Лекция 4

Комплексный интеграл

В этой части курса нам потребуется следующее утверждение

Теорема 6 (формула Грина) *Пусть γ - ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая без самопересечений и пусть Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega = \gamma$. Если $u(x, y), v(x, y)$ — функции, дифференцируемые и имеющие непрерывные частные производные на Ω, тогда*

$$\int\limits_{\gamma} u(x, y)\, dx + v(x, y)\, dy = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy. \tag{4.1}$$

4.1 Понятие интеграла

На комплексной плоскости можно определить несколько различных интегралов. Начнём с самого распространенного. Пусть $\gamma \subset \mathbb{C}$ — спрямляемая кривая и $f(z)$ — функция определённая на этой кривой. Выберем разбиение этой кривой $\{z_0, z_1, \ldots, z_N\}$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(z_k^*) \cdot (z_{k+1} - z_k), \tag{4.2}$$

где точка z_k принадлежит кривой и находится между z_k, z_{k+1}. Если при стремлении диаметра разбиения к нулю последовательность сумм (4.2) сходится, то определен интеграл от функции $f(z)$ по кривой γ:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz.$$

Обратите внимание, что это понятие совпадает с криволинейным интегралом второго рода на плоскости.

Мы будем использовать следующее определение.

Пусть γ — ориентированная кусочно-гладкая кривая, $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ такая, что $\gamma'(t) \neq 0$. Интеграл от непрерывной функции $f : \gamma \to \mathbb{C}$ вдоль кривой γ определяется равенством

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt. \tag{4.3}$$

Приведём основные свойства интеграла:

$$\int\limits_{\gamma} (\alpha f + \beta g)\,dz = \alpha \int\limits_{\gamma} f\,dz + \beta \int\limits_{\gamma} g\,dz \quad \text{линейность,}$$

$$\int\limits_{\gamma} f\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f\,dz \quad \text{аддитивность,}$$

$$\int\limits_{\gamma^-} f\,dz = -\int\limits_{\gamma} f\,dz \quad \text{зависимость от ориентации.}$$

Пример 12. *Вычислим интеграл*

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n\,dz,$$

считая, что $n \in \mathbb{Z}$, а окружность $|z-z_0| = R$ ориентирована против хода часовой стрелки.

Решение. Воспользовавшись параметризацией окружности

$$z = z_0 + Re^{i\varphi}, \quad dz = iRe^{i\varphi}d\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

преобразуем интеграл к виду

$$I_n = \frac{1}{2\pi} R^{n+1} \int\limits_{0}^{2\pi} e^{i\varphi(n+1)}\,d\varphi.$$

При $n = -1$ получаем

$$I_{-1} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi = 1.$$

При $n \neq -1$ получаем

$$I_n = \frac{1}{2\pi i(n+1)} R^{n+1} e^{i\varphi(n+1)}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi i(n+1)} R^{n+1}(e^{i2\pi(n+1)} - 1) = 0.$$

$\triangle$

Полезно помнить, что
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=R}\frac{d\,z}{z-z_0}=1. \tag{4.4}$$

4.2 Интеграл по длине

Вместо интегральной суммы (4.2) рассмотрим сумму
$$\sum_{k=0}^{N-1} f(z_k^*)\cdot|z_{k+1}-z_k|.$$

Это приведёт нас к понятию интеграла
$$\int\limits_\gamma f(z)\,|dz| \quad \Big(\int\limits_\gamma f(z)\,dl\Big),$$
где $dl=|dz|=\sqrt{dx^2+dy^2}$ – элемент длины кривой γ. В свою очередь это понятие соответствует криволинейному интегралу первого рода.

Пусть γ — кусочно-гладкая кривая, $\gamma(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ такая, что $\gamma'(t)\neq 0$. Интеграл по длине от непрерывной функции $f:\gamma\to\mathbb{C}$ вдоль кривой γ можно определить равенством
$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz=\int\limits_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt.$$

4.2.1 Оценка интеграла

Следующее утверждение описывает связь введёных выше интегралов.

Лемма 7 *Для всякой непрерывной на кривой γ функции f выполняются неравенства*
$$\Big|\int\limits_\gamma f(z)\,dz\Big|\le\int\limits_\gamma|f(z)|\,|dz|\le\max_{z\in\gamma}|f(z)|\cdot l(\gamma).$$

Доказательство. Обозначим
$$I=\int\limits_\gamma f(z)\,dz.$$

Воспользуемся показательной формой записи комплексных чисел: $I=|I|e^{i\varphi}$, где

$\varphi = \arg \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$. Тогда

$$|I| = \int\limits_{\gamma} e^{-i\varphi} f(z) d\,z = \int\limits_{a}^{b} e^{-i\varphi} f(z(t)) z'(t)\,dt.$$

Поскольку последний интеграл является действительным числом, то

$$|I| = \int\limits_{a}^{b} Re(e^{-i\varphi} f(z(t))z'(t))\,dt \le \int\limits_{a}^{b} |f(z(t))|\,|z'(t))|\,dt =$$

$$= \int\limits_{\gamma} |f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot \int\limits_{\gamma} |dz| = \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot l(\gamma). \qquad \square$$

4.3 Интегральная теорема Коши

Мы подошли к одной из самых значимых теорем комплексного анализа. Сначала докажем вспомогательную теорему, в которой, однако, выражена суть теоремы Коши.

Теорема 8 *Пусть функция f является аналитической в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, и непрерывной в замыкании $\overline{\Omega}$. Пусть граница $\gamma =$ — замкнутая кусочно-гладкая ориентированная кривая. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} f(z) d\,z = 0.$$

Доказательство. Поскольку $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ и $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{a}^{b} f(z(t))z'(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} (ux' - vy')\,dt + i\int\limits_{a}^{b} (vx' + uy')\,dt =$$

$$= \int\limits_{\gamma} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\gamma} v\,dx + u\,dy.$$

Действительная и мнимая части функции $f = u + iv$ являются дифференцируемыми, поэтому мы можем воспользоваться формулой Грина (4.1)

$$\int\limits_{\gamma} f(z)d\,z = \int\limits_{\gamma} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\gamma} v\,dx + u\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} \Big(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big)dx\,dy + i\iint\limits_{D} \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dx\,dy = 0.$$

Равенство нулю двойных интегралов является следствием условий Коши-Римана. □

Теорема 9 (Интегральная теорема Коши)
Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — ограниченная конечносвязная область с кусочно-гладкой ориентированной границей $\gamma = \partial\Omega$, функция f является аналитической в области Ω и непрерывной в замыкании $\overline{\Omega}$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)d\,z = 0.$$

Доказательство. Граница γ состоит из n связных компонент $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$. Проведем непересекающиеся гладкие разрезы $l_k, k = 1, \ldots, l_{n-1}$, соединяющие компоненту границы γ_0 с компонентой γ_k соответственно. Тогда область $\Omega^* = \Omega \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} l_k$ будет односвязной, и, следовательно, выполнены условия теоремы 8. Исходная ориентация границы области Ω естественным образом определяет ориентацию разрезов l_k, проходимых дважды, и которые следует понимать как объединение двух различных кривых l_k^+ и l_k^-, совпадающих как множества точек комплексной плоскости, но имеющих противоположные ориентации.

Пусть γ^* — ориентированная граница односвязной области Ω^*, тогда

$$\gamma^* = \gamma \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} l_k^+\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} l_k^-\Big).$$

Учитывая аддитивность интеграла и равенство

$$\int\limits_{l^+} f(z)\,dz + \int\limits_{l^-} f(z)\,dz = 0,$$

получаем

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\gamma_k^+} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\gamma_k^-} f(z)\,dz =$$

$$\int\limits_{\gamma^*} f(z)\,dz = 0.$$

4.4 Интегральная формула Коши

Теорема 10 (Интегральная формула Коши)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$– ограниченная конечносвязная область с ориентированной в положительном направлении кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial D$, функция f является голоморфной в области D и непрерывной в $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Тогда для произвольной точки $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)d\,w}{w - z}.$$

Доказательство. 1. Пусть точка $z \in D$ и $d = \operatorname{dist}(z, \Gamma)$. Поскольку функция f непрерывна в точке z, то, по определению непрерывности, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из выполнения неравенства $|w - z| < \delta$ следует выполнение неравенства $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$.

2. Пусть $r < \min(d, \delta)$. Рассмотрим круг $B(z, r)$, ориентированную против хода часовой стрелки окружность $C_r = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| = r\}$ и обозначим через C_r^- окружность с противоположной ориентацией.

3. Функция $\dfrac{f(w)}{w - z}$ является голоморфной по переменной w в области $D^* = D \setminus \overline{B(z, r)}$, и по интегральной теореме Коши

$$\int\limits_{\partial D^*} \frac{f(w)d\,w}{w - z} = \int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)d\,w}{w - z} + \int\limits_{C_r^-} \frac{f(w)d\,w}{w - z} = 0$$

или

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)d\,w}{w - z} = \int\limits_{C_r} \frac{f(w)d\,w}{w - z}.$$

4. Учитывая,что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{d\,w}{w - z} = 1,$$

получаем

$$\left|f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)d\,w}{w-z}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} \frac{f(z)d\,w}{w-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} \frac{f(w)d\,w}{w-z}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_r} \frac{|f(z)-f(w)|\,|d\,w|}{|w-z|} \leq \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r}2\pi r = \varepsilon.$$

5. Из произвольности выбора числа ε следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)d\,w}{w-z}.$$

□

Если выполнены условия теоремы и $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, то функция $\dfrac{f(w)}{w-z}$ оказывается аналитической по переменной w в области D и, учитывая интегральную теорему Коши, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)d\,t}{w-z} = \begin{cases} f(z), & z \in D; \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}. \end{cases}$$