

Лекция 8

Ряд Лорана (продолжение). Изолированные особые точки

8.1 Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в кольце $K = \{r < |z - z_0| < R\}$. Обозначим $M(\rho) = \max_{z \in C_\rho} |f(z)|$, где $r < \rho < R$.

Упражнение 9 Вывести следующую оценку для коэффициентов ряда Лорана

$$|c_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}.$$

8.2 Теорема Лиувилля

Упражнение 10 Доказать, что если аналитическая во всей комплексной плоскости функция $f(z)$ ограничена, то она является постоянной.

8.3 Изолированные особые точки

Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется **изолированной особой точкой** функции $f(z)$, если существует окрестность $B(z_0, \rho)$ точки z_0 , в которой функция $f(z)$ является аналитической всюду, за исключением самой точки z_0 (в точке z_0 функция может быть и вообще не определена).

Рассмотрим функции $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1}{z^4}$, $e^{\frac{1}{z}}$. Для каждой из этих функций точка $z_0 = 0$ является изолированной особой точкой. Однако, оказывается, что характер особенности (сингулярности) в каждом случае разный.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется
1) **устранимой особой точкой**, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ существует и конечен;

- 2) **полюсом**, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$;
 3) **существенно особой точкой**, если функция $f(z)$ не имеет предела в точке z_0 .

Пример 22. Для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой, поскольку

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

△

Пример 23. Для функции $f(z) = \frac{1}{z^4}$ точка $z_0 = 0$ является полюсом, поскольку

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{1}{z^4} \right| = \infty,$$

и, следовательно, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z^4} = \infty$.

△

Пример 24. Предела $\lim_{z \rightarrow z_0} e^{\frac{1}{z}}$ не существует. Поэтому точка $z_0 = 0$ является существенно особой для функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

△

Определять тип особой точки можно с помощью следующего утверждения

Теорема 26 Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$. Тогда

- 1) z_0 — устранимая $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$;
 2) z_0 — полюс $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

Упражнение 11 Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$. Доказать, что z_0 — полюс $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

Строение ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки z_0 существенным образом зависит от типа особой точки.

Теорема 27 Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

ряд Лорана в кольце $0 < |z - z_0| < R$. Тогда

- 1) z_0 — устранимая $\Leftrightarrow$ в ряде Лорана нет членов с отрицательными номерами,

то есть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

2) z_0 — полюс $\Leftrightarrow$ ряд Лорана содержит лишь конечное число членов с отрицательными номерами, то есть

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

3) z_0 — существенно особая $\Leftrightarrow$ ряд Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными номерами, то есть имеет вид

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Теорема 28 Пусть $z = \infty$ — изолированная особая точка голоморфной функции $f(z)$, а $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z)^k$ — ряд Лорана в кольце $|z| > R > 0$. Тогда

1) $z = \infty$ — устранимая $\Leftrightarrow$ в ряде Лорана нет положительных степеней z .

2) $z = \infty$ — полюс $\Leftrightarrow$ ряд Лорана содержит лишь конечное число положительных степеней z , т. е.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = c_m (z - z_0)^m + \cdots + c_1 (z - z_0) + \sum_{k=-\infty}^0 c_k (z - z_0)^k.$$

3) $z = \infty$ — существенно особая точка $\Leftrightarrow$ ряд Лорана содержит бесконечное число положительных степеней z .

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — полюс. Максимальный номер m такой, что $c_{-m} \neq 0$ называется *порядком полюса*. И говорят: z_0 — **полюс порядка m** .

Пример 25. Для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$ точка $z_0 = 0$ является полюсом порядка $m = 2$, поскольку ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots.$$

△

Также порядок полюса можно устанавливать в помощью следующего утверждения.

Теорема 29 Пусть $f(z)$ — голоморфная функция и точка $z_0 \in \mathbb{C}$ её нуль порядка m . Тогда функция $1/f(z)$ имеет в z_0 полюс порядка m .

Доказательство. Поскольку z_0 — нуль порядка m голоморфной функции $f(z)$, то эта функция имеет вид

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

где $g(z)$ — некоторая голоморфная функция, такая что $g(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки z_0 . Следовательно, $1/g(z)$ — голоморфна в окрестности z_0 и, в частности, может быть разложена в ряд Тейлора

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Заметим, что $a_0 \neq 0$.

Тогда

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{g(z)} = \frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots$$

это и означает, что z_0 — полюс порядка m функции $1/f(z)$. □