 减缩, 减少; [数]约, 除
сократи́ть подо́бные чле́ны		合并同类项
сомно́житель		余因式, 余因子, 相乘数
соотноше́ние		关系, 比, 比例
спо́соб реше́ния зада́чи		解题方法

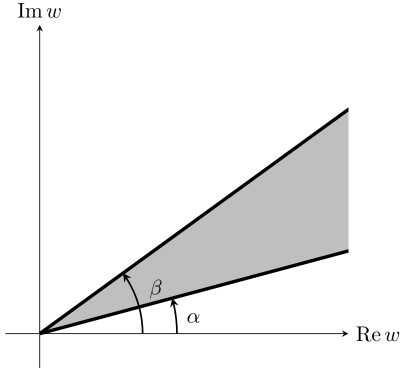
сторона́		面; 方面, 方向; 边, 侧, 端
сторона́ треуго́льника		三角形的边
стро́гое нера́венство		严格不等式. . .
су́мма	$\sum$	和, 总数, 总额; 金额, 款额
су́мма чи́сел		数的总和, 总数
существова́ние		存在
существу́ет (существова́ть)	$\exists$	存在
теоре́ма		定理
теоре́ма Пифаго́ра	$c^2 = a^2 + b^2$	商高定理, 毕氏定理
тео́рия фу́нкций ко́мплексного переме́нного		综合可变函数论
тип		型, 式; 种类, 型别
тогда́		则, 那么(就)
то есть		即, 也就是说
то же са́мое		同样的(情况)
то́чка		点; [机]车; 磨, 磨快; 俄厘
то́чная ве́рхняя грани́ца	sup	精确的上限
то́чная ни́жняя грани́ца	inf	精确的下限
треуго́льник		三角形; 三角板; 三角符号(表示表面光洁度)
тригономе́трия		三角学

тригонометри́ческая фо́рмула		三角函数公式
тригонометри́ческая фу́нкция		三角函数
убыва́ть-убы́ть		减少, 缩小, 降低, 下落
убыва́ющая фу́нкция		减函数
у́гол	$\angle$	角, 角度; 角位, 角隅, 角部
у́гол ме́жду вектора́ми		向量(矢量)间的角
умноже́ние		[数]乘法; 乘; 倍增, 增加
умноже́ние чи́сел	$a \cdot b$	数相乘
упрости́ть-упроща́ть выраже́ние		简化表达式
уравне́ние		方程, 方程式; 反应式
уро́к		功课; 课, 一堂课; 授课时间
усло́вие зада́чи		题目的条件
фа́за		相, 相位; 阶段; 时期; 周期
фи́зик		物理系学生; 物理学家
фи́зика		物理
физи́ческая зада́ча		物理学问题
фо́рмула		公式, 式
фу́нкция	$f(z)$	函数; 机能; 职能; 作用, 功用
це́лое число́	$k \in \mathbb{Z}$	整数

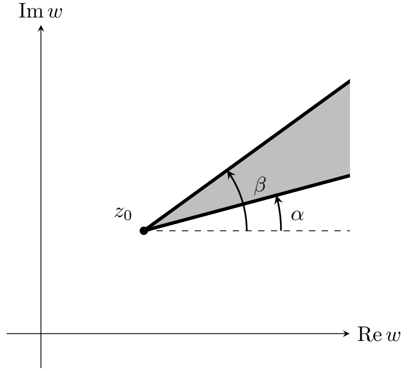
центр		中心; 顶尖, 顶针
центр кру́га		圆心
ча́стная произво́дная	$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$	偏导数, 偏微商
черта́		线, 标线; 特点; 轮廓; 界线; [数]线括(号)
чёрточка		(指小)线, 线条; 特点, 特征
чётная фу́нкция	$f(-x) = f(x)$	偶函数
числи́тель		(分数的)分子
числи́тель дро́би	$\frac{\mathbf{a}}{b}$	分数的分子
число́		数
что и тре́бовалось доказа́ть	Q.E.D.	这就是需要证明的部分
штрих	$'$	影线, 细线条; 锉痕, 锉纹; 划分, 分划线
экза́мен		考试
экспоне́нта	e^x	指数; 指数曲线

Ответы

1. а) $-2i$; б) $-2+2i$; в) $-i$. **2.** $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{1}{2}$. **3.** $40-32i$. **4.** а) $-i$; б) -1; в) 1; г) $-i$. **5.** а) $2i$; б) $-2-2i$; в) -4; г) $-4+4i$. **6.** $10+38.2i$. **7.** а) $1-4i$; б) $-7+14i$; в) $33+47i$; г) $-\dfrac{57}{97}-\dfrac{7}{97}i$; д) $-16-30i$. **8.** $2-2\sqrt{3}i$. **9.** 1. **10.** $-4i$. **11.** -8. **12.** $-\sqrt{3}+i$ и $\sqrt{3}-i$. **13.** $z=t+i\frac{3}{5}t$, где $t\in\mathbb{R}$. **14.** $\operatorname{Re}z^2=x^2-y^2$, $\operatorname{Im}z^2=2xy$. **15.** См. пример 5. **16.** $1+i$ **17.** $1+i$ **18.** i. **19.** 0 **20.** $\operatorname{Re}z=0$, т. е. все чисто мнимые числа. **21.** $|z|=50\sqrt{2929}$. **22.**Указание: $|i-1|=\sqrt{2}$. **23.** Указание: по неравенству треугольника $|z^n+a|\leqslant|z^n|+|a|=1+|a|$, далее найти z при которых равенство достигается. **24.** $\operatorname{Im}z=3/2$. **25.** -1. **26.** $z=(\pm1\pm i)/\sqrt{2}$. **27.** $z=\pm\frac{1}{2},\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **28.** 6. **29.** $|z|=\sqrt{2}$, $\arg z=\frac{7\pi}{4}$. **30.** $z=\sqrt{3}+i$. **31.** См. рисунки ниже

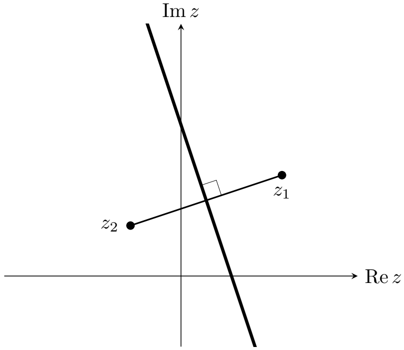


к задаче 31 **а)**

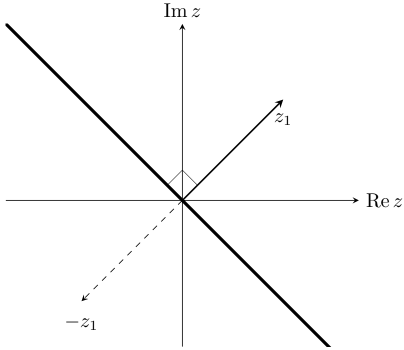


к задаче 31 **б)**

32. Эллипс с фокусами в точках $-i$ и i, каноническое уравнение $\frac{x^2}{63}+\frac{y^2}{64}=1$. **33.** См. рисунки ниже

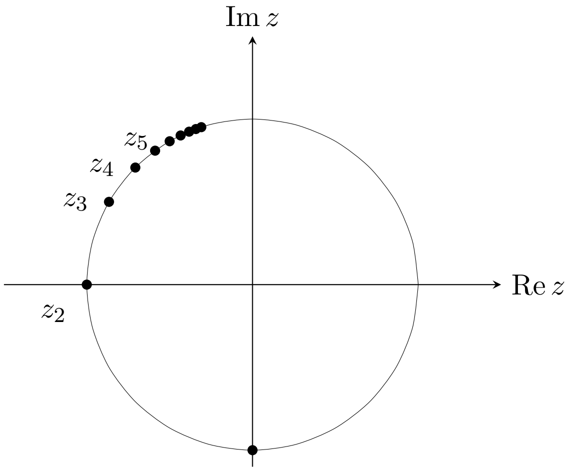


к задаче 33 а)



к задаче 33 б)

34. $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$. **35.** $4(\cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3)$. **36.** $\sqrt{2}(\cos\pi/12 + i\sin\pi/12)$. **37.** $-i\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. **38.** $3 + i3\sqrt{3}$ **39.** -512 **40.** -1. Указание: см. пример 16.. **41.** а) $u = 2^{13}$; б) $v = 2^{13}\sqrt{3}$. **42.** $\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$, $\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$ **43.** $(2i)^n\cdot\sin^n\varphi\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, указание: см. пример 18. **44.** $\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\cdot\left(\cos\frac{n\theta}{2} + i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$. **45.** $(1+i)^n + (1-i)^n = 2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}$. **46.** $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$. **47.** а) $\cos\alpha e^{-i\alpha}$; б) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$; в) Используя результат задачи 46, получим $2\sqrt{2}e^{5i\frac{\pi}{6}}$; г) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{i\frac{23\pi}{12}}$; д) $2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$; е) $2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha-\pi}{2}}$; ж) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}e^{i(\alpha-\beta)}$. **49.** Указание: предствить числа z_1, z_2 в показательной форме. **50.** а) $\left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$, б) $\left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, в) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$. **51.** $z_1\overline{z}_2 = -1$. **52.** Семейство окружностей, касающихся друг друга в полюсе. **53.** $z_n = \frac{(3n+1)i}{1+n}$. **54.** $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2 + 2i$, $z_4 = -4$, $z_5 = -4 - 4i$. **55.** $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \frac{3}{2} + i$. **56.** -2 **57.** i **58.** а) $-i$; б) i; в) 0; г) 0. **59.** $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = i$, см. рисунок, приведенный ниже. **60.** $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.



Десять первых элементов последовательности $z_n = ie^{i\frac{\pi}{n}}$

61. Расходится. **62.** Указание: проверить необходимый признак сходимости. **63.** $s_n = \frac{1-(1/2i)^n}{2i-1}$, $s = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. **64.** $-1+i$. **65.** $q = 2i$, $a_n = i \cdot (2i)^{n-1}$. **66.** $s_n = z \cdot \frac{1-(z/2)^n}{2-z}$ если $z \neq 2$, $s_n = n$, если $z = 2$. **67.** $1 + (1+\sqrt{2})i$, см. также пример 40. **68.** $1/(5z^2 - z^3)$. **69.** $|a_n| = \frac{(\sqrt{2})^{n-1}}{n!}$, далее воспользоваться признаком Даламбера. **70.** Расходится. Указание: показать расходимость действительных частей. **71.** Сходится абсолютно, сумма ряда $\frac{1}{4} - i$. **72.** Сходится абсолютно. **73.** а) сходится абсолютно, б) расходится, в) сходится условно, г) сходится абсолютно. **74.** Сходится условно (по признаку Дирихле). **75.** $P(\pi/2) = \pi/4 + \ln(2)/2$, $P(\pi) = \ln 2$. **76.** а) При $\alpha > 0$, б) при $\alpha > 1$, в) при $\alpha > 0$, г) при любом α. **77.** $1/4$. **78.** $1/e$, указание: использовать свойство $\cos iz = \operatorname{ch} z$, см. пункт 5.2.. **79.** а) 1; б) ∞; в) $1/4$. **80.** а) сходится абсолютно при $|z| < 1$ и расходится при $|z| \geqslant 1$; б) сходится абсолютно при $|z| < 1$, сходится условно при $|z| = 1$ и $z \neq 1$; расходится при $|z| > 1$ и при $z = 1$. **81.** Указание: воспользоваться неравенством $||z| - |z_0|| \leqslant |z - z_0|$. **82.** $\cos e + i \sin e$. **83.** $\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x$, $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$. **84.** 1) $\operatorname{Re} \sin z = 0$ при $z = \pi k + iy$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{R}$. 2) $\operatorname{Im} \sin z = 0$ при $z = x$, где $x \in \mathbb{R}$ и при $z = \frac{\pi}{2} + \pi k + iy$, где $k \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$. **85.** $\operatorname{tg}(x+iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x \operatorname{ch} 2y}$, $|\operatorname{tg} z| = \frac{\sqrt{\sin^2 2x + \operatorname{sh}^2 2y}}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$. **86.** Указание:

записать функции в виде $f(z) = u + iv$, откуда $\overline{f(z)} = u - iv$, затем воспользоваться свойствами чётности тригонометрических функций.
87. $\ln 1 = 0$, $\ln(-1) = i\pi$. **88.** $e^{2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Список литературы

1. Бицадзе А. В. *Основы теории аналитических функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1972.
2. Бугуева Т. В. *Основы математического анализа. Теоретический и практический тренинг.* Новосибирск: НГУ, 2012.
3. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Абрамович И. Г. *Сборник задач по теории фукций комплексного переменного.* М.: Физматлит, 2002.
4. Евграфов М.А., Сидоров Ю. В., Федорюк М.В., Шабунин М. И., Бежанов К. А., . *Сборник задач по теории аналитических фукций комплексного переменного.* М.: Наука, 1972.
5. Маркушевич А. И. *Теория аналитических функций. Т. 1, 2.* М.: Наука, 1967.
6. Привалов И. И. *Введение в теорию функций комплексного переменного.* М.: Физматлит, 1984.
7. Лавреньтьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1987.
8. Романов А. С. *Теория функций комплексного переменного. Записки лектора.* Новосибирск: НГУ, 2009.
9. Тихонов А. Н. Свешников А. Г. *Теорию функций комплексной переменной.* Курс высшей математики и математической физики 4. М.: Физматлит, 2005.
10. Кантор И. Л. Солодоников А. С. *Гиперкомплексные числа.* М.: Наука, 1973.

Предметный указатель