

Лекция 6

Ряды аналитических функций

6.1 Функциональные последовательности

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ и $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$. Последовательность функций $\{f_n\}$ **сходится поточечно** (converges pointwise) к функции $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ если для каждого $z \in D$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z).$$

Последовательность функций $\{f_n\}$ **сходится равномерно** (converges uniformly) к функции $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ если любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ так, что для любого $z \in D$ и $n > N$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Эквивалентное определение равномерной сходимости

$$\sup_D |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Заметим, что

$$\text{uniformly convergence} \Rightarrow \text{pointwise convergence}$$

и

$$\text{uniformly convergence} \not\Leftrightarrow \text{pointwise convergence}$$

Упражнение 9 Показать, что последовательность функций $f_n(z) = z^n$, определенная на $D = B(0, 1)$ сходится поточечно, но не сходится равномерно.

Лемма 20 Если последовательность непрерывных функций $\{f_n\}$ сходится равномерно к функции f , то функция f тоже непрерывна.

Доказательство. Пусть $z_0 \in D$ докажем, что f непрерывна в точке z_0 . В силу равномерной сходимости, для $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ так, что для всех $z \in D$ и $n \geq N$

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку функция f_n непрерывна, то найдётся $\delta > 0$ так, что при $|z - z_0| < \delta$

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда, используя неравенство треугольника получаем

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Лемма 21 Пусть $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ — последовательность непрерывных функций и $\{f_n\}$ сходится равномерно к f . Тогда для любой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset D$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда существует $N \in \mathbb{N}$ так, что

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{l(\gamma)}.$$

Используя оценку (??), выводим

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{\gamma} |f_n(x) - f(x)| \cdot l(\gamma) < \varepsilon.$$

6.2 Функциональные ряды

Понятия сходимости и равномерной сходимости очевидным образом переносятся на функциональные ряды.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно к $f(z) \Leftrightarrow$ последовательность частичных сумм $S_n(z)$ сходится равномерно к $f(z)$.

Теорема 22 (признак Вейерштрасса) ^a Пусть $|f_k(z)| \leq M_k$ для всех $z \in D$ и ряд $\sum M_k$ сходится. Тогда ряд $\sum f_n(z)$ сходится равномерно и абсолютно.

^aWeierstraßscher M-Test

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N$

$$\sum_{n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Для любого $z \in D$ и $n \geq N$

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

То есть остаток ряда $\sum_{n+1}^{\infty} f_k(z)$ равномерно сходится к нулю, следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно. $\square$

6.3 Степенные ряды

При изучении функций комплексного переменного весьма важное значение имеет их представление в виде суммы некоторого ряда уже хорошо изученных функций. Простейшим классом таких функциональных рядов являются *степенные ряды*.

Итак, ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{6.1}$$

называется **степенным рядом**.

Здесь $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — фиксированные комплексные числа, а z — комплексное переменное ¹.

Ряд (5.1) сходится при одних значениях z и расходится при других. Точно можно сказать, что при $z = 0$ ряд (5.1) сходится (так как $\sum a_n 0^n = 0 + 0 + \dots = 0$). Примерами степенных рядов могут служить следующие ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots,$$

¹Часто степенным рядом называют ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. В этом случае ряд (5.1) получается путём несложных преобразований. Степенной ряд — это простейший пример функционального ряда, т. е. ряда, членами которого являются функции от z : $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt[n]{n}} = z + \frac{z^2}{\sqrt{2}} + \frac{z^3}{\sqrt[3]{3}} + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{\frac{1}{n}} z^n = e z + 2 e^{\frac{1}{2}} z^2 + 3 e^{\frac{1}{3}} z^3 + \dots.$$

Следующая теорема характеризует сходимость степенного ряда.

Теорема 23 (Теорема Абеля) Если степенной ряд $\sum a_n z^n$ сходится в точке z_0 , то он сходится в любой точке z , такой, что $|z| < |z_0|$.

Если степенной ряд $\sum a_n z^n$ расходится в точке z_1 , то он расходится в любой точке z , такой, что $|z| > |z_1|$.

Более точную информацию о том, где сходится степенной ряд, даёт

Формула Коши–Адамара. Пусть

$$l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Обозначим $R = \frac{1}{l}$ (если $l = \infty$, то $R = 0$; если $l = 0$, то $R = \infty$). Тогда степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ сходится абсолютно в круге $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

Число R называется **радиусом сходимости** степенного ряда. Множество $\{z : |z| < R\}$ называется **кругом сходимости** степенного ряда. Внутри круга сходимости степенной ряд сходится абсолютно, а вне круга — расходится. В точках границы круга сходимости $|z| = R$ ряд может, как сходиться, так и расходиться.

Если $R = 0$, то это означает, что степенной ряд сходится только в одной точке $z = 0$.

Заметим, что формула Коши–Адамара не даёт ответа, сходится ли ряд на границе круга сходимости $|z| = R$. Поэтому при решении задач этот вопрос нужно исследовать дополнительно.

Пример 13. Найти радиусы сходимости рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n.$$

Решение. а) Имеем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{i^n}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1. \quad \triangle$$

Радиус сходимости $R = 1$.

$$\text{б) } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty. \text{ Радиус сходимости } R = 0. \quad \triangle$$

Пример 14. Исследовать сходимость степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}. \quad (6.2)$$

Решение. 1. Найдём радиус сходимости. Имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \right| = 1$, радиус сходимости $R = 1$. Отсюда по формуле Коши–Адамара ряд (5.2) сходится (абсолютно) при $|z| < 1$, а расходится при $|z| > 1$.

2. Исследуем сходимость на границе круга сходимости, т. е. при $|z| = 1$. Если $|z| = 1$, то $z = e^{i\varphi}$, и ряд (5.2) на границе круга сходимости имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n^2}. \quad (6.3)$$

Проверим абсолютную сходимость ряда (5.3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{in\varphi}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \triangle$$

Получаем, что ряд (5.3) сходится абсолютно при всех φ . Следовательно, ряд (5.2) сходится абсолютно на границе круга сходимости. В итоге ряд (5.2) сходится абсолютно при $|z| \leq 1$. $\triangle$

6.3.1 Аналитичность степенного ряда

Теорема 24 Пусть степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad (6.4)$$

имеет положительный радиус сходимости ($R > 0$). Тогда функция $f(z)$ является аналитической функцией в $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$.

Доказательство. 1. $f(z)$ — непрерывная функция.

2. Для любого замкнутого контура $\gamma \subset B(z_0, R)$, в силу равномерной сходимости имеем

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma} c_k (z - z_0)^k dz = 0.$$

По теореме Морера ?? функция f является аналитической в $B(z_0, R)$. $\square$

Упражнение 10 Пусть степенной ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ имеет положительный радиус сходимости ($R > 0$). Тогда

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}. \quad (6.5)$$

Радиус сходимости ряда (5.5) также равен R .

Упражнение 11 Если степенной ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ имеет положительный радиус сходимости, то $c_k = \frac{f'(z_0)}{k!}$.