

Лекция 2

2.1 Последовательности комплексных чисел

Комплексное число a называется пределом последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|z_n - a| < \varepsilon.$$

При этом используются стандартные обозначения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a,$$

либо

$$z_n \rightarrow a \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Всякой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $z_n = x_n + iy_n$. Из оценок

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \quad |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

следует, что для существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a = \alpha + i\beta$ необходимо и достаточно существование двух пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta.$$

Теперь несложно показать, что для последовательностей комплексных чисел выполняются следующие свойства: пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ и

$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = b$, тогда

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = a + b$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n w_n) = ab$,
3. если $b \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{a}{b}$.

Также верны такие классические утверждения о пределах, как критерий Коши и принцип Больцано-Вейерштрасса. С другой стороны, всякой последовательности

комплексных чисел $\{z_n\}$ можно сопоставить две последовательности действительных чисел $\{r_n\}$ и $\{\varphi_n\}$, где $z_n = r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi_0$, то, очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0).$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, то из неравенства $||z_n| - |z_0|| \leq |z_n - z_0|$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z_0|$, при этом нельзя в общем случае утверждать, что последовательность $\{\varphi_n = \text{Arg } z_n\}$ сходится, поскольку аргумент комплексного числа определяется неоднозначно.

2.2 Комплексная экспонента

В случае одного действительного переменного экспонента $f(x) = e^x$ определяется различными способами: значение предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

решение задачи Коши

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

По аналогии мы можем определить комплексную экспоненту. Пусть $z = x + iy$, рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \quad (2.1)$$

Если этот предел существует в некоторой точке z , обозначим его значение через e^z .

Лемма 1 Предел (2.1) существует для всех $z \in \mathbb{C}$.

Доказательство.

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{n/2} = e^{\frac{n}{2} \ln(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2})} = e^{\frac{n}{2} (\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2})} = e^{x + o(1/n)}.$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| = e^x.$$

При достаточно больших значениях n точка $\left(1 + \frac{z}{n}\right)$ лежит в правой полу-

плоскости, поэтому будем считать, что $\text{Arg} \left(1 + \frac{z}{n}\right)$ равен арктангенсу отношения мнимой части к действительной и лежит в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arg} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \arctg \frac{y/n}{1 + x/n} = y.$$

Следовательно

$$|e^z| = e^x = e^{\text{Re } z}, \quad \text{Arg } e^z = y = \text{Im } z$$

и

$$e^z = e^{x+iy} = |e^z|(\cos(\text{Arg } e^z) + i \sin(\text{Arg } e^z)) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Таким образом введенная нами функция на действительной оси (т.е. при $y = 0$) совпадает с обычной экспонентой действительного переменного, а при $x = 0$ получаем формулу Эйлера

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Комплексная экспонента сохраняет многие свойства обычной экспоненты.

Упражнение 4 Докажите свойство $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

Кроме того комплексная экспонента является периодической функцией, правда с её период комплексное число $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi ki} = e^z \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}.$$

Также отметим ещё одно интересное равенство $e^{i\pi} = -1$.

Используя комплексную экспоненту можно получить запись числа в показательной форме: $z = \rho e^{i\varphi}$, которая является более компактной, чем тригонометрическая запись.

2.3 Функции комплексного переменного

Если каждому числу z из некоторого множества $E \subset \mathbb{C}$ поставлены в соответствие одно или несколько комплексных чисел w , то говорят, что на множестве E задана **функция** $f(z) = w$ комплексного переменного.

Любая функция комплексного переменного может быть записана в виде

$$f(z) = u(z) + iv(z) \quad \text{или} \quad f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — действительнoзначные функции. Функция u называется действительной частью f и обозначается $u = \text{Re } f$, v — мнимая часть f и обозначается $v = \text{Im } f$.

Пример 6.

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Напомним:

Функция $f : G \rightarrow H$ называется **взаимно однозначной**, если для каждого $w \in H$ найдётся единственное число $z \in G$ такое, что $f(z) = w$.

Если $f : G \rightarrow H$ взаимно однозначная функция, то существует **обратная функция** $g = f^{-1}$, $g : H \rightarrow G$ такая, что $f(g(w)) = w$ для всех $w \in H$.

2.3.1 Предел функции

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется **пределом** функции $f(z)$ в точке z_0

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lambda,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всех чисел z таких, что $0 < |z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$.

Если такого числа λ нет, то мы говорим, что предела $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ **не существует**.

Для существования предела функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно одновременное существование пределов функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a \quad \text{и} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b,$$

где $\lambda = a + ib$.

Упражнение 5 Показать, что предела $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ не существует.

2.3.2 Непрерывные функции

Функция $f(z)$ называется **непрерывной** в точке z_0 , если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функция называется непрерывной на некотором множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Непрерывность функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, как функции комплексного переменного z , эквивалентна одновременной непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0) , как функций двух действительных переменных. Отсюда следует, что многие свойства непрерывных функций двух действительных переменных

непосредственно переносятся на непрерывные функции комплексного переменного. А именно, *сумма, разность, произведение и частное двух непрерывных функций также являются непрерывными функциями* (в случае частного исключаются те точки, в которых делитель обращается в нуль). Если функция $w = f(z)$ непрерывна на множестве E и её значения принадлежат множеству F , на котором непрерывна функция $\zeta = g(w)$, то *сложная функция $\zeta = g(f(z)) = h(z)$ также непрерывна на E .*

Пример 7. Очевидно, что функции z^2 , $\bar{z}$, e^z непрерывны на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

2.4 Комплексное дифференцирование

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $z_0 \in D$.

Функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ называется **дифференцируемой в точке** z_0 , если существует предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (2.2)$$

Эквивалентное определение дифференцируемости в точке z_0 : *существует константа $\lambda \in \mathbb{C}$ такая, что*

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda h + o(h).$$

При условии существования, предел (2.2) (и константа λ) называются *производной* в точке z_0 и обозначается

$$f'(z_0) \quad \text{или} \quad \frac{df}{dz}(z_0).$$

Если функция f дифференцируема в некоторой окрестности $B(z_0, r)$ точки z_0 , то f называется **аналитической в точке**¹ z_0 .

Функция f называется **аналитической (дифференцируемой) на открытом множестве** $\Omega \subset \mathbb{C}$, если f дифференцируема в каждой точке $z \in \Omega$.

Если функция f дифференцируема на некотором множестве $E \subset \mathbb{C}$, то на этом множестве определена функция, называемая **производной**:

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow z} \frac{f(t) - f(z)}{t - z}.$$

Функция аналитическая (дифференцируемая) всюду на $\mathbb{C}$ называется **целой**.

Особо отметим, что если функция дифференцируема, то она и непрерывна. То же самое можно сформулировать иначе, если функция не является непрерывной, то она не дифференцируема.

Очевидно, что комплексная экспонента $f(z) = e^z$ — дифференцируемая функция.

¹Для данного понятия также используется термин *голоморфная в точке* функция.

Упражнение 6 Доказать, что $\frac{de^z}{dz}(z) = e^z$.

Пример 8. Функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не дифференцируема.

Решение. Действительно,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}.$$

Как мы показали в примере 7 последний предел не существует. $\triangle$

Пример 9. Функция $f(z) = \bar{z}^2$ дифференцируема при $z_0 = 0$ и не дифференцируема при $z_0 \neq 0$.

Решение. 1. Если $z_0 = 0$, то

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{h} \frac{\bar{h}}{h} = 0.$$

2. Пусть $z_0 \neq 0$. Положим $z = z_0 + re^{i\varphi}$ (тогда $z \rightarrow z_0$ при $r \rightarrow 0$). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}^2 - \bar{z}_0^2}{z - z_0} &= \frac{(\overline{z_0 + re^{i\varphi}})^2 - \bar{z}_0^2}{z_0 + re^{i\varphi} - z_0} = \frac{(\bar{z}_0 + re^{-i\varphi})^2 - \bar{z}_0^2}{z_0 + re^{i\varphi} - z_0} = \\ &= \frac{\bar{z}_0^2 + 2\bar{z}_0 re^{-i\varphi} + r^2 e^{-2i\varphi} - \bar{z}_0^2}{z_0 + re^{i\varphi} - z_0} = \\ &= \frac{2\bar{z}_0 r e^{-i\varphi} + r^2 e^{-2i\varphi}}{re^{i\varphi}} = 2\bar{z}_0 e^{-2i\varphi} + re^{-3i\varphi} \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z}^2 - \bar{z}_0^2}{z - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0} (2\bar{z}_0 e^{-2i\varphi} + re^{-3i\varphi}) = 2\bar{z}_0 \quad \text{при } \varphi = 0,$$

и

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z}^2 - \bar{z}_0^2}{z - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0} (2\bar{z}_0 e^{-2i\varphi} + re^{-3i\varphi}) = -2\bar{z}_0 \quad \text{при } \varphi = \pi/2.$$

Таким образом, $f(z) = \bar{z}^2$ не дифференцируема в $z_0 \neq 0$. $\triangle$

Для комплексной производной выполняются стандартные свойства. Пусть f, g — дифференцируемые функции, тогда

- 1) $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$ свойство линейности;
- 2) $(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$ правило Лейбница;
- 3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{(g(z))^2}$ производная отношения;
- 4) $(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot (g'(z))$ производная композиции.

2.4.1 Условия Коши—Римана

Рассмотрим функцию $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда частные производные имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z) = u_y(x, y) + iv_y(x, y).$$

Следующая теорема устанавливает связь между комплексной производной $f'(z)$ и частными производными f_x, f_y и, что более важно, описывает необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции f в смысле комплексного переменного.

Теорема 2 1) Пусть f — дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда частные производные удовлетворяют условию

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \quad (2.3)$$

2) Пусть f — комплексная функция и её частные производные f_x и f_y существуют в окрестности z_0 и непрерывны в z_0 . Если частные производные удовлетворяют условию (2.3), то функция f дифференцируема в точке z_0 .

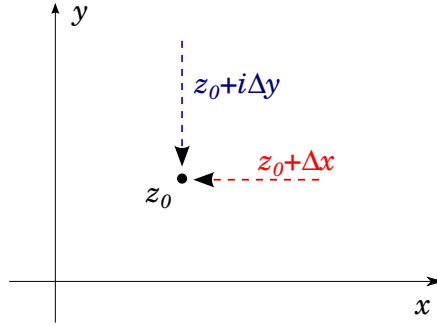
В обоих случаях 1) и 2) производную можно записать в виде

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0).$$

Доказательство. 1) Если f дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то предел

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

существует и не зависит от того, каким образом Δz стремится к нулю. Положим $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Рассмотрим два случая: а) $\Delta x \rightarrow 0, i\Delta y = 0$ и б) $\Delta x = 0, i\Delta y \rightarrow 0$.



Имеем

$$\begin{aligned} a) \quad f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad f'(z_0) &= \lim_{i\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{i\Delta y} = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \end{aligned}$$

Таким образом, условие (2.3) выполнено.

2) Пусть теперь функция $f(z) = f(x, y)$ такова, что частные производные f_x и f_y существуют в окрестности z_0 и непрерывны в z_0 и выполнено условие (2.3). Требуется доказать, что $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 . Фактически, мы покажем, что $f'(z_0) = f_x(z_0)$.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \\ &= \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0 + \Delta x) + f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta z} = \\ &= \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{f(z_0 + \Delta x + i\Delta y) - f(z_0 + \Delta x)}{\Delta y} + \frac{\Delta x}{\Delta z} \cdot \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что при $\Delta z \rightarrow 0$

$$\frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} \rightarrow f_x(z_0).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta x + i\Delta y) - f(z_0 + \Delta x)}{\Delta y} = \\ \frac{f(z_0 + \Delta x) + f_y(z_0 + \Delta x)\Delta y + o(\Delta y) - f(z_0 + \Delta x)}{\Delta y} = f_y(z_0 + \Delta x) + o(1). \end{aligned}$$

Поэтому и в силу непрерывности f_y

$$\frac{f(z_0 + \Delta x + i\Delta y) - f(z_0 + \Delta x)}{\Delta y} \rightarrow f_y(z_0) \quad \text{при } \Delta z \rightarrow 0.$$

Далее

$$\begin{aligned} f_x(z_0) = \frac{\Delta z}{\Delta z} f_x(z_0) = \frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta z} f_x(z_0) = \\ = \frac{\Delta x}{\Delta z} f_x(z_0) + \frac{\Delta y}{\Delta z} i f_x(z_0) = \frac{\Delta x}{\Delta z} f_x(z_0) + \frac{\Delta y}{\Delta z} f_y(z_0). \end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались равенством $i f_x(z_0) = f_y(z_0)$ (которое следует из (2.3)).

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f_x(z_0) = \\ = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta z} \left(\frac{f(z_0 + \Delta x + i\Delta y) - f(z_0 + \Delta x)}{\Delta y} - f_y(z_0) \right) \right] + \\ + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta x}{\Delta z} \left(\frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} - f_x(z_0) \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались тем, что $|\Delta x/\Delta z| \leq 1$, $|\Delta y/\Delta z| \leq 1$. В итоге $f'(z_0) = f_x(z_0)$. $\square$

Обычно (2.3) записывают в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.4)$$

и называют **условиями Коши-Римана**.

Пример 10. Является ли дифференцируемой функция $f(z) = y + ix$?

Решение. Находим $u = y, v = x, \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Видим, что одно из условий Коши-Римана не выполняется. Значит, данная функция не является дифференцируемой. $\triangle$