

Лекция 1

1.1 Комплексные числа

Напомним, что комплексные числа можно определить как множество упорядоченных пар вещественных чисел

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad z = x + iy,$$

где i — мнимая единица ($i^2 = -1$). Действительная часть $\operatorname{Re} z = x$, мнимая часть $\operatorname{Im} z = y$.

Множество $\mathbb{C}$ снабжено операцией сложения

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

и операцией умножения

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Для каждого числа $z \in \mathbb{C}$ существует противоположное по сложению число $-z$ такое, что $z + (-z) = 0$. Для каждого числа $z \neq 0$ существует обратное по умножению число $\frac{1}{z}$ такое, что $z \cdot \frac{1}{z} = 1$. Имеет место формула

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Модуль числа $z = x + iy$ определяется как

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для модуля комплексного числа выполняются следующие свойства:

$$\begin{aligned}
 |z| = 0 &\Leftrightarrow z = 0; \\
 |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|, \quad |z^n| = |z|^n; \\
 \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{при } z_2 \neq 0; \\
 |\operatorname{Re} z| &\leq |z| \text{ и } |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \quad (|x| \leq |z| \text{ и } |y| \leq |z|); \\
 |z| &\leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|, \quad (|z| \leq |x| + |y|); \\
 |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{неравенство треугольника}); \\
 ||z_1| - |z_2|| &\leq |z_1 - z_2|.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Число $\bar{z} = x - iy$ называется **сопряжённым**, к $z = x + iy$. При этом справедливы следующие свойства:

$$\begin{aligned}
 \overline{(z_1 + z_2)} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \\
 \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \\
 \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; \\
 \overline{\bar{z}} &= z; \\
 z \cdot \bar{z} &= (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2, \quad (z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2); \\
 z \cdot \bar{z} &= |z|^2, \quad |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}; \\
 z + \bar{z} &= 2 \operatorname{Re} z \quad \text{и} \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z;
 \end{aligned}$$

Особо отметим следующее свойство

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \tag{1.2}$$

1.2 Комплексная плоскость

Рассмотрим плоскость и прямоугольную систему координат на ней. Ось абсцисс (ось Ox) обозначим $\operatorname{Re} z$, а ось ординат (ось Oy) обозначим $\operatorname{Im} z$ (см. рис 1.1). Каждому комплексному числу $z = x + iy$ сопоставим точку на этой плоскости с координатами (x, y) , и, другими словами, радиус-вектор с координатами (x, y) .

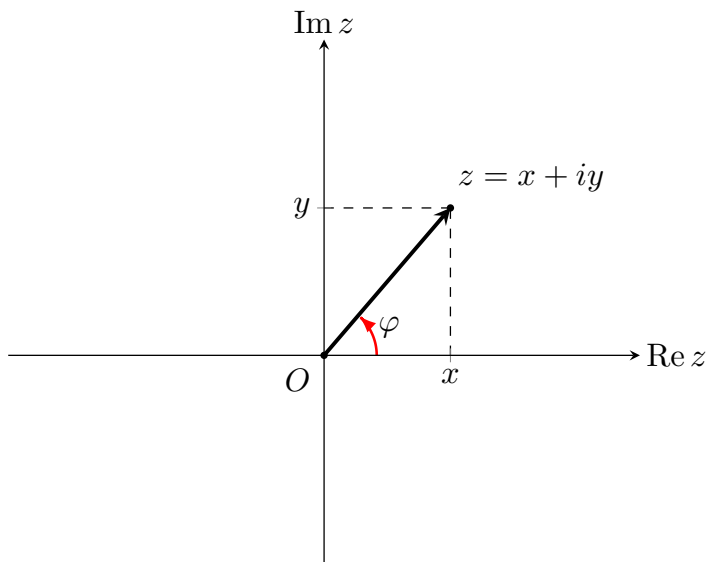


Рис. 1.1. Комплексная плоскость.

Заметим, что каждому комплексному числу соответствует только одна точка плоскости, и, наоборот, каждой точке на плоскости соответствует только одно комплексное число.

Геометрически сложение чисел z_1 и z_2 производится по правилу сложения векторов (по правилу параллелограмма). Разность $z_1 - z_2$ представляется вектором, конец которого находится в точке z_1 , а начало — в точке z_2 (см. рис. 1.2).

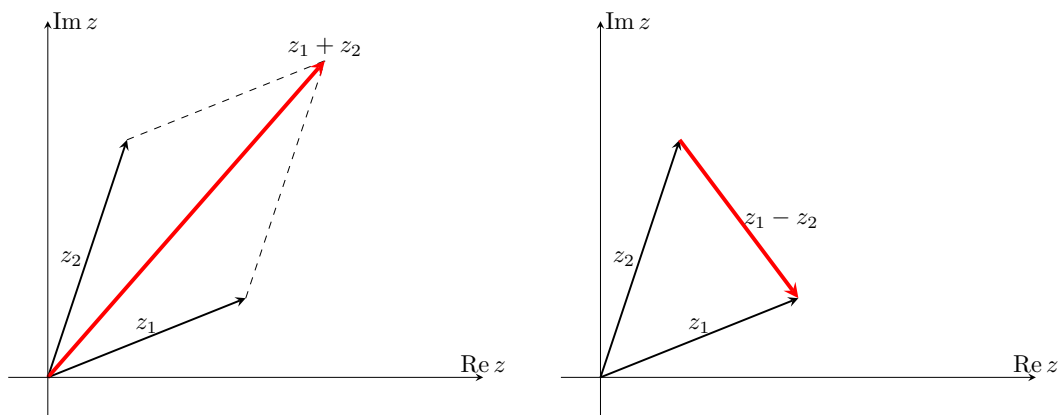
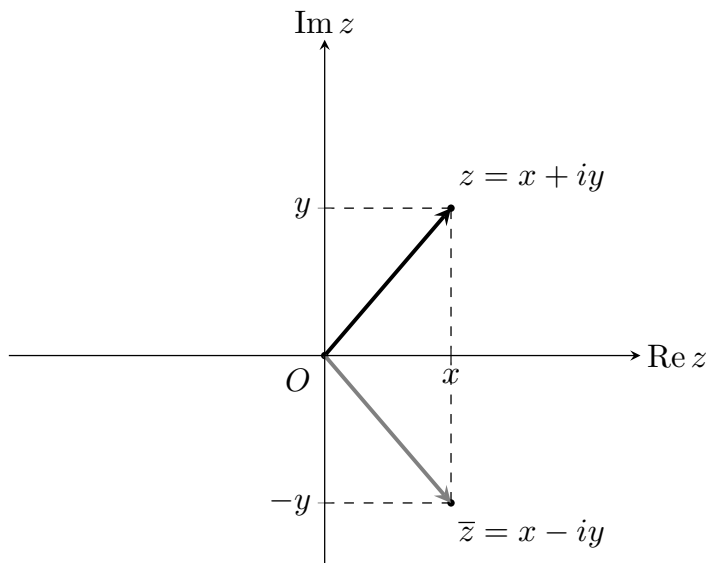


Рис. 1.2. Геометрическое представление суммы и разности

Геометрический смысл операции сопряжения $z \mapsto \bar{z}$ состоит в отражении относительно оси Ox .



1.2.1 Полярные координаты

Любой вектор на плоскости полностью определяется своей длиной и углом с положительным направлением оси Ox .

Модуль комплексного числа

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

это длина вектора (x, y) . Обозначим $\varphi = \text{Arg } z$ — аргумент комплексного числа z , при этом

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Отсюда можно вывести тригонометрическую запись

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Строго говоря, аргумент комплексного числа определен не однозначно, в общем виде аргумент можно записать как

$$\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z},$$

где $0 \leq \arg z < 2\pi$ — **главное значение** аргумента. В свою очередь, главное значение аргумента комплексного числа определено однозначно (и принимает значения в промежутке $[0, 2\pi)$).

Пусть $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, а $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ — два комплексных числа (в тригонометрической записи), тогда несложно проверить, что их произведение можно вычислить следующим образом:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (1.3)$$

Другими словами, модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения.

Упражнение 1 Вывести формулу произведения (1.3).

Для любого целого числа k верно

$$z^k = \rho^k(\cos k\varphi + i \sin k\varphi). \quad (1.4)$$

Другими словами, формула (1.4) задаёт способ возведения комплексного числа в степень. При $\rho = 1$ из выражения (1.4) выводится **формула Муавра**¹:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi. \quad (1.5)$$

Эту формулу можно использовать для нахождения синусов и косинусов кратных углов.

1.2.2 Бесконечно удалённая точка

Введём понятие *расширенной комплексной плоскости*, состоящей из обычной комплексной плоскости и единственного бесконечно удалённого элемента — **бесконечно удалённой точки** $z = \infty$. Отметим, что аргумент комплексного числа ∞ не определён, так же как и его действительная и мнимая часть.

Для комплексного числа ∞ полагают следующие алгебраические свойства:

$$\frac{1}{\infty} = 0; \quad \frac{1}{0} = \infty;$$

$$z + \infty = \infty, z - \infty = \infty;$$

$$z \cdot \infty = \infty, \quad \text{при } z \neq 0;$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, \quad \text{при } z \neq \infty, \quad \text{а операции}$$

$$\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty} \text{ — лишены смысла.}$$

Отметим, что так как $\frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty$, то операция $\frac{0}{0}$ также не определена.

¹Часто формулой Муавра называют выражение (1.4).

1.3 Сфера Римана

Другим геометрическим представлением комплексных чисел является сфера Римана.

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство с координатами (ξ, η, θ) и совместим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с плоскостью $O\xi\eta$ так, чтобы действительная ось совпала с осью $O\xi$, мнимая ось с осью $O\eta$, и положительные направления на соответствующих осях совпадали.

Обозначим через S сферу с центром в точке $(0, 0, \frac{1}{2})$ радиуса $\frac{1}{2}$, имеющую уравнение

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad (1.6)$$

а точку $(0, 0, 1)$ назовем **полюсом** сферы S и обозначим символом P . Соединим отрезком точку $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ с полюсом P , при этом отрезок пересечет сферу S в единственной точке $M(\xi, \eta, \theta)$. Точка M называется **стереографической проекцией** точки $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ на сферу S .

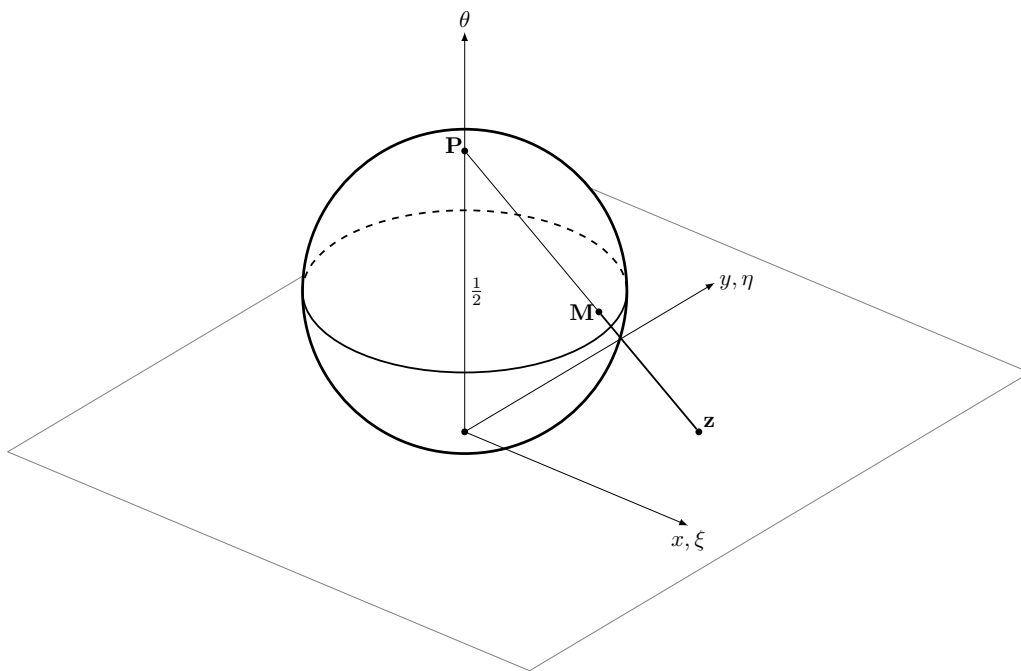


Рис. 1.3. Сфера Римана

Стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и точками сферы S с выколотым полюсом P .

В силу коллинеарности точек $P(0, 0, 1)$, $M(\xi, \eta, \theta)$ и $\mathbf{z}(x, y, 0)$ имеем

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{1 - \theta}{1},$$

откуда выводим

$$x = \frac{\xi}{1 - \theta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \theta}, \quad z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \theta}. \quad (1.7)$$

Поскольку

$$|z|^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \theta)^2},$$

то из уравнения сферы (1.6) получаем

$$|z|^2 = \frac{\theta}{1 - \theta}. \quad (1.8)$$

Выражая из равенства (1.8) значение θ и подставляя его в равенства (1.7), находим

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \theta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \quad (1.9)$$

Формулы (1.9) называют формулами стереографической проекции.

При неограниченном удалении точки z от нуля в произвольном направлении (вдоль произвольной прямой) образ этой точки на сфере всегда будет стремиться к полюсу P . Если мы доопределим стереографическую проекцию, полагая полюс P образом бесконечно удаленной точки, то получим взаимно однозначное соответствие между расширенной комплексной плоскостью $\mathbb{C}$ и сферой S .

Упражнение 2 Доказать круговое свойство стереографической проекции: всякая окружность или прямая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ отображается стереографической проекцией в окружность на сфере S , и обратно, прообразом всякой окружности на сфере S является либо окружность либо прямая на плоскости $\mathbb{C}$.

Упражнение 3 Доказать свойство консерватизма углов: угол между любыми гладкими кривыми на комплексной плоскости равен углу между образами этих кривых, лежащими на сфере S .

1.4 Кривые на комплексной плоскости

Пусть дана комплекснозначная функция $\gamma(t)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Когда точка t пробегает отрезок $[a, b]$, точка $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ пробегает некоторое множество в комплексной плоскости.

Это множество вместе с указанием порядка, в котором проходятся все его точки, называется **непрерывной кривой**, а уравнение $z = \gamma(t)$ - **параметрическим уравнением этой кривой**.

Порядок, в котором в котором проходятся точки называется *ориентацией кривой*.

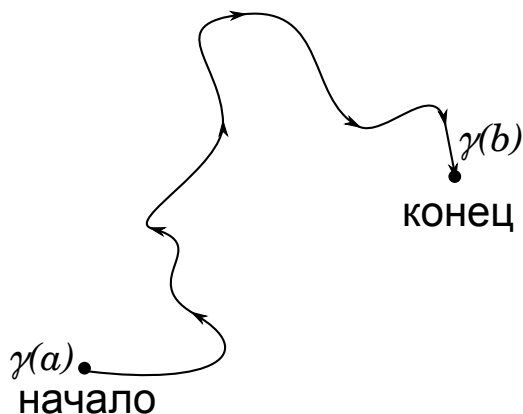


Рис. 1.4. Кривая γ .

Пример 4. Параметризация отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2 имеет вид

$$\gamma(t) = z_1 + t \cdot (z_2 - z_1), \quad t \in [0, 1].$$

При этом кривая γ ориентирована в направлении от z_1 к z_2 .

△

Кривая, не имеющая самопересечений называется **простой кривой** или простым контуром.

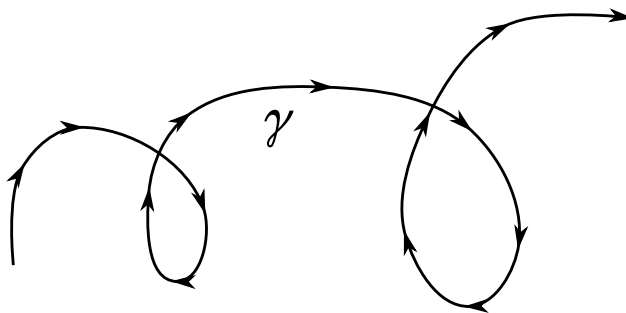


Рис. 1.5. Кривая имеет два самопересечения.

Кривая называется **замкнутой**, если её начало совпадает с её концом, то есть если она имеет параметрическое уравнение

$$z = z(t), \quad a \leq t \leq b, \quad \text{для которого} \quad z(a) = z(b).$$

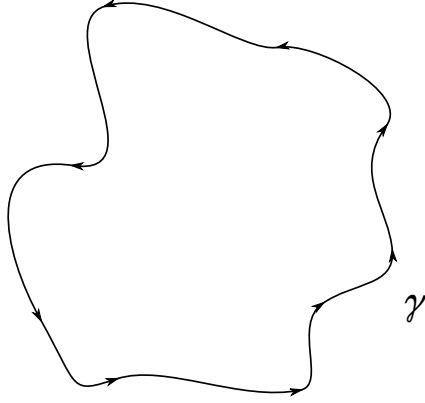


Рис. 1.6. Замкнутая кривая без самопересечений, ориентированная против часовой стрелки.

Пример 5. Одной из самых простых замкнутых кривых является окружность. Пусть $C(z_0, R)$ — окружность с центром в точке z_0 и радиусом R . Тогда параметризация этой окружности имеет вид

$$\gamma(t) = z_0 + Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

При этом кривая γ ориентирована против часовой стрелки. Если требуется ориентация по часовой стрелке, то следует выбрать уравнение вида

$$\gamma(t) = z_0 + Re^{-it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Также приведём параметризацию эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\gamma(t) = a \cos t + b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

против часовой стрелки, и по часовой стрелке

$$\gamma(t) = a \cos t - b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

△

Если кривая γ имеет хотя бы одно параметрическое уравнение $z = \gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, с функцией $\gamma(t)$, имеющей на отрезке $[a, b]$ непрерывную и отличную от нуля производную, то γ называется **гладкой кривой**.

Производная $\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$ — является касательным вектором к кривой γ в точке $\gamma(t_0)$.

Непрерывная кривая γ называется **кусочно-гладкой кривой**, если её можно разбить на конечное число частей, каждая из которых является гладкой кривой.

1.5 Топология комплексной плоскости

Приведём основные топологические понятия, которые потребуются в данном курсе.

Пусть $z, w \in \mathbb{C}$, тогда $|z - w|$ — расстояние между точками z и w . Расстояние от точки до множества и расстояние между множествами определяются следующим образом

$$\text{dist}(z, A) = \inf_{w \in A} |z - w|, \quad \text{dist}(A, B) = \inf_{z \in A, w \in B} |z - w|.$$

Фиксируем комплексное число $a \in \mathbb{C}$ и вещественное число $r > 0$, тогда числа z , удовлетворяющие равенству $|a - z| = r$, составляют множество точек, удалённых от a на расстояние r . Другими словами, это окружность с центром в a и радиусом r .

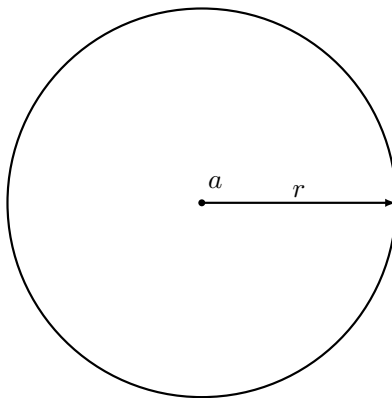


Рис. 1.7. Окружность $|a - z| = r$

Множество точек $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ образуют круг.

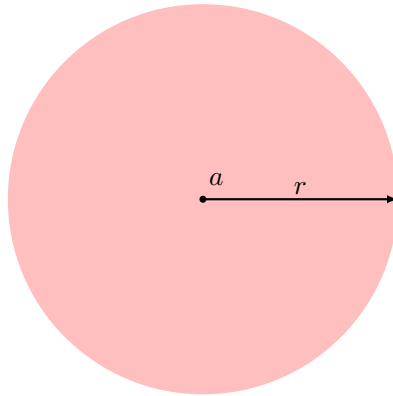


Рис. 1.8. Круг $|a - z| < r$

Также множество $B(a, r)$ называют **окрестностью** точки a (или r -окрестностью). Однако r -окрестностью бесконечно удалённой точки называют множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(a, r)}$, то есть внешность круга. Окрестностью бесконечно удалённой точки на сфере Римана является «шапочка», то есть часть сферы, расположенная выше некоторой плоскости $\theta = a$, $0 < a < 1$.

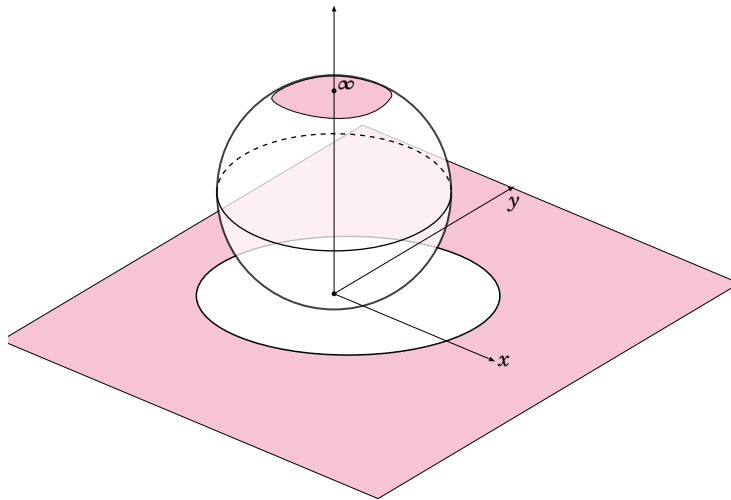


Рис. 1.9. Окрестность бесконечно удалённой точки.

Пусть $E \subset \mathbb{C}$.

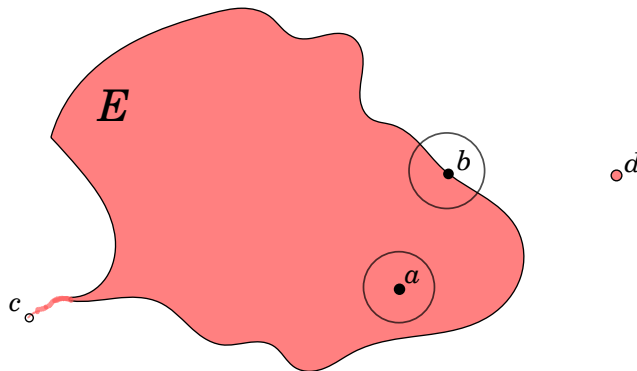
1. Точка a называется **внутренней точкой** множества E , если найдётся окрест-

ность $B(a, r) \subset E$.

2. Точка b называется **граничной точкой** множества E , если всякая окрестность $B(b, r)$ содержит точки из E и из $\mathbb{C} \setminus E$.

3. Точка c называется **предельной точкой** множества E , если всякая окрестность $B(c, r)$ содержит точки из E , отличные от c .

4. Точка d называется **изолированной точкой** множества E , если $d \in E$ и найдётся окрестность $B(d, r)$, которая не содержит других точек из E .



Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется **открытым**, если все его точки внутренние. Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется **замкнутым**, если оно содержит все свои граничные точки.

Пример 6. Пусть $R > 0$ и $z_0 \in \mathbb{C}$, тогда множества $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ и $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\}$ открыты, в то время как множество $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ — замкнуто.

Пример 7. $\mathbb{C}$ и пустое множество $\emptyset$ — открытые множества (и в то же время замкнутые).

Множество всех граничных точек множества E называется **границей** и обозначается ∂E .

Множество всех внутренних точек множества E называется **внутренностью** и обозначается $\text{int } E$.

Объединение множества и его границы $\partial E \cup E$ называется **замыканием** и обозначается $\overline{E}$.

Пример 8. Пусть $E = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, тогда $\overline{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ и $\partial E = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$. $\overline{E}$ — замкнутый диск, а ∂E — окружность.

Множество E называется **связным**, если не существует двух открытых множеств U_1 и U_2 , удовлетворяющих условиям

$$E \subset U_1 \cup U_2, \quad E \cap U_1 \neq \emptyset, \quad E \cap U_2 \neq \emptyset, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Это определение связности в случае непустого открытого множества D равносильно тому, что любые две точки множества D можно соединить ломаной, целиком лежащей в данном множестве.

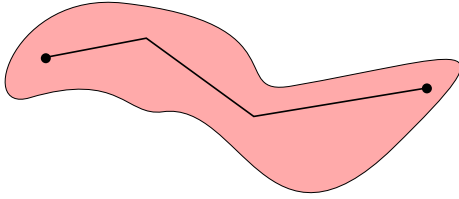


Рис. 1.10. Связное множество

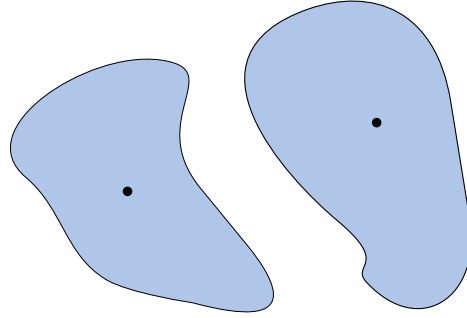


Рис. 1.11. Не связное множество (две компоненты)

| **Область** — это открытое связное множество.

Число компонент границы данной области называется *порядком связности* этой области. Далее рассматриваются только области с конечным порядком связности, иными словами *конечносвязные* области.

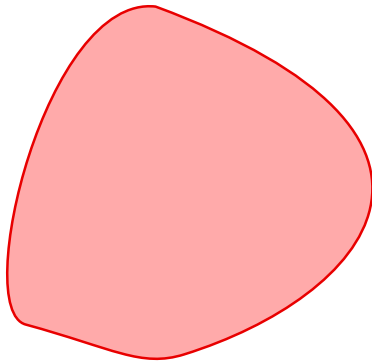


Рис. 1.12. Односвязная область

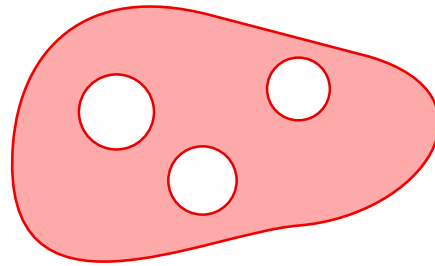


Рис. 1.13. Конечносвязная область (4-связная)

Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется **ограниченным**, если существует такой круг $B(0, R)$, $R < \infty$, что $E \subset B(0, R)$, то есть $|z| < R$ для любого $z \in E$.

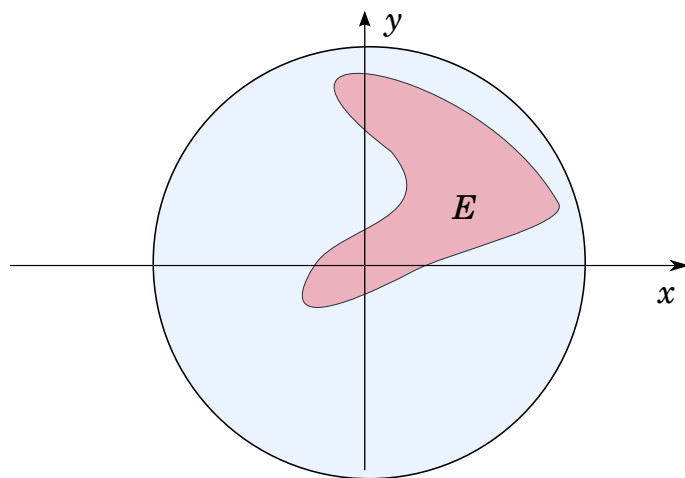


Рис. 1.14. Ограниченное множество.