Лекция 9

Элементы теории вычетов

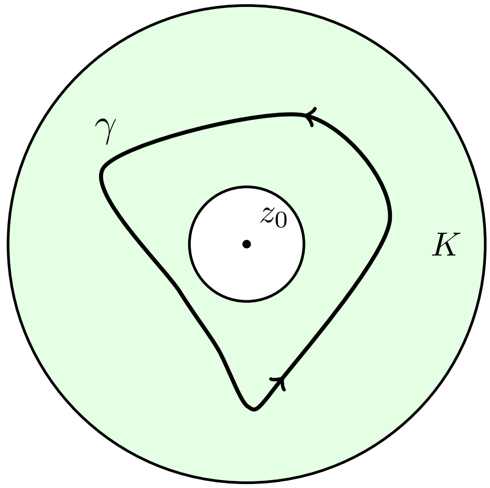
9.1 Определение вычета

В этом параграфе введём важное для приложений понятие *вычета* аналитической функции в изолированной особой точке. Немного о самом термине. Считается, что его развил Коши основываясь на работах Эйлера. Название вычет (residue), по видимому, происходит от того, что нас интересует остаток после интегрирование ряда Лорана (точный смысл этого выражение должен быть понятен после приведенных ниже рассуждений).

Пусть z_0 — изолированная особая точка однозначная функции f. Тогда f можно разложить в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

в некотором кольце $K = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$. Рассмотрим кривую $\gamma \subset K$ такую, что точка z_0 находится внутри области, ограниченной этой кривой.



Проинтегрируем функцию f по кривой γ:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k\,dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int\limits_{\gamma} (z-z_0)^k\,dz.$$

Вспомним (см. пример 12.), что

$$\int\limits_{\gamma} (z-z_0)^k\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & k=-1, \\ 0, & k \neq -1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i c_{-1}. \tag{9.1}$$

***Вычетом* функции** $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется величина

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Или, что тоже самое, в силу (9.1)

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Если посмотреть с другой стороны, то можно сказать, что интеграл равен вычету:

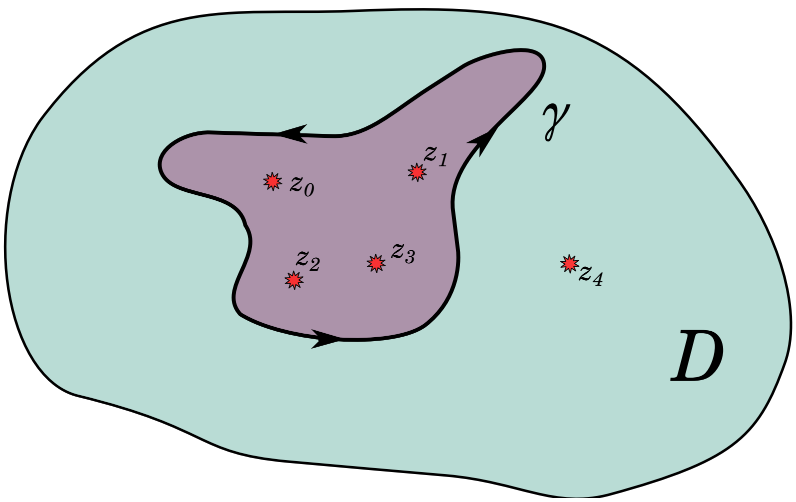
$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

На самом деле справедливо более общее свойство.

Теорема 30 (Основная теорема теории вычетов) *Пусть f — голоморфна в $D \subset \mathbb{C}$, за исключением изолированных особых точек $\{z_j\}$, γ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая, не содержащая особых точек $\{z_j\}$. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_j \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z),$$

где суммирование ведётся по всем точкам z_j, находящимся внутри.



Доказательство. Выберем достаточно малое $r > 0$так, чтобы замкнутые круги $\overline{B(z_k, r)}$ лежали в области D и не пересекались между собой. Обозначим черезC_k^+ окружность $|z - z_k| = r$. Функция $f(z)$ является аналитической в области

$$D^* = D \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B(z_k, r)}$$

и непрерывной в ее замыкании. Согласно интегральной теореме Коши интеграл функции $f(z)$ по ориентированной границе области D^* равен нулю, т.е.

$$\int\limits_{\partial D^*} f(z)dz \; = \int\limits_{\Gamma} f(z)dz \; + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k^-} f(z)dz \; = 0.$$

Следовательно

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz \ = \ \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k^+} f(z)dz \ = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Суть теоремы 30 состоит в том, чтобы вместо непосредственного интегрирования $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ вычислять вычеты $\operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$ в изолированных особых точках.

9.1.1 Вычет в бесконечно удалённой точке

Пусть бесконечно удалённая точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$, т. е. существует такое $R < \infty$, что функция $f(z)$ является голоморфной при $R < |z| < \infty$.

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удалённой точке $z = \infty$ называется величина

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^-} f(z)dz,$$

где интеграл берётся по ориентированной в отрицательном направлении (по часовой стрелке) кривой γ.

Если известно разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки (см. пункт 7.2.1), то

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \ -c_{-1}.$$

При этом следует отметить, что даже в случае, когда бесконечно удалённая точка является устранимой особой точкой, вычет в ней может быть отличен от нуля. В качестве простейшего примера можно рассмотреть функцию $f(z) = \frac{1}{z}$, для которой $z = \infty$ является устранимой особой точкой, но $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \ -1$.

Упражнение 12 *Доказать, что*

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{w=0} \frac{f(1/w)}{w^2}.$$

Теорема 31 *Пусть $f(z)$ — аналитична, за исключением конечного числа особых точек $\{z_0, z_1, \ldots, z_N\}$. Тогда сумма вычетов по всем особым точкам (включая*

$z = \infty$) равна нулю, т. е.

$$\sum_{j=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z) = 0.$$

Доказательство. Выберем достаточно большое значение $R < \infty$ так, чтобы все конечные особые точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ лежали в круге[a] $|z| < R$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R^+} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R^-} f(z)dz = 0.$$

[a]Почему это возможно?

9.2 Вычисление вычетов

Лемма 32 *Если $z_0 \in \mathbb{C}$ — устранимая особая точка функции f, то*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0.$$

Доказательство. Действительно, если z_0 — устранимая, то, в частности, $c_{-1} = 0$. □

Лемма 33 *Если $z_0 = \infty$ — устранимая особая точка функции f, то*

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z \cdot \left(\lim_{w\to\infty} f(w) - f(z)\right).$$

Доказательство. Действительно, если ∞ — устранимая особая точка, то ряд Лорана имеет вид

$$\dots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z^1} + c_0.$$

При этом $\lim\limits_{w\to\infty} f(w) = c_0$. Далее очевидно. □

Упражнение 13 *Доказать формулу*

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\lim_{z\to\infty} z^2 f'(z).$$

Далее мы рассмотрим приёмы, которые позволяют находить вычеты в полюсах.

Лемма 34 *Если $z_0 \in \mathbb{C}$ — простой полюс (т.е. полюс порядка 1) функции f, то*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} ((z - z_0) \cdot f(z)).$$

Доказательство. Если z_0 — простой полюс, то

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Тогда

$$(z - z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + c_2(z - z_0)^3 + \dots$$

и

$$(z - z_0)f(z) \to c_{-1} \qquad \text{при } z \to z_0.$$

Последние две леммы являются частными случаями следующего утверждения.

Теорема 35 *Если z_0 — полюс порядка m функции f, то*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m \cdot f(z)).$$

Сравните приведённое выше утверждение с теоремой 11.

Лемма 36 *Пусть f, g — голоморфные в точке z_0 функции и z_0 — ноль функции g порядка 1 (т. е. $g(z_0)=0$, но $g'(z_0)\neq 0$) и $f(z_0)\neq 0$. Тогда функция $f(z)/g(z)$ имеет полюс первого порядка в точке z_0 и*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Пример 26. *Найти вычеты функции $f(z)=\frac{1}{z^3-z^5}$ во всех изолированных особых точках.*

Решение. 1) Имеем

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1-z^2)} = \frac{-1}{z^3(z-1)(z+1)}.$$

Тогда 0 — полюс 3-го порядка, -1 и 1 — полюса первого порядка, а ∞ — устранимая особая точка.

2) Найдём вычет в точке 0. Для этого рассмотрим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана с центром в 0:

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{z^3}\cdot(1+z^2+z^4+\dots) = \frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+z+\dots.$$

Отсюда имеем $c_{-1}=1$, и, следовательно, $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=1$.

3) Вычеты в простых полюсах -1 и 1 найдём по лемме 34:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)\cdot f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{-1}{z^3(z-1)} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{-1}{z^3(z+1)} = -\frac{1}{2}.$$

4) По теореме 31

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0,$$

следовательно, $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0$. △

Пример 27. *Пусть* $f(z) = \frac{e^z}{\sin z \cos z}$. *Найти* $\operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z)$.

Решение. Имеем $f(z) = \frac{e^z}{\sin z \cos z} = \frac{2e^z}{\sin 2z}$.

Функции $2e^z$ и $\sin 2z$ голоморфны и точка π является нулём первого порядка для функции $\sin 2z$ ($\sin 2\pi = 0$, $\sin' 2\pi \neq 0$). Тогда по лемме 36

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi}\left(\frac{2e^z}{\sin 2z}\right) = \frac{2e^\pi}{2\cos 2\pi} = e^\pi.$$

△