

Элементы гармонического анализа
傅里叶分析要素

Н. А. Евсеев

Предисловие

Это пособие посвящено заключительной части курса «Комплексный анализ», читаемому студентам физикам Китайско-российского института Хэйлунцзянского университета.

Текст разделён на четыре главы. В первой главе собраны необходимые сведения, общие для всего пособия. Остальные три главы посвящены преобразованию Лапласа, ряду Фурье и преобразованию Фурье. При подготовке основными источниками являлись [1–4], а также [5–8].

В заключении каждой главы приводится краткое содержание и список ключевых математических терминов с переводом на китайский язык. Помощь в переводе оказали сотрудники канцелярии Китайско-российского института, а словарь составили В. А. Александров и Ван Цян (王强).

Новосибирск, Харбин 2017

序言

此为《复分析》教科书最后一部分序言，该书用于黑龙江学院应用物理专业学生使用。该书分为三章，每一章分别包含傅里叶级数，傅里叶变换以及拉普拉斯变换的理论与实践材料。每章结尾均有数学术语目录并配有汉语翻译。亚历山大罗夫(В. А. Александров)提供术语分类词条，由王强翻译为汉语。

2017年，哈尔滨

Оглавление

1	Предварительные сведения	5
1.1	Функция Хевисайда и импульсы	5
1.2	Свёртка	9
1.3	δ -образные последовательности	15
1.3.1	δ -функция	17
1.4	Лемма Римана—Лебега	19
1.5	Интеграл Эйлера—Пуассона	22
1.6		24
2	Преобразование Лапласа	25
2.1	Аналитичность изображения	26
2.2	Свойства преобразования Лапласа	27
2.2.1	Γ -функция и преобразование Лапласа	28
2.2.2	Обратное преобразование Лапласа	30
2.3	Производная и интеграл	32
2.4	Производная и интеграл	33
2.5	Решение дифференциальных уравнений	36
2.6	Свёртка и теорема умножения	37
2.6.1	Решение интегральных уравнений	38
2.7		40
3	Ряд Фурье	43
3.1	Тригонометрический ряд Фурье	45
3.1.1	Ряд Фурье $2L$ -периодической функции	47

3.1.2	Разложения только по синусам или только по косинусам	47
3.2	Ряд Фурье в комплексной форме	52
3.2.1	Связь с рядом Лорана	53
3.3	Сходимость ряда Фурье	55
3.3.1	Оценка коэффициентов c_k	55
3.3.2	Ядро Дирихле	55
3.3.3	Теорема о представимости	57
3.4	Производная и интеграл	60
3.5	Периодические решения	63
3.6	Уравнения в частных производных	65
3.6.1	Уравнение теплопроводности	65
3.6.2	Волновое уравнение	66
3.7	Равенство Ляпунова	69
3.8	Фурье-ряды: некоторые формулы и теоремы	73
4	Преобразование Фурье	77
4.1	Свойства преобразования Фурье	78
4.1.1	Обратное преобразование Фурье	82
4.2	Уравнения в частных производных	87
4.2.1	Уравнение теплопроводности	87
4.2.2	Волновое уравнение	88
4.3	Скалярное произведение и норма	90
4.4		91
	Ответы	93
	Список литературы	95

Глава 1

Предварительные сведения

В этой главе собраны необходимые понятия, которые мы будем использовать в последующих главах. Основное внимание уделяется свёрткам и δ -образным последовательностям. Также мы кратко обсуждаем прямоугольные импульсы, функцию Хевисайда, лемму Римана—Лебега и интеграл Эйлера—Пуассона.

1.1 Функция Хевисайда и импульсы

Функцией Хевисайда определяется как

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Можно считать, что $H(0) = \frac{1}{2}$.

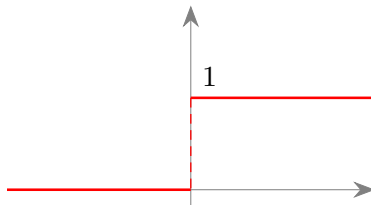


Рис. 1.1. Функция Хевисайда

Упражнение 1 Нарисовать график функции $H(x - c)$.

Прямоугольным импульсом называется функция

$$P_{p_1,(a,b)}(x) = \begin{cases} p_1, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b). \end{cases}$$

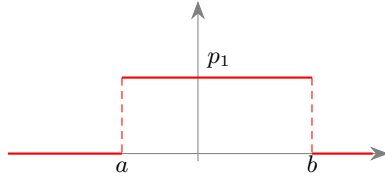


Рис. 1.2. Прямоугольный импульс $P_{p_1,a,b}(x)$

Более удобным является импульс вида $P_l = P_{1,(-l,l)}$

$$P_l(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-l,l), \\ 0, & x \notin (-l,l). \end{cases}$$

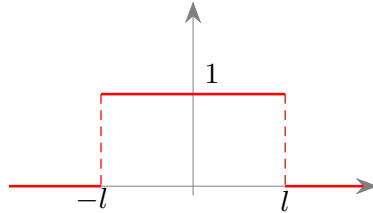


Рис. 1.3. P_l

Тогда произвольный импульс можно представить в виде

$$P_{p_1,(a,b)}(x) = p_1 P_l\left(x - \frac{a+b}{2}\right), \quad \text{где} \quad l = \frac{b-a}{2}.$$

Но самым простым является импульс вида $P(x) = P_{1,(-1,1)}(x)$

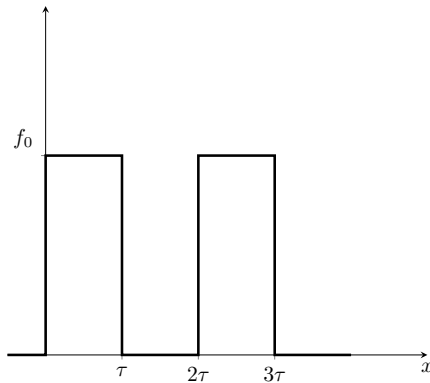
$$P(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Тогда произвольный импульс всегда можно записать через простой импульс:

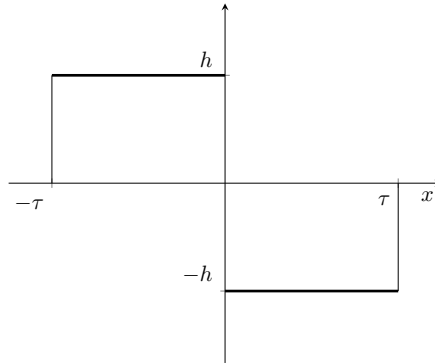
$$P_{p_1,(a,b)}(x) = p_1 P((x - k)/l), \quad \text{где} \quad l = \frac{b - a}{2}, k = \frac{a + b}{2}.$$

Задачи к 1.1

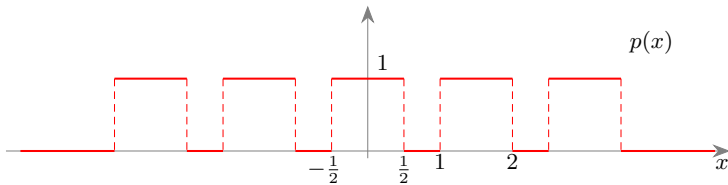
1. Выразить простой импульс $P(x)$ через функцию Хевисайда. ▮▮▮▮➡
2. Выразить импульс $P_{p_1,(a,b)}(x)$ через функцию Хевисайда. ▮▮▮▮➡
3. Выразить два прямоугольных импульса через сумму простых импульсов.



4. Выразить два прямоугольных импульса через сумму простых импульсов.



5. Представить пять прямоугольных импульсов как сумму простых импульсов.



1.2 Свёртка

Определим операцию свёртки

Пусть f, g — две функции на $\mathbb{R}$. Тогда их *свёртка* задаётся следующим образом:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x - t) dt,$$

при условии, что интеграл сходится.

Теорема 1 Для операции свёрки выполнены свойства:

1. $f * g = g * f$ — симметричность,
2. $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha f * g + \beta f * h$ — линейность,
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$ — ассоциативность.

Доказательство. 1. Свойство симметричности легко показать с помощью замены переменной:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(x - t) dt \stackrel{y = x - t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y) \cdot g(y) dy = (g * f)(x).$$

2. Свойство линейности следует из линейности интеграла.

$$\begin{aligned} f * (\alpha g + \beta h)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\alpha g(x - t) + \beta h(x - t)) dt = \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t) dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(x - t) dt. \end{aligned}$$

3. Ассоциативность свёртки покажем, используя свойство 1:

$$\begin{aligned}
 (f * (g * h))(x) &= (f * (h * g))(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot (h * g)(x - t) dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \cdot g(x - t - y) dy dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(x - y - t) dt dy = \\
 &= (h * (f * g))(x) = ((f * g) * h)(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

Ниже приведём несколько примеров вычисления свёрток.

Пример 1. Вычислим свёртку функции Хевисайда $H(x)$ с прямоугольным импульсом

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$(H * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) f(x - t) dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot f(x - t) dt.$$

Функция $f(x - t)$ это сдвиг исходного прямоугольного импульса в точку x , то есть центр импульса сдвигается в x . Тогда

$$(H * f)(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 + x, & -1 < x < 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

△

Пример 2. Вычислим свёртку прямоугольных импульсов $(f * f)(x)$, если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1, & -1 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t) dt = \int_{-1}^1 1 \cdot f(x-t) dt \stackrel{\tau = x-t}{=} \int_{x-1}^{x+1} 1 \cdot f(\tau) d\tau.$$

Последний интеграл равняется мере пересечения отрезков $(-1, 1)$ и $(x-1, x+1)$. Эта мера зависит от положения x . Так если x достаточно удалён от нуля, то отрезки не пересекаются и интеграл равен нулю. Отрезки пересекаются только если $|x| < 2$. В итоге

$$(f * f)(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 2 - |x|, & -2 < x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

△

Пример 3. Вычислим свёртку функции Хевисайда $H(x)$ с треугольным импульсом $R(x)$, если

$$R(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 - |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$(H * R)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)R(x-t) dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot R(x-t) dt.$$

Функция $R(x-t)$ это сдвиг исходного треугольного импульса на x . Тогда для каждого x вычисляем часть площади треугольника для которой $t > 0$. В итоге

$$(H * R)(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{(1+x)^2}{2}, & -1 < x < 0, \\ 1 - \frac{(x-1)^2}{2}, & 0 < x < 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

△

Пример 4. Вычислим свёртку функции Хевисайда $H(x)$ с последовательностью прямоугольных импульсов $f_n(x)$, если

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2}, & -1 < x < 1, \\ 0, & x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Найдём предел $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$, где $h_n(x) = (H * f_n)(x)$.

Решение. Аналогично предыдущим задачам

$$(H * f_n)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) f_n(x-t) dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot f_n(x-t) dt.$$

Если $x < -1/n$, то отрезок $(x-1/n, x+1/n)$ не пересекается с отрезком $(0, \infty)$. Если $x > -1/n$, площадь пересечения равна $1/n + x$ или $2/n$ при $x > 1/n$. Тогда

$$h_n(x) = (H * f_n)(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2} \left(\frac{1}{n} + x \right), & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1, & x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Легко убедиться, что $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = H(x)$ почти всюду.

△

Задачи к 1.2

В следующих задачах вычислите свёртку

6. $H(x) * H(x)$ $\blacksquare\blacktriangleright$

7. $H(x) * H(1+x)$ $\blacksquare\blacktriangleright$

8. $H(1-x^2) * H(1-x^2)$ $\blacksquare\blacktriangleright$

9. Пусть функция $f(x) = 0.5$ при $x \in (0, 2)$ и $f(x) = 0$ при $x \notin (0, 2)$. Тогда свёртка

$$(f * f)(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ ax + b, & x \in (0, 2), \\ cx + d, & x \in (2, 4), \\ 0, & x \in (4, +\infty). \end{cases}$$

Найдите значения параметров a, b, c, d .

$\blacksquare\blacktriangleright$

10. Найти $(h_1 * h_2)(x)$, если

$$h_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{3}{4}, \\ 1, & -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4}, \\ 0, & x > \frac{1}{4}. \end{cases} \quad h_2(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{4}, \\ 1, & -\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ 0, & x > \frac{3}{4}. \end{cases}$$

$\blacksquare\blacktriangleright$

11. $e^{-|x|} * e^{-|x|}$ $\blacksquare\blacktriangleright$

12. $e^{-ax^2} * (xe^{-ax^2})$, $a > 0$. $\blacksquare\blacktriangleright$

13. Рассмотрим последовательность функций

$$g_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x|, & |x| < \frac{1}{n}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{n}. \end{cases} \quad H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

а) В зависимости от n вычислите интеграл $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) dx$.

б) Вычислить свёртку $h_n(x) = (H * g_n)(x)$.

с) Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h(x)$.



14. Рассмотрим последовательность функций $K_n(x) = \frac{n}{2}e^{-n|x|}$.

а) В зависимости от n вычислите интеграл $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(x) dx$.

б) Найти предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(x) H(x) dx.$$



15. Пусть f и g неотрицательные функции такие, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

и $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$. Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) dx = 1.$$



1.3 δ -образные последовательности

Последовательность функций $K_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, где $I = (-a, a)$, $n \in \mathbb{N}$ называется δ -образной последовательностью, если выполнены следующие условия

- 1) $K_n(s) \geq 0$,
- 2) $\int_I K_n(s) ds = 1$,
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I \setminus (-\delta, \delta)} K_n(s) ds = 0$ для любого $\delta > 0$.

Например, функции

$$K_n(x) = \begin{cases} n, & |x| < \frac{1}{2n}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

образуют δ -образную последовательность (ядро Стеклова). В качестве I можно взять отрезок $(-1, 1)$, тогда

$$\int_{-1}^1 K_n(s) ds = \int_{-1/2n}^{1/2n} n ds = 1.$$

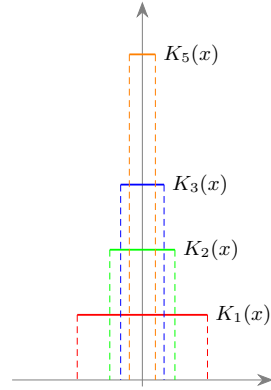


Рис. 1.4. ядро Стеклова

Пример 5. Другим примером δ -образной последовательности является ядро Гаусса

$$K_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2 x^2}{2}}.$$

△

Теорема 2 Пусть функция $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ интегрируема, ограничена ($|f(s)| < M$) и непрерывна в точке $s = 0$. $K_n(s)$ — δ -образная последовательность. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I K_n(s) f(s) ds = f(0).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку f непрерывна в точке $s = 0$, то существует $\delta > 0$ так, что

$$|f(s) - f(0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |s| < \delta.$$

По свойству 2) δ -образной последовательности имеем

$$\begin{aligned} \int_I K_n(s) f(s) ds - f(0) &= \int_I K_n(s) f(s) ds - f(0) \int_I K_n(s) ds \\ &= \int_I K_n(s) (f(s) - f(0)) ds. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_I K_n(s) f(s) ds - f(0) \right| &\leq \int_I K_n(s) |f(s) - f(0)| ds \\ &= \int_{(-\delta, \delta)} K_n(s) |f(s) - f(0)| ds + \int_{I \setminus (-\delta, \delta)} K_n(s) |f(s) - f(0)| ds = \\ &\leq \varepsilon \int_{(-\delta, \delta)} K_n(s) ds + 2M \int_{I \setminus (-\delta, \delta)} K_n(s) ds. \end{aligned}$$

В силу свойства 3) δ -образной последовательности и произвольности ε получаем требуемое. $\square$

Следствие 3 Если функция f непрерывна в точке s_0 , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (K_n * f)(x_0) = f(x_0).$$

Если функция f непрерывна на замыкании I , то последовательность функций $(K_n * f)(x)$ сходится равномерно к $f(x)$.

1.3.1 δ -функция

$\delta(t)$ это такая “функция”, которая обладает следующими свойствами

$$1) \delta(t) \geq 0,$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1,$$

$$3) \delta(t) = 0 \text{ для всех } t \neq 0.$$

В действительности эти свойства противоречивы и не определяют ни одной функции. С другой стороны, эти свойства схожи со свойствами δ -образных последовательностей. Тогда δ -функцию $\delta(t)$ можно интерпретировать как “предел” δ -образной последовательности. Теорема 2 мотивирует следующее равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0)$$

для любой функции непрерывной в точке $t = 0$.

Функция Хевисайда связана с δ -функцией равенством

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt.$$

Задачи к 1.3

16. Является ли $g_n(x)$ δ -образной последовательностью?

$$g_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x|, & |x| < \frac{1}{n}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{n}. \end{cases}$$



1.4 Лемма Римана—Лебега

Лемма 4 (Римана—Лебега) Если функция f абсолютно интегрируема на промежутке $[a, b]$, то

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) e^{ipx} dx = 0.$$

Доказательство. 1. Если $f(x)$ — постоянная функция, то есть $f(x) = c$ для всех $x \in (a, b)$, тогда

$$\int_a^b f(x) e^{ipx} dx = \frac{c}{ip} (e^{ipb} - e^{ipa}) \rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow \infty.$$

2. Пусть $f(x) = \sum_{k=1}^N c_k P_{(a_k, b_k)}(x)$ — конечная сумма импульсов, то есть $f(x)$ является ступенчатой функцией. Тогда

$$\int_a^b f(x) e^{ipx} dx = \frac{1}{ip} \sum_{k=1}^N c_k (e^{ipb_k} - e^{ipa_k}) \rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow \infty.$$

3. Пусть теперь, $f(x)$ интегрируема. Тогда найдётся ступенчатая функция $g_\varepsilon(x)$ такая, что $\int_a^b |f(x) - g_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon$.

$$\left| \int_a^b f(x) e^{ipx} dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g_\varepsilon(x)| dx + \int_a^b g_\varepsilon(x) e^{ipx} dx,$$

откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

Используя формулу Эйлера, получаем следующее следствие:

Следствие 5

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin px \, dx = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos px \, dx = 0.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим как меняется график функции при умножении на $\sin px$ при $p \rightarrow \infty$:

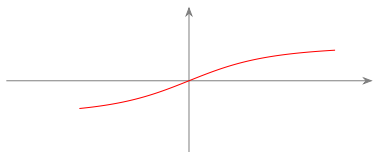


Рис. 1.5. $f(x)$

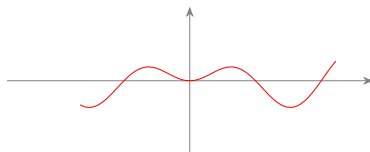


Рис. 1.6. $\sin(100x)f(x)$

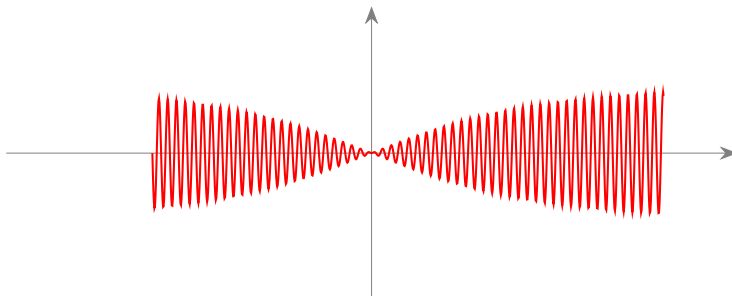


Рис. 1.7. $\sin(3000x)f(x)$

То есть частые колебания приводят к тому, что при интегрировании площадь, находящаяся выше оси, сокращается с площадью ниже оси.

Упражнение 2 Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{\cos \varphi} \cos(n\varphi - \sin \varphi) d\varphi = 0.$$

Задачи к 1.4

17. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos^2(nt) dt.$$



1.5 Интеграл Эйлера-Пуассона

Интегралом Эйлера-Пуассона¹ называют интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Найти первообразную $\int e^{-x^2} dx$ в элементарных функциях не удаётся. Однако определённый интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ вычислить можно. Идея состоит в следующем: возвести интеграл в квадрат, свести его к двойному и затем с помощью полярной замены вычислить этот двойной интеграл.

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-r^2} dr^2 = \pi. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (1.1)$$

Пусть $a > 0$, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2} d\sqrt{a}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

¹Иногда Гауссов интеграл.

В общем случае

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{a}+c}.$$

Для любого $\sigma > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx = 1.$$

В некоторых задачах нам будет полезно следующее свойство²

Лемма 6 Пусть $\sigma_X, \sigma_Y > 0$ тогда

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{\frac{-x^2}{2\sigma_X^2}} \right) * \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{\frac{-x^2}{2\sigma_Y^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}} e^{\frac{-x^2}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}}.$$

В частности, если $a, b > 0$

$$e^{-ax^2} * e^{-bx^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a+b}} e^{-\frac{abx^2}{a+b}}.$$

²Это равенство может быть известно из курса теории вероятностей. Оно выражает тот факт, что сумма двух независимых случайных величин, имеющих нормальные распределения $N(a_X, \sigma_X^2)$ и $N(a_Y, \sigma_Y^2)$, является нормальной случайной величиной с распределением $N(a_X + a_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

1.6

卷积

卷积是分析数学中一种重要的运算。设： $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的两个可积函数，作积分：

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

可以证明，关于几乎所有的 $x \in (-\infty, \infty)$ ，上述积分是存在的。这样，随着 x 的不同取值，这个积分就定义了一个新函数 $h(x)$ ，称为函数 f 与 g 的卷积，记为 $h(x) = (f * g)(x)$ 。

狄拉克 δ 函数

δ 函有可看作是在原无限高、无限细，但是总面积为1的一尖峰，在物理上代表了理想化的或点电荷的密度。地， δ 函是在上的一函，在原上限，在所有其他上零，

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

度是其中一定 δ 函的方法。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0).$$

高斯积分

高斯积分，有时也被称为概率积分，是高斯函数 ($f(x) = e^{-x^2}$) 的积分。它是依德国数学家兼物理学家卡·弗里德里希·高斯之姓氏所命名。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Глава 2

Преобразование Лапласа

В этой главе мы обсудим основные свойства преобразования Лапласа, а также приложения к дифференциальным и интегральным уравнениям.

Преобразование Лапласа функции $f(t)$ это

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Пример 6. Найдём преобразование Лапласа функции Хевисайда:

$$\mathcal{L}(H(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} H(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p},$$

то есть $\mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{p}$. $\triangle$

Упражнение 3 Вычислить преобразование Лапласа функции $f(t) = t^n$, $t > 0$.

Функция $F(p)$, называемая *изображением*, определена в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > a$, где число a зависит функции f . В свою очередь, функция $f(t)$ называется *оригиналом*. Будем

предполагать, что оригинал является функцией ограниченного роста.

Функция $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией ограниченного роста*, если существует вещественное число a такое, что

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at} dt < \infty.$$

Точная нижняя граница всех таких a называется показателем роста функции f и обозначается через $\alpha(f)$.

2.1 Аналитичность изображения

Теперь нашей задачей будет исследование регулярности изображения $F(p)$.

Теорема 7 Если функция $f(z, \zeta)$ аналитична по z в односвязной области D , кусочно-непрерывна по совокупности переменных и интеграл

$$F(z) = \int_C f(z, \zeta) d\zeta$$

сходится равномерно в области D , то функция $F(z)$ является аналитической в области D , где $C \subset D$ простой замкнутый контур.

Доказательство. Пусть Γ — произвольный замкнутый кусочно-гладкий контур в D . Тогда по теореме Коши $\int_{\Gamma} f(z, \zeta) dz = 0$. В

силу равномерной сходимости можно переставить интегралы

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = \int_{\Gamma} \int_C f(z, \zeta) d\zeta dz = \int_{\Gamma} \int_C f(z, \zeta) dz d\zeta = 0.$$

Поэтому по теореме Мореры $F(z)$ — аналитическая функция. $\square$

Теорема 8 Изображение

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (2.1)$$

является аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > a(f)$.

Доказательство. Пусть действительная часть $\operatorname{Re} p > a(f)$. Тогда

$$|e^{-pt} f(t)| \leq M e^{\frac{-\delta t}{2}},$$

где $\delta = a(f) - \operatorname{Re} p$. Поэтому интеграл (2.1) сходится равномерно в круге $B(p, \delta/2)$. По теореме 7 $F(p)$ аналитична в круге $B(p, \delta/2)$. В силу произвольности выбора точки p получаем требуемое. $\square$

Упражнение 4 При каких z существует интеграл $\int_0^{+\infty} e^{zt} dt$?

2.2 Свойства преобразования Лапласа

Если $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполняется свойство линейности:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Доказательства следующих трёх свойств остаётся читателю в качестве не сложного, но полезного упражнения.

Теорема 9 (подобия) Если $f(t)$ — оригинал, то для любого $\alpha > 0$ выполняется равенство

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\}(p) = \alpha^{-1}F(\alpha^{-1}p).$$

Теорема 10 (смещения) Если $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = F(p)$, то

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}f(t)\}(p) = F(p + \alpha).$$

Пример 7. Используя теорему смещения 10 и пример 3 можно показать, что преобразованием Лапласа функции $e^{\alpha t}$ является:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \mathcal{L}\{e^{\alpha t} \cdot 1\} = F(p - \alpha) = \frac{1}{p - \alpha}.$$

△

Теорема 11 (запаздывания) Если $a > 0$ и $\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = F(p)$, то

$$\mathcal{L}\{f(t - a)\}(p) = e^{-ap}F(p).$$

2.2.1 Г-функция и преобразование Лапласа

Для $x > 0$ определим Г-функцию Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du.$$

Не трудно получить свойство $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ и затем $\Gamma(n+1) = n!$. Вычислим преобразование Лапласа функции $f(t) = t^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(t^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}.$$

Упражнение 5 Доказать, что $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

2.2.2 Обратное преобразование Лапласа

Обратное преобразование Лапласа $\mathcal{L}^{-1}$, это такое преобразование, что

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f(t))) = f(t).$$

Теорема 12 *Обратное преобразование Лапласа можно вычислить по формуле*

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} F(s) ds,$$

где $\sigma > a(f)$.

Задачи к 2.2

18. Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и теоремой подобия, найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t) = \cos \omega t$,

в) $f(t) = \operatorname{ch} \omega t$,

б) $f(t) = \sin \omega t$,

г) $f(t) = \operatorname{sh} \omega t$.



19. Вычислить преобразования Лапласа следующих функций:

а) $f(t) = t^2 - 2$,

б) $f(t) = \cos^2 t$,

в) $f(t) = (\cos t + \sin t)^2$,

г) $f(t) = \sin \left(t + \frac{\pi}{2} \right)$.





B) $f(t) = t^n e^{\alpha t}$ ($n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}$).



23. Вычислить преобразование Лапласа функции $f(t) = t^\alpha e^{wt}$, где $\alpha \in \mathbb{R}_+, w \in \mathbb{C}$. 

$$\text{б) } F(p) = \frac{3}{p+2}, \quad \text{г) } F(p) = \frac{2p+1}{p^2-4}.$$


2.3 Преобразование Лапласа производных и интеграла

Теорема 13 (дифференцирование оригинала)

Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $t \geq 0$ и дифференцируема при $t > 0$, причём $f'(t)$ является оригиналом.

Тогда $f(t)$ — тоже оригинал и

$$\mathcal{L}\{f'\}(p) = pF(p) - f(0).$$

Доказательство.

$$\mathcal{L}\{f'\}(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} dt = f(t)e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

□

Применяя теорему о дифференцировании оригинала несколько раз, получаем следующее следствие

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Теорема 14 (интегрирование оригинала)

Пусть функция $g(t)$ непрерывна при $t \geq 0$ и $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p)$.

Тогда

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t g(u) du\right\} = \frac{1}{p}G(p).$$

Доказательство. Обозначим $f(t) = \int_0^t g(u) du$, тогда $f'(t) = g(t)$ и $f(0) = 0$. Пусть $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$. Применяя теорему о дифференцировании оригинала

$$G(p) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0).$$

Поэтому $F(p) = \frac{1}{p}G(p)$. □

Пример 8. Найдти $f(t)$, если

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \frac{1}{p(p^2 + \omega^2)}.$$

Решение. Имеем

$$\frac{1}{p(p^2 + \omega^2)} = \frac{1}{p} \mathcal{L}\{\omega^{-1} \sin \omega t\},$$

тогда по теореме об интегрировании оригинала:

$$f(t) = \int_0^t \omega^{-1} \sin \omega u du = \frac{\cos \omega t - 1}{\omega^2}.$$

△

2.4 Дифференцирование и интегрирование изображений

Теорема 15 (дифференцирование изображения) Если функции $f(t)$, $tf(t)$ являются оригиналами и $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, то

$$F'(p) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}.$$

Доказательство. Опуская детали о законности дифференцирования под знаком интеграла, имеем

$$F'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = - \int_0^{+\infty} t f(t)e^{-pt} dt.$$

□

Если применить эту теорему несколько раз, то получим следующую формулу

$$\boxed{F^{(n)}(p) = \mathcal{L}\{(-1)^n t^n f(t)\}.$$

Теорема 16 Если функции $f(t)$, $\frac{f(t)}{t}$ являются оригиналами и $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, то

$$\int_p^{\infty} F(q) dq = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

Доказательство. Пусть $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, тогда по теореме о дифференцировании изображения имеем

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{tg(t)\} = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{g(t)\},$$

$$\text{следовательно, } \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_p^{\infty} F(q) dq.$$

□

Задачи к 2.4

26. Используя теорему о дифференцировании изображения найти $F(p)$, если

а) $f(t) = t \cos \omega t$,

б) $f(t) = t \sin \omega t$,

в) $f(t) = t^2 \cos t$.



27. Найти преобразование Лапласа функции

$$f(t) = \int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u} du.$$



28. Используя теорему об интегрировании изображения найти оригиналы $f(t)$, если

а) $F(p) = \frac{1}{(p-4)^2}$,

б) $F(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$,

в) $F(p) = \frac{p^2+1}{(p-1)^2}$.



Доказать формулы:

29. $\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) \right\} = \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$. ▮▮▮▮➡

30. $\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2\omega} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) \right\} = \frac{p^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$. ▮▮▮▮➡

31. $\mathcal{L} \left\{ \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \right\} = \ln \frac{p+b}{p+a}$. ▮▮▮▮➡

32. $\mathcal{L} \left\{ \frac{\sin \omega t}{t} \right\} = \text{arctg} \frac{p}{\omega}$. ▮▮▮▮➡

33. Вычислить интеграл $\int_0^\infty t e^{-3t} \sin t dt$. ▮▮▮▮➡

34. Вычислить преобразование Лапласа функции $f(t) = e^{-t} t \sin t$.



2.5 Решение дифференциальных уравнений

Пример 9. Найти решение задачи: $x'' - 3x' + 2x = 5e^{3t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Решение. Обозначим $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(p)$, и подействуем на обе части уравнения преобразованием Лапласа. Получим

$$p^2 X(p) - 3pX(p) + 2X(p) = \frac{2}{p-3}.$$

Откуда $X(p) = \frac{5}{(p-1)(p-2)(p-3)}$ или

$$X(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{2}{p-2} + \frac{1}{p-3}.$$

Восстанавливая оригинал, находим решение задачи

$$x(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}. \quad \triangle$$

Задачи к 2.5

35. Используя преобразование Лапласа, решить следующие задачи:

а) $y'' - y = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

б) $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-t}$, $y(0) = y'(0) = 3$;

в) $y'' + 2y' - 3y = 10 \operatorname{sh} 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.



36. Используя преобразование Лапласа, решить задачу

$$y'' - 4y' + 3y = t, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$$



2.6 Свёртка и теорема умножения

Если функции $f(t)$ и $g(t)$ обращаются в ноль при $t < 0$, то их свёртку можно записать в виде

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du.$$

Например,

$$e^t * e^{-2t} = \int_0^t e^u e^{-2(t-u)} du = \frac{e^t - e^{-2t}}{3}.$$

Здесь, как и всюду в этой главе, под функциями e^t, e^{-2t} мы понимаем $e^t H(t), e^{-2t} H(t)$.

Теорема 17 (теорема умножения)

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(p) \cdot G(p).$$

Для примера указанного выше, теорема имеет вид

$$\mathcal{L}(e^t * e^{-2t}) = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p+2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+2} \right).$$

Эта теорема может быть применена и в обратную сторону:

Пример 10. Пусть $F(p) = \frac{1}{p^2-p-2}$, найти $f(t)$.

Решение. Заметим, что

$$\frac{1}{p^2-p-2} = \frac{1}{(p+1)(p-2)} = \mathcal{L}(e^{-t}) \cdot \mathcal{L}(e^{2t}) = \mathcal{L}(e^{-t} * e^{2t}).$$

И поэтому

$$f(t) = e^{-t} * e^{2t} = \int_0^t e^{-u} e^{2(t-u)} du = \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3}.$$

△

2.6.1 Решение интегральных уравнений

Решим следующую несложную задачу: *Найти функцию $y(t)$ такую, что*

$$y(t) = \int_0^t y(s) ds + 1.$$

Чтобы решить эту задачу заметим, что интеграл

$$\int_0^t y(s) ds = \int_0^t y(s) H(t-s) ds,$$

то есть является свёрткой $(f * H)(t)$. Поэтому, если мы подействуем на обе части равенства преобразованием Лапласа, получим уравнение

$$Y(p) = Y(p) \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p},$$

откуда $Y(p) = \frac{1}{p-1}$. Тогда решением является $y(t) = e^t$, и это легко проверить, подставив в исходное уравнение.

Описанный выше метод подходит для решения интегральных уравнений вида

$$y(t) = g(t) + \int_0^t y(s) K(t-s) ds,$$

где g, K — даны, а y — неизвестная функция, которую требуется найти.

Задачи к 2.6

37. Пусть $F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)^2}$, найти $f(t)$. $\blacksquare \blacktriangleright$

38. Найти функцию $y(t)$ такую, что $y(0) = 0$ и при $t > 0$

$$2 \int_0^t (t-u)^2 y(u) du + y'(t) = (t-1)^2.$$



39. Найти функцию $f(t)$ такую, что $f(0) = 0$ и при $t > 0$

$$5e^{-t} \int_0^t e^u \cos(2(t-u)) f(u) du = +f'(t) + f(t) - e^{-t}.$$



2.7

对于所有实数 $t > 0$, 函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换是函数 $F(p)$, 定义为:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

参数 p 是一个复数。

拉普拉斯变换数的一些性质

$$1) \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} \quad \text{线性叠加;}$$

$$2) \mathcal{L}\{f(\alpha t)\}(p) = \alpha^{-1} F(\alpha^{-1} p) \quad \text{时间标度;}$$

$$3) \mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\}(p) = F(p + \alpha) \quad p\text{域平移;}$$

$$4) \mathcal{L}\{f'\}(p) = pF(p) - f(0) \quad \text{时域一阶微分;}$$

$$5) \mathcal{L}\left\{\int_0^t g(u) du\right\} = \frac{1}{p} G(p) \quad \text{时域积分;}$$

$$6) F'(p) = -\mathcal{L}\{tf(t)\} \quad p\text{域一阶微分;}$$

$$7) \int_p^\infty F(q) dq = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \quad p\text{域积分;}$$

$$8) \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau\right\} = F(p) \cdot G(p) \quad \text{卷积。}$$

拉普拉斯变换简表

时域	拉普拉斯 p 域	收敛区域
1	$\frac{1}{p}$	$\operatorname{Re} p > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}, \operatorname{Re} p > 0$
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Im} \omega $
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Im} \omega $
$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \omega $
$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \omega $
$e^{\alpha t} t^n$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$
$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha + \operatorname{Im} \omega $
$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha + \operatorname{Im} \omega $
$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Im} \omega $
$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Im} \omega $

Термины к главе 2

оригина́л		原文，原本；原物，原图
показа́тель ро́ста фу́нкции		函数增长指数
преобразова́ние Лапла́са		拉普拉斯变换
теоре́ма о диффе- ренци́ровании изображе́ния		图像微分定理
теоре́ма о диффе- ренци́ровании оригина́ла		原图微分定理
теоре́ма об интегрíровании оригина́ла		原图积分定理
теоре́ма подóбия		相似定理
теоре́ма смеще́ния		移位定理

Глава 3

Ряд Фурье

Напомним, функция $f(x)$ называется *периодической*, если найдётся такое число T , $T \neq 0$, что $f(x + T) = f(x)$, для всех x . Типичными примерами таких функций являются тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$, графики которых хорошо демонстрируют периодичность

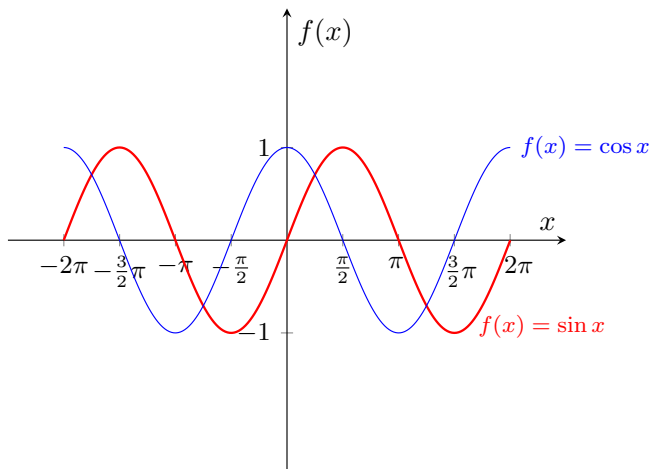


Рис. 3.1. Графики $\sin x$ и $\cos x$

В отличие от синуса и косинуса иногда бывает сложно заметить какую-либо закономерность. Рассмотрим, например, функцию $f(x)$, график которой выглядит весьма причудливо.

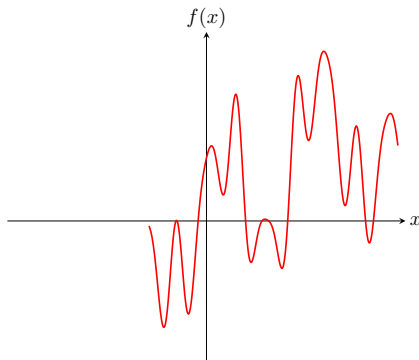


Рис. 3.2. $f(x)$

Допустим, мы узнали про функцию $f(t)$ чуть больше и заметили некую периодичность

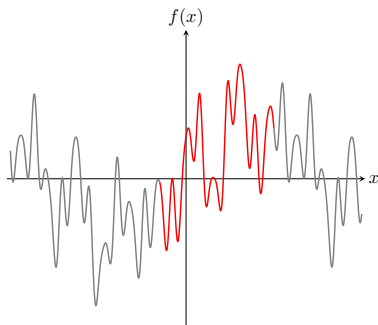


Рис. 3.3. $f(x)$

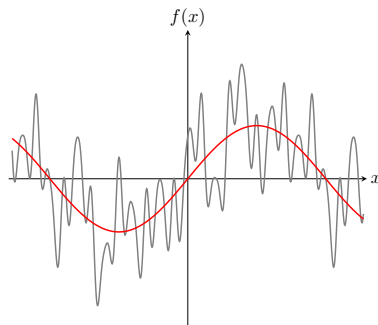


Рис. 3.4. $f(x) \sim 0.5 \sin x$

То есть в общих чертах график напоминает синусоиду, но можно пойти ещё дальше:

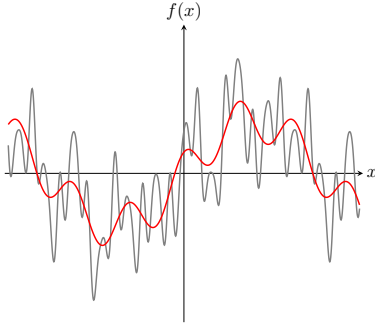


Рис. 3.5.
 $f(x) \sim 0.5 \sin x + 0.2 \cos 5x$

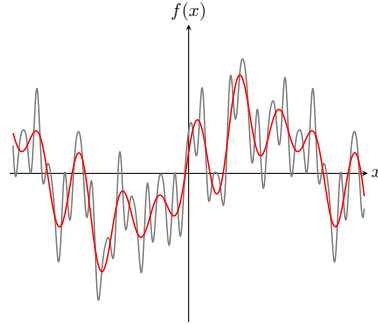


Рис. 3.6. $f(x) \sim 0.5 \sin x + 0.2 \cos 5x + 0.3 \sin 7x$

Однако в действительности,

$$f(x) = 0.5 \sin x + 0.2 \cos 5x + 0.3 \sin 7x + 0.3 \cos 20x - 0.1 \cos 30x.$$

Нас интересует следующий вопрос: *Как узнать, что функция $f(x)$ представляется в виде такой суммы синусов и косинусов?*

3.1 Тригонометрический ряд Фурье

Тригонометрическим рядом Фурье для функции f называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тот факт, что ряд является рядом Фурье функции f обычно обозначается следующим образом:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Пример 11. Найдём ряд Фурье функции $f(x) = |x|$.

Решение. Вычислим коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi.$$

Поскольку $|x|$ — чётная функция

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx.$$

Интегрируя по частям получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx &= \frac{2}{\pi n} \left(x \sin nx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \frac{4}{\pi n^2}, & n = 2k + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

В силу чётности функции $b_n = 0$ для всех n .

Следовательно ряд Фурье для функции $|x|$ имеет вид

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

△

Но можем ли мы утверждать, что

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}?$$

Ответ на этот вопрос даёт теорема 21.

Пример 12. Найдём ряд Фурье Функции $f(x) = \sin^2 x$. Заметим, что $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Поэтому $a_0 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, а остальные коэффициенты равны нулю. В этом случае, очевидно что, функция совпадает со своим рядом Фурье.

3.1.1 Ряд Фурье $2L$ -периодической функции

Если функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ имеет период $2L$, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right),$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{\pi n t}{L} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{\pi n t}{L} dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

3.1.2 Разложения только по синусам или только по косинусам

Если $f(x)$ — нечётная ($f(-x) = -f(x)$), то $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$.

Если $f(x)$ — чётная ($f(-x) = f(x)$), то $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx$.

Если $f(x) : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ — чётная функция, то её ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

при этом $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$

Если $f(x) : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ — нечётная функция, то её ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

при этом $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$

Пусть теперь функция $f(x)$ задана на интервале $[0, \pi]$.

Рассмотрим обратную задачу:

*Как разложить функцию $f(x)$ в ряд **только** по синусам (по $\sin nx$)?* То есть требуется

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

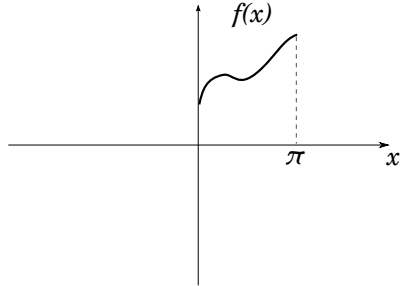


Рис. 3.7. $f(x)$

Чтобы это сделать, продолжим функцию f на весь интервал $[-\pi, \pi]$ так, что продолженная функция $\tilde{f}(x)$ — нечётная и $\tilde{f}(x) = f(x)$ для $x \in [0, \pi]$. Сделать это не трудно

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

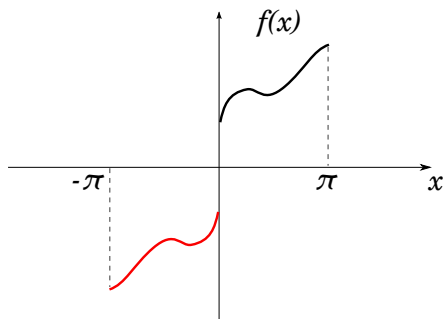
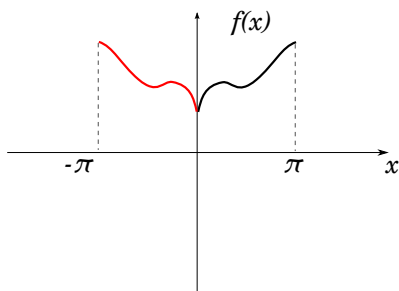


Рис. 3.8. $\tilde{f}(x)$ — нечётное продолжение.

Тогда

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, x \in [-\pi, \pi] \quad \text{и} \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, x \in [0, \pi].$$



Аналогично, f можно разложить только по косинусам ($\cos nx$). Для этого, функцию f нужно продолжить чётным образом:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

Тогда

Рис. 3.9. $\tilde{f}(x)$ — чётное продолжение.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Задачи к 3.1

В задачах 40 и 41 требуется разложить в тригонометрический ряд Фурье.

40. $f(x) = |\sin x|$. ■■■►

41. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$. 

Нарисовать графики и найти ряды Фурье следующих функций, предполагая, что они имеют период 2π :

42.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$



43.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ 3, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$



44.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi}{2} - x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$



45.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$



46.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ \sin x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$



47. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^3$ в интервале $[-\pi, \pi]$.



Нарисовать графики и найти ряды Фурье следующих функций, считая что они периодичны с периодом $2L$:

48.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{если } 1 < x < 3. \end{cases} \quad 2L = 4.$$



49.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{если } 1 < x < 2, \\ 3 - x, & \text{если } 2 < x < 3. \end{cases} \quad 2L = 3.$$



50. Пусть f и g нечётные функции, а функция h чётная. Что можно сказать о чётности функций: $f + g$, fg , fh , f^2 , $f + h$. 

51. Доказать, что любую функцию f , определённую на симметричном интервале $(-a, a)$, можно разложить в сумму $f_E + f_O$, где f_E — чётная, а f_O — нечётная. Это разложение единственно.



52. Пусть 2π -периодическая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ задана на интервале $[-\pi, \pi]$ формулой $f(x) = x + 1$. Найти её ряд Фурье.



53. Разложить функцию, заданную на отрезке $[0, \pi]$ формулой $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в ряд Фурье по косинусам. 

54. Разложить функцию $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$, в ряд Фурье по синусам. 

3.2 Ряд Фурье в комплексной форме

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную в виде ряда

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}. \quad (3.1)$$

Предположим, что коэффициенты $c_k \in \mathbb{C}$ таковы, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty.$$

Тогда по теореме Вейерштрасса ряд (3.1) сходится абсолютно и равномерно. Поскольку e^{ikx} — непрерывные 2π -периодические функции, то $f(x)$ также непрерывна и имеет период 2π .

Умножим функцию $f(x)$ на e^{-ilx} , $l \in \mathbb{Z}$, и проинтегрируем на отрезке $(-\pi, \pi)$. В силу равномерной сходимости интеграл и сумму можно поменять местами

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ilx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i(k-l)x} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x} dx.$$

Теперь заметим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } k = l, \\ 0, & \text{если } k \neq l. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ilx} dx = 2\pi c_l.$$

Пусть $f(x)$ — интегрируемая 2π -периодическая функция. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ определим числа

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Рядом Фурье (в комплексной форме) функции $f(x)$ называется ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.$$

Числа c_k называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$.

Кратко будем записывать

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.$$

Однако, пока ничего не говорится о сходимости ряда и тем более сходится ли ряд Фурье к исходной функции $f(x)$. Далее одна из основных задач будет состоять в исследовании вопроса о том, когда такая сходимость есть:

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.$$

3.2.1 Связь с рядом Лорана

Каждый ряд Фурье $F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ можно рассматривать как

ряд Лорана $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ на окружности $|z| = 1$. Поэтому задачу о разложении в ряд Фурье (в комплексной форме) иногда удаётся свести к задаче о разложении в ряд Лорана в окрестности нуля, сделав замену $e^{ix} = z$.

Задачи к 3.2

55. Найти ряд Фурье в комплексной форме функции e^{ax} . 

56. Разложить функцию

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

на интервале $(-\pi, \pi)$ в ряд Фурье в комплексной форме. ■■■►

57. Следующие функции разложите в ряд Фурье с использованием комплексной формы ряда Фурье ($|a| < 1$):

а) $f(x) = \frac{a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2};$

б) $f(x) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos x + a^2};$

в) $f(x) = \frac{1 - a \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2}.$

■■■►

58. Доказать, что коэффициенты рядов Фурье в вещественной и комплексной форме связаны следующим образом:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \text{и} \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n \geq 0.$$

■■■►

59. Доказать, что 2π -периодическая функция f вещественнозначна (т.е. $f(x) \in \mathbb{R}$), если и только если коэффициенты c_n её комплексного ряда Фурье удовлетворяют соотношениям $\overline{c_n} = c_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ■■■►

60. Доказать, что 2π -периодическая функция f является чётной, если и только если коэффициенты c_n её комплексного ряда Фурье удовлетворяют соотношениям $c_n = c_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

■■■►

61. Доказать, что 2π -периодическая функция f является нечётной, если и только если коэффициенты c_n её комплексного ряда Фурье удовлетворяют соотношениям $c_n = -c_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

■■■►

3.3 Сходимость ряда Фурье

В этой части мы займёмся вопросом, при каких условиях функция $f(x)$ совпадает со своим рядом Фурье.

3.3.1 Оценка коэффициентов c_k

Лемма 18 Пусть f абсолютно интегрируема на промежутке $[-\pi, \pi]$. Тогда

1. Последовательность коэффициентов Фурье ограничена:

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx.$$

2. $\lim_{k \rightarrow \infty} |c_k| = 0$.

Доказательство. 1. Следует из оценки модуля интеграла.

2. Следует из леммы Римана—Лебега 4. $\square$

3.3.2 Ядро Дирихле

Рассмотрим частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Сделаем замену переменной $t = x - y$ и преобразуем:

$$\begin{aligned} 2\pi S_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} dt \\ &= - \int_{\pi+x}^{-\pi+x} f(x-y) \sum_{k=-n}^n e^{iky} dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) \sum_{k=-n}^n e^{iky} dy. \end{aligned}$$

Функция $D_n(y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{iky}$ называется *ядром Дирихле*.

Частичная сумма ряда Фурье может быть представлена как свёртка с этим ядром:

$$S_n(x) = (D_n * f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_n(y) dy. \quad (3.2)$$

Лемма 19 Ядро Дирихле можно также записать в виде

$$1. D_n(y) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ny \right);$$

$$2. D_n(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{\sin \frac{1}{2}y}.$$

Доказательство. 1. Первое соотношение следует из формулы Эйлера.

2. Вычисляя частичную сумму геометрической прогрессии имеем

$$\sum_{k=-n}^n e^{iky} = \frac{e^{-iny}(1 - e^{i(2n+1)y})}{1 - e^{iy}}.$$

Преобразуем

$$\begin{aligned} e^{-iny} \cdot \frac{1 - e^{i(2n+1)y}}{1 - e^{iy}} &= e^{-iny} \cdot \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})y}(e^{-i(n+\frac{1}{2})y} - e^{i(n+\frac{1}{2})y})}{1 - e^{iy}} \\ &= e^{-iny} \cdot \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})y}(e^{-i(n+\frac{1}{2})y} - e^{i(n+\frac{1}{2})y})}{e^{i\frac{y}{2}}(e^{-i\frac{y}{2}} - e^{i\frac{y}{2}})} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

Кроме того имеет место следующее свойство:

Лемма 20 Функция $D_n(y)$ чётная и

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) dy = 1.$$

Доказательство. Заметим, что $\int_{-\pi}^{\pi} \cos ny dy = 0$, при $n = 1, 2, 3, \dots$. Используя первый пункт из предыдущей леммы получаем требуемое. $\square$

3.3.3 Теорема о представимости

Нам понадобятся левый и правый пределы функции

$$f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x), \quad f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x).$$

Запись $x \rightarrow x_0+$ означает что $x \rightarrow x_0$ и $x > x_0$. Также введём числа, которые условно можно назвать левой и правой производной:

$$f'_L(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0-)}{h},$$

$$f'_R(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0+)}{h}.$$

Теорема 21 Пусть $f(x)$ — 2π -периодическая кусочно-непрерывная функция и производные $f'_L(x)$, $f'_R(x)$ существуют. Тогда её ряд Фурье сходится и

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)).$$

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} f(x_0 - u) D_n(u) du = \frac{1}{2} f(x_0 -).$$

Используя леммы 19 и 20, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} f(x_0 - u) D_n(u) du - \frac{1}{2} f(x_0 -) \\ &= \int_0^{\pi} f(x_0 - u) D_n(u) du - f(x_0 -) \int_0^{\pi} D_n(y) dy \\ &= \int_0^{\pi} (f(x_0 - u) - f(x_0 -)) D_n(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 -)}{-u} \frac{-u}{\sin \frac{1}{2}u} \sin(n + \frac{1}{2})u du. \end{aligned}$$

Функция $\frac{f(x_0 - u) - f(x_0 -)}{-u} \frac{-u}{\sin \frac{1}{2}u}$ интегрируем и ограничена, поэтому по лемме Римана-Лебега 4 последний интеграл стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Аналогично } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^0 f(x_0 - u) D_n(u) du = \frac{1}{2} f(x_0 +).$$

В итоге

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - u) D_n(u) du = \frac{f(x_0 -) + f(x_0 +)}{2}.$$

□

Задачи к 3.3

- 62.** Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$. $\blacksquare$
- 63.** Найти ряд Фурье функции $f(t) = t^4 - 2\pi^2 t^2$ и вычислить $\zeta(4)$, где $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. $\blacksquare$
- 64.** Найти ряд Фурье функции $f(t) = |\cos t|$ и вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$. $\blacksquare$

3.4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Как и всегда в анализе, нам важно уметь дифференцировать и интегрировать.

Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая 2π -периодическая функция, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ — её ряд Фурье. Нас интересует вопрос: *каким будет ряд Фурье для производной $f'(x)$?* Обозначим коэффициенты Фурье функции f' через c'_k .

$$f'(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k e^{ikx}.$$

Теорема 22 При сделанных выше предположениях справедлива равенства $c'_k = ikc_k$.

Доказательство. Вычислим коэффициенты Фурье для производной:

$$\begin{aligned} c'_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + ik \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right) = ikc_k, \quad \text{при } k \neq 0. \end{aligned}$$

Если $k = 0$, то

$$c'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{2\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) = 0,$$

в силу 2π -периодичности функции $f(x)$. $\square$

Эта теорема обосновывает законность почленного дифференцирования ряда Фурье гладкой функции:

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \right] \stackrel{?}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikx},$$

однако в результате мы получим формальный ряд Фурье для производной (который не обязательно сходится).

Отметим следующее достаточное условие сходимости ряда Фурье для производной.

Лемма 23 Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая 2π -периодическая функция и $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$.

Если

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k|c_k| < \infty,$$

то ряд Фурье для производной сходится:

$$f'(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikx}.$$

Перейдём к интегрированию. Пусть теперь функция $g(x)$ непрерывна, 2π -периодична и $\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = 0$ ¹. Мы можем написать её формальный ряд Фурье (ничего не утверждая о его сходимости):

$$g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Рассмотрим, кроме того, непрерывно дифференцируемую 2π -периодическую функцию $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ и разложим её в (схо-

¹Это условие обеспечит 2π -периодичность интеграла $G(x) = \int_0^x g(t) dt$.

дящийся к ней) ряд Фурье:

$$G(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx}.$$

Теорема 24 При сделанных выше предположениях справедливости равенства $C_k = \frac{c_k}{ik}$, $C_0 = -\sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{ik}$.

Доказательство. Поскольку $G'(x) = g(x)$, то по предыдущей теореме 22: $c_k = ikC_k$, $k \neq 0$.

Найдём коэффициент C_0 :

$$0 = G(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k = C_0 + \sum_{k \neq 0} C_k,$$

следовательно, $C_0 = -\sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{ik}$. □

Последняя теорема обосновывает законность почленного интегрирования ряда Фурье непрерывной функции:

$$\int_0^x g(t) dt = \int_0^x \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} dt = \sum_{k \neq 0} \frac{c_k e^{ikx}}{ik} - \sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{ik}.$$

Таким образом, при почленном интегрировании ряда Фурье не надо заботиться о его сходимости: для непрерывной функции даже из формального ряда мы получаем сходящийся.

Задачи к 3.4

65. Разложить функцию $f(x) = \ln(1 - 2a \cos x + a^2)$ в ряд Фурье.



3.5 Периодические решения

Пусть $f(x)$ — 2π -периодическая функция. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' + \alpha y = f(x) \quad (3.3)$$

и зададимся вопросом: *как найти периодическое решение $y(x)$?*

Предположим, что такое решение существует. Запишем ряды Фурье для правой части $f(x)$ и неизвестной функции $y(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}, \quad y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{ikx}.$$

Подставим эти разложения в (3.3):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ik y_k e^{ikx} + \alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx},$$

откуда получаем, что $iky_k + \alpha y_k = f_k$, и, следовательно,

$$y_k = \frac{f_k}{ik + \alpha} \quad (\text{если } \alpha \neq ik).$$

Тогда периодическим решением (3.3) является

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k}{ik + \alpha} e^{ikx}.$$

Пример 13. Найдём решение $y(t)$ с периодом 2π для дифференциального уравнения $y'(t) + 2y(t - \pi) = \sin t$ при $-\infty < t < \infty$.

Решение. Предположим, что решением является ряд Фурье:

$$y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}.$$

Почленно продифференцируем этот ряд и подставим в правую часть исходного уравнения:

$$y'(t) + 2y(t - \pi) = \sum in c_n e^{int} + \sum c_n e^{int - in\pi} = \sum (in + 2(-1)^n) c_n e^{int}.$$

Нужно чтобы это равнялось левой части уравнения

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2}ie^{-it} - \frac{1}{2}ie^{it}.$$

Тогда получаем, что равенство может иметь место лишь при нулевых коэффициентах c_n для всех $n \neq \pm 1$, причём

$$(i-1)c_1 = -\frac{i}{2}, \quad (-i-2)c_{-1} = \frac{i}{2}.$$

Отсюда получаем $c_1 = \frac{1}{10}(2i-1)$, $c_{-1} = \frac{1}{10}(-2i-1)$, $c_n = 0$ для всех остальных n . Таким образом имеем:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{it} + c_{-1} e^{-it} = -\frac{1}{10}(e^{it} + e^{-it}) + \frac{2i}{10}(e^{it} - e^{-it}) = \\ &= -\frac{1}{10}2 \cos t + \frac{2i}{10}2i \sin t = -\frac{1}{5}(\cos t + 2 \sin t). \end{aligned}$$

△

Задачи к 3.5

В задачах 66-69 найти периодические решения.

66. $y'' + 2y = \sin x$ 

67. $y'' + 2y' + y = \sin x$ 

68. а) $y'' - y = 0$, б) $y'' + y = 0$.



69. $y'' + 4y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ 

3.6 Уравнения в частных производных

3.6.1 Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности описывает распространение температуры в пространстве и её изменение во времени.

Решим следующую задачу о распространении тепла в ограниченном стержне:

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & x \in (0, \pi), t > 0; \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0; \\ u(0, x) = f(x), & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

Условие $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ означает, что на концах стержня всегда постоянная температура 0 градусов, а функция $f(x)$ описывает начальную температуру в каждой точке стержня.

Предположим, что решение можно записать в виде $u(t, x) = X(x)T(t)$. Тогда $X(x)T'(t) - x''(x)T(t) = 0$ или

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Последнее равенство означает, что правая и левая часть является постоянной, скажем λ . Тогда

$$T'(t) = \lambda T(t) \quad \text{и} \quad X''(x) - \lambda X(x) = 0.$$

Откуда $T(t) = Ce^{\lambda t}$. Найдём $X(x)$. При $\lambda \geq 0$ получаем $X(x) = 0$, что имеет смысл только при $f(x) = 0$. Пусть $\lambda = -\omega^2$, тогда для коэффициентов Фурье выполнено соотношение

$$c_n(\omega^2 - n^2) = 0,$$

из чего следует, что $\omega = \pm n$ и $c_k = 0$ при $k \neq \pm \omega$. Поэтому $X(x) = A \cos nx + B \sin nx$, где A, B — произвольные постоянные. Из граничного условия $X(0) = 0$ следует, что $A = 0$. В итоге общее решение можно записать в виде

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} B_n \sin nx.$$

Чтобы определить постоянные B_n разложим начальное условие в ряд $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, откуда $B_n = b_n$.

3.6.2 Волновое уравнение

Волновое уравнение описывает различные волновые процессы: малые поперечные колебания мембраны или струны, эффекты связанные со звуком и светом, электромагнитные колебания.

Изучим одномерное волновое уравнение для колебания закреплённой струны. Для наглядности можно представить, что это струна музыкального инструмента, например, гитары.

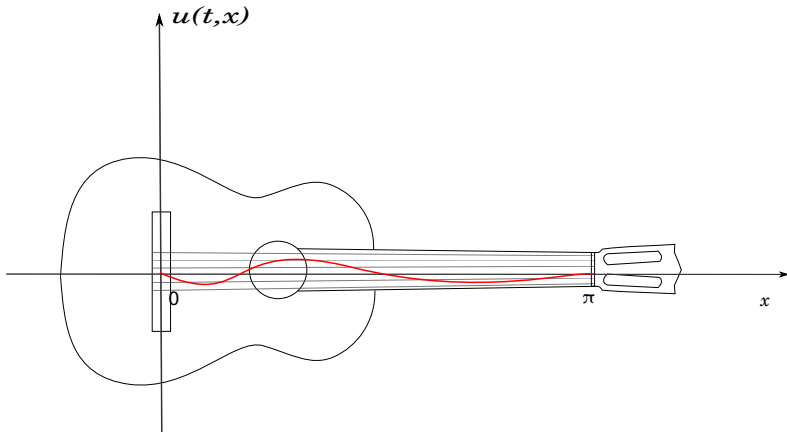


Рис. 3.10. Колебания гитарной струны

Если оттянуть струну, а затем отпустить то она начнёт колебаться и производить звук. При этом колебания описываются следующим уравнением:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & x \in (0, \pi), t > 0; \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0; \\ u(0, x) = f(x), & x \in (0, \pi); \\ u_t(0, x) = g(x), & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

В начальный момент времени ($t = 0$) функция $f(x)$ описывает положение струны, а функция $g(x)$ задаёт скорость каждой точки струны. Мы решим эту задачу.

Предположим, что решение можно записать в виде $u(t, x) = X(x)T(t)$. Тогда, как и в предыдущем случае получаем

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0. \end{cases}$$

Решение имеет вид

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx.$$

Чтобы определить постоянные A_n и B_n разложим начальные условия в ряды Фурье:

$$u(0, x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \text{и} \quad u_t(0, x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

Откуда $A_n = a_n$ и $B_n = \frac{b_n}{n}$.

Задачи к 3.6

70. Решить следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & x \in (0, \pi), t > 0; \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0; \\ u(0, x) = \sin x, & x \in (0, \pi). \end{cases}$$



71. Решить следующую задачу для уравнения колебания струны:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & x \in (0, \pi), t > 0; \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0; \\ u(0, x) = \frac{\pi}{2} - |x - \frac{\pi}{2}|, & x \in (0, \pi); \\ u_t(0, x) = 0, & x \in (0, \pi). \end{cases}$$



3.7 Равенство Ляпунова

Теорема 25 (равенство Ляпунова) Пусть функция f такова, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

и пусть c_k — ее коэффициенты Фурье. Тогда справедливо равенство,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx,$$

называемое равенством Ляпунова.

Также это равенство называется равенством Парсеваля.

Доказательство. 1) В теореме 21 мы показали, что частичная сумма ряда Фурье $S_n(x) \rightarrow f(x)$ (при некоторых условиях на функцию $f(x)$). На самом деле, также верно, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

2) Распишем квадрат модуля из соотношения (3.4):

$$\begin{aligned} |S_n(x) - f(x)|^2 &= (S_n(x) - f(x))(\overline{S_n(x) - f(x)}) = \\ &= (S_n(x) - f(x))(\overline{S_n(x)} - \overline{f(x)}) = \\ &= \overline{S_n(x)}S_n(x) - \overline{S_n(x)}f(x) - \overline{f(x)}S_n(x) + \overline{f(x)}f(x). \end{aligned}$$

3) Проинтегрируем каждое из слагаемых и воспользуемся

тем свойством, что $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{imx} dx = 0$ при $k \neq m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{S_n(x)} S_n(x) dx = 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx,$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi} (\overline{S_n(x)} f(x) + S_n(x) \overline{f(x)}) dx = -4\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

Таким образом

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2,$$

и, из (3.4) получаем

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Для тригонометрического ряда Фурье (по синусам и косинусам) равенство Ляпунова имеет следующий вид:

$$\left| \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \right.$$

Задачи к 3.7

72. Напишите равенство Ляпунова для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & a < |x| < \pi \end{cases}$$

и найдите с его помощью суммы числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2}.$$



73. Вычислите интеграл $\int_0^{2\pi} |3 + 4e^{10ix} + 5e^{100ix}|^2 dx$, используя равенство Ляпунова. ■■■►

74. Найти сумму ряда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e^{inx} \right|^2 dx.$$



75. Пусть кусочно-гладкая функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[0, \pi]$. Докажите, что при выполнении условия

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$$

имеет место неравенство

$$\int_0^{\pi} [f(x)]^2 dx \leq \int_0^{\pi} [f'(x)]^2 dx,$$

называемое неравенством Стеклова, и убедитесь, что равенство в нем осуществляется лишь для функций вида $f(x) = A \cos x$.



76. Пусть кусочно-гладкая функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[0, \pi]$. Докажите, что при выполнении условия $f(0) = f(\pi) = 0$ имеет место неравенство

$$\int_0^{\pi} [f(x)]^2 dx \leq \int_0^{\pi} [f'(x)]^2 dx,$$

также называемое неравенством Стеклова, и убедитесь, что равенство в нем имеет место лишь для функций вида $f(x) = B \sin x$. ■■■►

77. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[-\pi, \pi]$ и имеет в нем (за исключением разве лишь конечного числа точек) производную $f'(x)$, интегрируемую с квадратом. Докажите, что если при этом выполнены условия

$$f(-\pi) = f(\pi) \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0,$$

то имеет место неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx,$$

называемое неравенством Виртингера, причем равенство в нем имеет место лишь для функций вида $f(x) = A \cos x + B \sin x$.

■■■►

3.8 傅里叶级数的一些基本公式与定理

傅里叶级数是由周期函数所确定的一种三角级数, 对于周期为 2π 的周期函数, 傅里叶级数有以下形式:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中 a_n, b_n 傅里叶系数, 可由以下公式推出:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

将周期为 2π 的周期函数展开为傅里叶级数需: 1) 求出傅里叶系数 a_n, b_n ; 2) 将其写成傅里叶级数形式: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

对复数形式的傅里叶级数来说, 有以下推论和性质:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx.$$

傅里叶级数的部分和记作: $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$. 最根本的问题是

求证: 部分和的极限是否等于 $f(x)$? 为什么? $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \stackrel{?}{=} f(x)$.

黎曼-勒贝格定理 如果函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的可积函数, 则:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) e^{ipx} \, dx = 0.$$

狄利克雷核指的是以下一族函数:

$$D_n(y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{iky}.$$

容易得出以下表达式:

$$D_n(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - e^{-2iny}}{1 - e^{iy}} e^{iny} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x/2)}.$$

狄利克雷核的一些性质:

- 1) $D_n(y + 2\pi i) = D_n(y)$ (2π 周期);
- 2) $D_n(-y) = D_n(y)$ (偶函数);
- 3) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) dy = 1.$

狄利克雷核在求傅里叶级数部分和时有很重要的应用

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_n(y) dy.$$

下面是最主要的一些分解定理之一

设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且分段光滑, 此时其傅里叶级数满足:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)).$$

帕塞瓦尔恒等式表明, 函数 $f(x)$ 在 L_2 空间上的范数与其傅里叶级数有以下关系:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Термины к главе 3

ра́венство Ляпунова		李亚普诺夫等式
ряд Фурье́		傅立叶级数
ряд Фурье́ в комплексной фóрме		复数形式的傅立叶级数
ряд Фурье́ по ко́синусам		按余弦的傅立叶级数
ряд Фурье́ по си́нусам		按正弦的傅立叶级数
ряд Фурье́ фу́нкции с произво́льным пери́одом		带有任意周期函数的傅立叶级数

Глава 4

Преобразование Фурье

Пусть $f(x)$ — интегрируемая функция. Определим преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Преобразование Фурье также обозначают: $\mathcal{F}(f(x))(\xi) = \hat{f}(\xi)$. Отметим следующие свойства: $\hat{f}(\xi)$ — ограничена и $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. Но мы не можем утверждать, что $\hat{f}(\xi)$ интегрируема и, следовательно, не определён интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

который задаёт (как мы увидим позже) обратное преобразование Фурье.

Пример 14. *Вычислим преобразования Фурье прямоугольного импульса*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < \alpha, \\ 0, & \text{если } |x| > \alpha. \end{cases}$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} 1 \cdot e^{-ix\xi} dx = \frac{e^{i\alpha\xi} - e^{-i\alpha\xi}}{i\xi},$$

то есть $\hat{f}(\xi) = \frac{2 \sin \alpha \xi}{\xi}$.

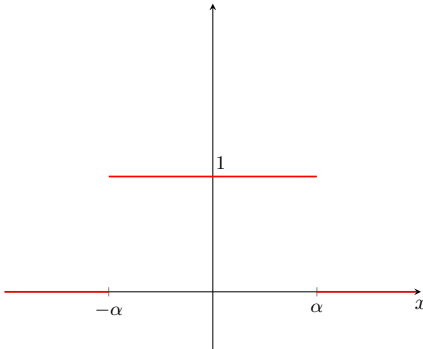


Рис. 4.1. $f(x)$

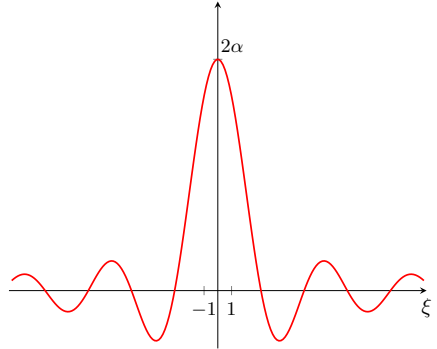


Рис. 4.2. $\hat{f}(\xi)$

△

4.1 Свойства преобразования Фурье

Поскольку преобразование Фурье является интегральным преобразованием, то все основные свойства следуют из свойств интеграл. Так например, легко видеть, что преобразование Фурье линейно:

$$\mathcal{F}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \hat{f}(\xi) + \beta \hat{g}(\xi).$$

В следующем утверждении приведены другие основные свойства преобразования Фурье.

Лемма 26

- 1) $\mathcal{F}(f(x+h)) = \hat{f}(\xi) \cdot e^{ih\xi}, \quad h \in \mathbb{R};$
- 2) $\mathcal{F}(f(x)e^{-ixh}) = \hat{f}(\xi+h), \quad h \in \mathbb{R};$
- 3) $\mathcal{F}(f(\lambda x)) = \lambda^{-1} \hat{f}(\lambda^{-1}\xi), \quad \lambda \neq 0;$
- 4) $\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = i\xi \hat{f}(\xi),$
- 5) $\mathcal{F}(-ixf(x)) = \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi).$

Обратите внимание, что умножению на $-ix$ соответствует производная $\frac{d}{d\xi}$, а производной $\frac{d}{dx}$ соответствует умножение на $i\xi$.

Доказательство. Все указанные свойства доказываются непосредственным вычислением преобразования Фурье. Поэтому мы докажем только второе и четвёртое.

2)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x)e^{-ixh}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixh}e^{-ix\xi} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix(\xi+h)} dx = \hat{f}(\xi+h). \end{aligned}$$

4) Заметим, что в силу интегрируемости функции $f(x)$ и её производной $f'(x)$ имеем $f(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Поэтому, интегрируя по частям

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ix\xi} dx =$$

$$= f(x)e^{-ix\xi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx = i\xi \hat{f}(\xi). \quad \square$$

Для свёртки выполнено следующее свойство:

Лемма 27

$$\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi).$$

Идея доказательства состоит в изменении порядка интегрирования, и мы предоставляем читателю проделать это самостоятельно.

Лемма 28 *Выполнено равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x) dx,$$

при условии, что все выражения имеют смысл.

Доказательство. Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)g(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy} dx g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ixy} dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 29 Пусть $\alpha > 0$, тогда

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha x^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{1}{4\alpha}\xi^2}.$$

Доказательство. Имеем

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx.$$

Заметим, что в силу равенства (1.1), имеем $\hat{f}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Далее, по свойству 5) из леммы 26

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) &= \mathcal{F}(-ixf(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)e^{-\alpha x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \\ &= \frac{i}{2\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{i}{2\alpha} \mathcal{F}(f'(x)). \end{aligned}$$

По свойству 4) из леммы 26 $\mathcal{F}(f'(x)) = i\xi \hat{f}(\xi)$. Получаем следующую задачу

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = -\frac{\xi}{2\alpha} \hat{f}(\xi), \\ \hat{f}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \end{cases}$$

Решением является функция

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{1}{4\alpha}\xi^2},$$

что и требовалось. □

4.1.1 Обратное преобразование Фурье

Определим обратное преобразование Фурье

$$\mathcal{F}^{-1}(f(\xi))(x) = \check{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Отметим полезные свойства, связывающие прямое и обратное преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi) = 2\pi \check{f}(-\xi), \quad (4.1)$$

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-1} \hat{f}(-x). \quad (4.2)$$

Зададимся вопросом: *верно ли, что*

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(x))) = f(x)?$$

Положительный ответ даёт следующая теорема.

Теорема 30 Пусть f — кусочно-гладкая функция, тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = f(x).$$

Доказательство. Воспользуемся специальным приёмом: представим интеграл в виде предела

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{\frac{1}{n}\xi^2} e^{ix\xi} d\xi.$$

Применяя свойство 2) из леммы 26 и лемму 29, получаем соотношение

$$\mathcal{F}\left(e^{\frac{1}{n}\xi^2} e^{ix\xi}\right)(y) = \sqrt{n\pi} e^{-\frac{n}{4}(y-x)^2}. \quad (4.3)$$

С помощью 28 и равенства (4.3) выводим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{\frac{1}{n}\xi^2} e^{ix\xi} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{n\pi} e^{-\frac{n}{4}(y-x)^2} f(y) dy \\ &= (K_n * f)(x), \end{aligned}$$

где последовательность функций

$$K_n(y) = \frac{\sqrt{n\pi}}{2\pi} e^{-\frac{n}{4}y^2}$$

является δ -образной последовательностью. Поэтому, согласно следствию 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (K_n * f)(x) = f(x),$$

что и доказывает теорему. □

Задачи к 4.1

В следующих задачах вычислите преобразование Фурье функции $f(x)$:

78.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$



79.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x), & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$



80.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$



81.

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$



82. $f(x) = e^{-|x|}$. ▮▮▮▮➡

83. $f(x) = e^{-x^2}$. ▮▮▮▮➡

84. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. ▮▮▮▮➡

85. Найти обратное преобразование Фурье $\check{g}(x)$ функции, заданной формулой.

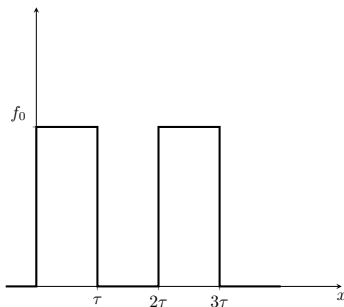
$$g(y) = \begin{cases} |y|, & \text{если } |y| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |y| > 1. \end{cases}$$



86. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 |x| e^{-ixy} dx$. ▮▮▮▮➡

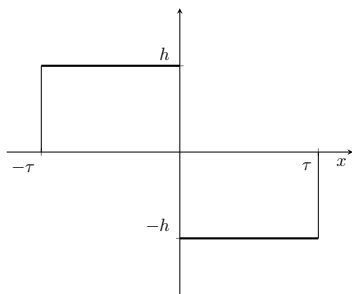
Найти преобразования Фурье функций, представленных графически.

87. Два прямоугольных импульса

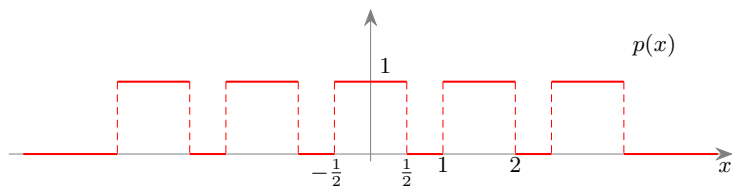




88. Два прямоугольных импульса



89. Пять прямоугольных импульсов



90. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy\alpha}}{1+y^2} dy.$$



91. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y} e^{iy\alpha} dy.$$



92. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Вычислить интеграл¹

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha y}{y} dy.$$



¹Это интеграл называется интегралом Дирихле.

4.2 Уравнения в частных производных

Преобразование Фурье является эффективным инструментом для решения уравнений в частных производных.

4.2.1 Уравнение теплопроводности

Решим следующую задачу о распространении тепла в бесконечно длинном стержне:

$$\begin{cases} \sigma u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = 0; \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Поддействуем преобразованием Фурье $\mathcal{F}$

$$\begin{cases} \hat{u}'_t(\xi, t) = -\frac{k}{\sigma}\xi^2\hat{u}(\xi, t); \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi). \end{cases}$$

Эту задачу легко решить

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi)e^{-\frac{k}{\sigma}\xi^2t}.$$

Чтобы найти $u(x, t)$ применим обратное преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}$. Используя леммы 27 и 29

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{k}{\sigma}\xi^2t} \cdot \hat{u}_0(\xi)) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{\sigma x^2}{4kt}} * u_0(x).$$

Итак,

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma y^2}{4kt}} u_0(x - y) dy.$$

4.2.2 Волновое уравнение

Решим следующую задачу о колебании бесконечно длинной струны:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \sigma^2 u_{xx}(x, t) = 0; \\ u(x, 0) = u_0(x); \\ u_t(x, 0) = v_0(x). \end{cases}$$

Подеиствуем преобразованием Фурье $\mathcal{F}$

$$\begin{cases} \hat{u}_t''(\xi, t) + \sigma^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, t) = 0; \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi); \\ \hat{u}'(\xi, 0) = \hat{v}_0(\xi). \end{cases}$$

Получаем решение

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) \cos \sigma \xi t + \frac{\hat{v}_0(\xi)}{\sigma \xi} \sin \sigma \xi t.$$

Заметим, что

$$\hat{u}_0(\xi) \cos \sigma \xi t = \hat{u}_0(\xi) \frac{(e^{i\sigma \xi t} + e^{-i\sigma \xi t})}{2} = \frac{1}{2} \mathcal{F}(u_0(x + \sigma t) + u_0(x - \sigma t))$$

и

$$\frac{\hat{v}_0(\xi)}{\sigma \xi} \sin \sigma \xi t = \frac{1}{2\sigma} \hat{v}_0(\xi) \cdot \hat{P}_{\sigma t}(x) = \frac{1}{2\sigma} \mathcal{F}(v_0(x) * P_{\sigma t}(x)),$$

где $P_{\sigma t}$ это прямоугольный импульс (см. пример 14.).

Поэтому

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + \sigma t) + u_0(x - \sigma t)}{2} + \frac{1}{2\sigma} \int_{-\sigma t}^{\sigma t} v_0(x - y) dy.$$

Задачи к 4.2

93. Решить следующую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0; \\ u(0, x) = e^{-x^2}. \end{cases}$$



94. Используя преобразование Фурье решить задачу

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0; \\ u(0, x) = e^{-x^2}; \\ u_t(0, x) = 0. \end{cases}$$



95. Решить следующую задачу для уравнения колебания струны

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0; \\ u(0, x) = e^{-|x|}; \\ u_t(0, x) = 0. \end{cases}$$



4.3 Скалярное произведение и норма

Определим скалярное произведение и норму:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx,$$

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следующая теорема является аналогом равенства Ляпунова для рядов Фурье.

Теорема 31 (равенство Парсеваля)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi,$$

и, в частности,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Используя пример 14 при $\alpha = 1$ равенство Парсеваля имеет вид

$$\int_{-1}^1 1 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi,$$

откуда можно получить

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi = \pi.$$

4.4

傅里叶变换将可积函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 表示成复指数函数的积分或级数形式

$$\mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx, \xi \text{ 为任意实数.}$$

傅里叶变换数的一些性质:

- 1) $\mathcal{F}(f(x+h)) = \hat{f}(\xi) \cdot e^{ih\xi};$
- 2) $\mathcal{F}(f(x)e^{-ixh}) = \hat{f}(\xi+h);$
- 3) $\mathcal{F}(f(\delta x)) = \delta^{-1} \hat{f}(\delta^{-1}\xi);$
- 4) $\mathcal{F}(\frac{d}{dx}f(x)) = i\xi \hat{f}(\xi);$
- 5) $\mathcal{F}(-ixf(x)) = \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi).$

卷积一些性质: $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi).$

帕塞瓦尔定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Термины к главе 4

обратное преобразование Фурье		傅立叶逆变换
преобразование Фурье		傅立叶变换
прямое преобразование Фурье		傅立叶直接变换
равенство Парсеваля		帕瑟瓦尔等式
сдвиг		位移, 移动; 剪移, 剪切; [地]断层

ОТВЕТЫ

1. $P(x) = H(x+1) - H(x-1)$. 2. $P(x) = p_1(H(x-a) - H(x-b))$.
 3. . 4. . 5. 6. $xH(x)$.
 7. $(x+1)H(x+1)$. 8. $(2-|x|)H(2-|x|)$. 9. $a = 0.25, b = 0, c = -0.25, d = 1$. 10.

$$(h_1 * h_2)(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 - |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

11. $(1+|x|)e^{-|x|}$. 12. $-0.25a^{-0.5}xe^{a0.5x^2}$. 13. а) $I_n = 1$; б)

$$h_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{(1/n+x)^2}{2}, & -1/n < x < 0, \\ 1 - \frac{(x-1/n)^2}{2}, & 0 < x < 1/n, \\ 1, & x > 1/n. \end{cases}$$

- с) $h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ 14. а) $I_n = 1$; б) $1/2$. 16. Да, является.

17. $\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, указание: $\cos^2 nx = (1 + \cos 2nx)/2$, далее использовать лемму Римана-Лебега 4. 18. (а) $\frac{p}{p^2+\omega^2}$, (б) $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, (в) $\frac{p}{p^2-\omega^2}$, (г) $\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$.

19. а) $\frac{2}{p^3} - \frac{2}{p}$, б) $\frac{1}{2p} + \frac{1}{2} \frac{p}{p^2+4}$, в) $\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2+4}$, г) $\frac{p}{p^2+1}$. 20. $\frac{2}{p^2+16}$.

21. а) $\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$, б) $\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$, в) $\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$. 22. $\frac{1}{p} + \frac{2}{p-2} + \frac{1}{p-4}$. 23. $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-w)^{\alpha+1}}$.

24. а) $\frac{\sin 3t}{3}$, б) $3e^{-2t}$, в) $3 \cos t - 2 \sin t$, г) $2 \operatorname{ch} 2t + 0.5 \operatorname{sh} 2t$. 25. $f(t) = \frac{e^{5t} - e^{-2t}}{t}$.

26. (а) $\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$, (б) $\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$, (в) $\frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$. 27. $\frac{1}{p} \ln \frac{p+1}{p}$. 29. Указание: использовать задачу 26. 30. Указание: использовать задачу 26.

31. Указание: использовать теорему об интегрировании изображения.
 32. Указание: использовать теорему об интегрировании изображения.
 33. 0.06. Указание: это значение $\mathcal{L}(t \sin t)$ в $p = 3$. 34. $\frac{2(p+1)}{(p+1)^2+1^2}$.
 35. (б) $2e^{2t} + e^{-t}$, 36. $\frac{1}{3}t + \frac{4}{9} + 3e^t - \frac{4}{9}e^{3t}$. 37. $\frac{1}{2}(t \cos t + \sin t)$.
 38. $e^{-t} \sin t$. 39. $\frac{5}{2}(1 - e^{-2t}) - 4te^{-t}$. 40. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.
 41. $\frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos((2k+1)x)}{2k+1}$. 42. $\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots$
 43. $2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)}$. 44. $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, указание: можно заметить, что $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ и использовать пример 11. 45. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1)x$.
 46. $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.
 47. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \cdot \sin nx$. 48. 49. 50. 51. Указание: определить $f_E(x) = (f(x) + f(-x))/2$. 52. $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$.
 53. $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. 54. $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nx$.
 55. $\frac{\operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a-in} e^{inx}$. 56. $-\frac{2i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1}$. 57. а) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx$,
 б) $1 + \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$, в) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$. 62. $(\pi - 1)/2$. 63. $-\frac{7}{15}\pi^2 - 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos nt$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. 65. $-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nx$. 66. $\sin x$
 67. $-(1/2) \cos x$. 68. (а) 0, (б) $A \cos x + B \sin x$. 69. $A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2(n^2-4)}$, указание: использовать тригонометрический ряд Фурье. 70. $u(t, x) = e^{-t} \sin x$. 71. $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)t) \sin((2k-1)x)$.
 72. $\frac{2a}{a\pi} = \left(\frac{2a}{a\pi}\right)^2 + \sum_{k \neq 0} \left(\frac{\sin ka}{\pi k}\right)^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{a(\pi-a)}{2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2} = (\pi^2 - 3\pi a + 3a^2)/6$. 73. 100π . 74. $(2/3)\pi$.
 75. Указание: написать равенство Ляпунова для $f(x)$ и для $f'(x)$. 76. Указание: см. предыдущую задачу. 77. Указание: см. две предыдущие задачи. 78. $\hat{f}(\xi) = \frac{2 \sin \xi}{\xi}$. 79. $\hat{f}(\xi) = \frac{2(1-\cos \xi)}{\xi^2}$. 80. $\hat{f}(\xi) = 2i \frac{\xi \cos \xi - \sin \xi}{\xi^2}$, указание: использовать предыдущую задачу и свойство 5) из леммы 26. 81. $\hat{f}(\xi) = 2 \frac{\xi \sin \xi + \cos \xi - 1}{\xi^2}$. 82. $\frac{2}{1+\xi^2}$.
 83. $\sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}\xi^2}$, см. лемму 29. 84. $\pi e^{-|\xi|}$, указание: использовать свой-

- ство (4.1) и задачу 82. **87.** $f_0 \frac{2 \sin \frac{\tau}{2} \xi}{\xi} (e^{-i \frac{\tau}{2} \xi} + e^{-i \frac{5\tau}{2} \xi})$, указание: использовать линейность преобразования Фурье, пример 14. и свойство 1) из леммы 26. **88.** $\frac{2ih}{\xi} (1 - \cos \tau \xi)$. **89.** $\sum_{k=-3}^3 \frac{2 \sin \frac{1}{2} \xi}{\xi} e^{ik \frac{3}{2} \xi}$. **90.** $e^{-|\alpha|}$, указание см. задачу 84 **91.** 1, если $|\alpha| < 1$; 0, если $|\alpha| > 1$; $\frac{1}{2}$, если $|\alpha| = 1$. **92.** $\frac{\pi}{2}$, если $\alpha > 0$; $-\frac{\pi}{2}$, если $\alpha < 0$; не существует, если $\alpha = 0$. **93.** $\frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$. **94.** $u(t, x) = 0.5(\exp(-(x+t)^2) + \exp(-(x-t)^2))$. **95.**

Литература

1. Vretblad A. *Fourier Analysis and its Applications*. Graduate texts in mathematics 223. Springer, 2005.
2. Александров В. А. *Преобразование Лапласа: Метод. указания*. Новосибирск: НГУ, 1992. http://www.phys.nsu.ru/ok03/doc/Aleksandrov_Laplace_Transform.pdf.
3. Александров В. А. *Ряды Фурье: Метод. пособие*. Новосибирск: НГУ, 1996. http://www.phys.nsu.ru/ok03/doc/Aleksandrov_FourieSeries.pdf.
4. Александров В. А. *Преобразование Фурье: Учеб. пособие*. Новосибирск: НГУ, 2002. http://www.phys.nsu.ru/ok03/doc/Transformation_Fourier_1_Aleksandrov_FF_NGU_2002_62s.pdf.
5. Егоров А.А. Бугаева С.Г. *Преобразование Лапласа: теоремы, примеры и задачи. Учеб. пособие*. Новосибирск: НГУ, 2011. http://www.phys.nsu.ru/ok03/doc/Preobrazovanie_Laplasya_Bugaeva_Egorov_FF_NGU_2011.pdf.
6. Арфкен Г. *Математические методы в физике*. М.: Атомиздат, 1970.
7. Бельхеева Р.К. *Ряды Фурье в примерах и задачах*. Новосибирск: НГУ, 2011. http://www.phys.nsu.ru/ok03/doc/RF_5.pdf.
8. Бельхеева Р.К. *Преобразование Фурье в примерах и задачах*. Новосибирск: НГУ, 2014. http://www.phys.nsu.ru/ok03/doc/PrFu_6.pdf.