

Лекция 10

Приложение теории вычетов к вычислению интегралов

10.1 Рационально-тригонометрические интегралы

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi,$$

где $R(\xi, \eta)$ – рациональная функция, не имеющая полюсов на окружности $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Сделаем замену переменной $z = e^{i\varphi}$, тогда

$$d\varphi = -i \frac{dz}{z}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= -i \int_{|z|=1} R \left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) \frac{dz}{z} = \\ &= \int_{|z|=1} R_1(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ |z_k|<1}} \operatorname{Res} R_1(z). \end{aligned}$$

Здесь $R_1(z)$ — это некоторая рациональная функция комплексного переменного, которая определяется через исходную рациональную функцию $R(\xi, \eta)$ очевидным образом.

10.1.1 Рациональные интегралы

Рассмотрим интеграл

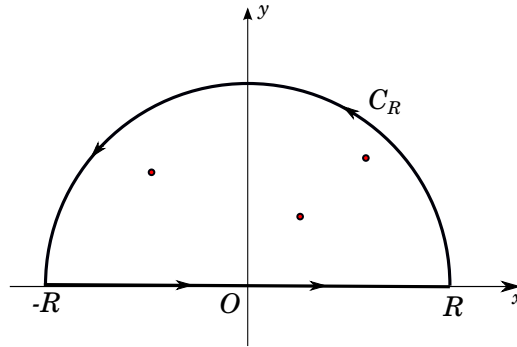
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \tag{10.1}$$

где $f(x)$ – рациональная функция.

Пусть $f(z)$ – соответствующая рациональная функция комплексного переменного. Если $f(z) = P_n(z)/Q_m(z)$, где $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ многочлены степени n и m соответственно, то для сходимости интеграла (10.1) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ не имела полюсов на действительной оси и для степеней многочленов выполнялось неравенство $m - n \geq 2$.

Поскольку рациональная функция на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ может иметь лишь конечное количество полюсов, то можно выбрать такое значение $0 < R < \infty$, что все конечные особые точки функции $f(z)$ будут лежать в круге $|z| < R$.

Рассмотрим ориентированный в положительном направлении замкнутый контур, состоящий из отрезка $[-R, R]$ действительной оси и верхней полуокружности $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.



По основной теореме теории вычетов

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{Res} f(z). \quad (10.2)$$

Поскольку при $R \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq CR^{-2} 2\pi R \rightarrow 0,$$

то переходя к пределу в равенстве (10.2), получаем

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{Res} f(z).$$

В случае, когда особых точек оказывается довольно много, чтобы не искать сумму большого количества вычетов можно выбрать такой контур интегрирования, который содержит внутри себя всего одну особую точку.

Пример 28. Вычислим интеграл

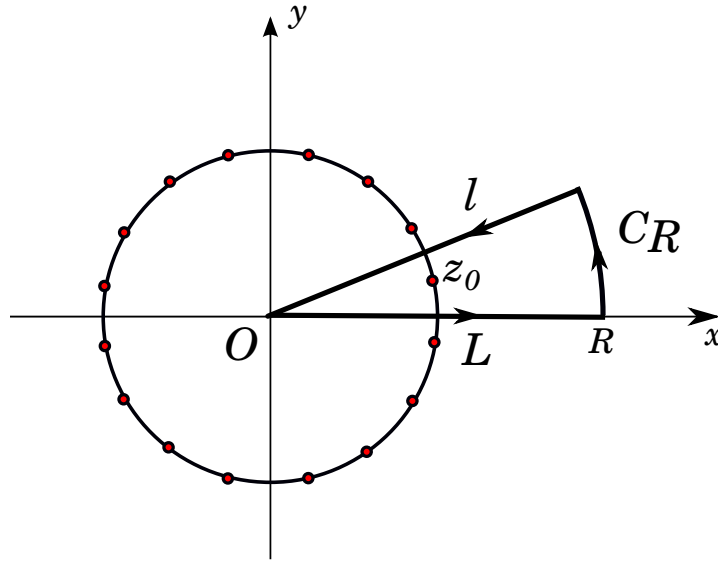
$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}, \quad n \geq 1.$$

Решение. Функция

$$f(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$$

имеет $2n$ особых точек.

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру Γ_R , состоящему из отрезка действительной оси $L = [0, R]$, дуги окружности $C_R = \{z = Re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}\}$ и отрезка $l = \{z = re^{i\pi/n}, 0 \leq r \leq R\}$.



Внутри контура Γ_R функция $f(z)$ имеет единственный простой полюс $z_0 = e^{i\pi/(2n)}$. Вычет в точке z_0 равен

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2nz_0^{2n-1}} = \frac{z_0}{2nz_0^{2n}} = -\frac{z_0}{2n}.$$

По основной теореме теории вычетов

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_L f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz + \int_l f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Поскольку $|f(z)| \sim \frac{1}{|z|^{2n}}$ при $z \rightarrow \infty$, то

$$\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0, \quad (R \rightarrow \infty).$$

Интеграл по отрезку l сводится к интегралу по отрезку $L = [0; R]$

$$\int_l f(z) dz = \int_R^0 f(re^{i\pi/n}) e^{i\pi/n} dr = -e^{i\pi/n} \int_0^R \frac{dr}{1+r^{2n}}.$$

Переходя к пределу, получаем

$$I_n - e^{i\pi/n} I_n = -\frac{\pi i}{n} e^{i\pi/(2n)},$$

откуда

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi}{2n}}. \quad \triangle$$

10.2 Преобразование Фурье рациональной функции

Интеграл вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx \quad (10.3)$$

представляет собой преобразование Фурье рациональной функции $R(x)$.

Для нахождения таких интегралов нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 37 (Лемма Жодана) Пусть $\alpha > 0$ и выполнены следующие условия

1) функция $f(z)$ непрерывна в секторе

$$S = \{\operatorname{Im} z \geq 0, |z| > R_0 > 0\};$$

2) $M_R = \max_{z \in C_R} |f(z)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$,

где C_R – верхняя полуокружность, то есть $C_R = \{\operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}$.

Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0.$$

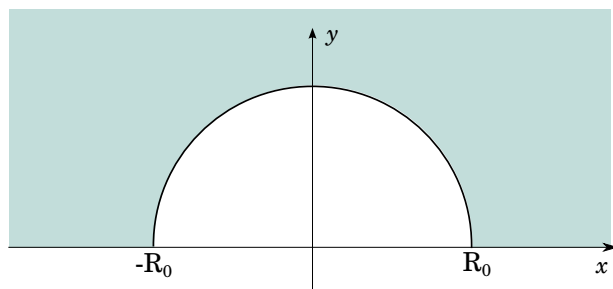


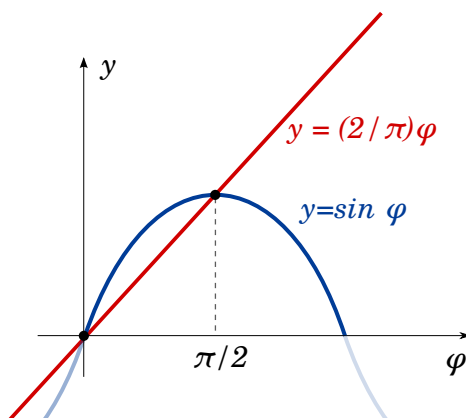
Рис. 10.1. Функция непрерывна в закрашенной области.

Доказательство. Пусть $z \in C_R$, тогда $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $dz = iRe^{i\varphi}d\varphi$,

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha(R \cos \varphi + iR \sin \varphi)}| = e^{-\alpha R \sin \varphi}.$$

В силу выпуклости функции $\sin \varphi$ на отрезке $[0, \pi/2]$ выполняется неравенство

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi.$$



Теперь несложно получить требуемую оценку для интеграла

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz \right| &\leq RM_R \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \varphi} d\varphi = \\
 &= 2RM_R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \varphi} d\varphi \leq 2RM_R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R\alpha}{\pi} \varphi} d\varphi \leq \\
 &\leq M_R \frac{\pi}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}) \leq \frac{\pi}{\alpha} M_R \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad \square
 \end{aligned}$$

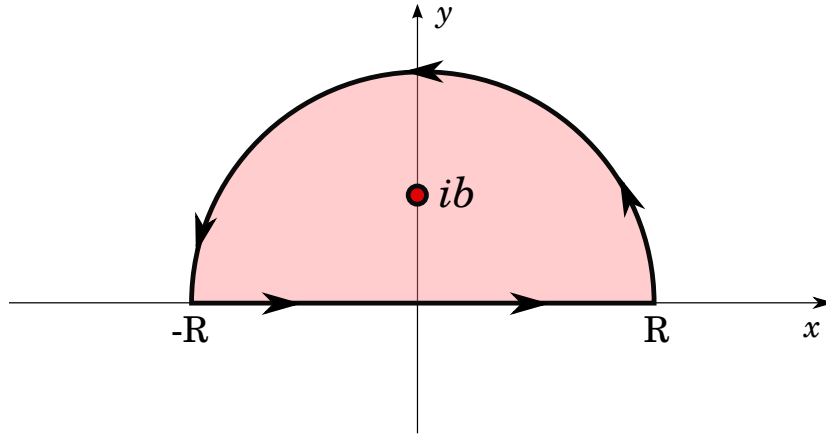
Пример 29. Найдём интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax} dx}{x^2 + b^2},$$

параметры $a, b > 0$.

Решение. 1) Рассмотрим замкнутый контур Γ_R , состоящий из отрезка $[-R, R]$ и верхней полуокружности

$$C_R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}.$$



2) Имеем

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz} dz}{z^2 + b^2} = \int_{C_R} \frac{e^{iaz} dz}{z^2 + b^2} + \int_{[-R, R]} \frac{e^{iaz} dz}{z^2 + b^2}.$$

Первый интеграл

$$\int_{C_R} \frac{e^{iaz} dz}{z^2 + b^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty,$$

по лемме Жордана 37.

Второй интеграл

$$\int_{[-R, R]} \frac{e^{iaz} dz}{z^2 + b^2} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax} dx}{x^2 + b^2} \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

3) Функция $\frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}$ имеет полюс первого порядка в точке ib . Тогда по основной теореме теории вычетов 30

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz} dz}{z^2 + b^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ib} \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} = \frac{2\pi i e^{ia(ib)}}{2(ib)}.$$

4) Таким образом, искомый интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax} dx}{x^2 + b^2} = \frac{\pi e^{-ab}}{b}. \quad \triangle$$

Упражнение 14 Доказать, что утверждение леммы Жордана останется верным если $S = \{\operatorname{Im} z \geq 0, |z| > R_0 > 0\}$ заменить на $S_a = \{\operatorname{Im} z \geq a, |z| > R_0 > 0\}$, $a < 0$, $C_R = \{\operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}$ на $C_{R,a} = \{\operatorname{Im} z \geq a, |z| = R\}$, где $a < 0$.

Упражнение 15 Доказать, что утверждение леммы Жордана останется верным если $S = \{\operatorname{Im} z \geq 0, |z| > R_0 > 0\}$ заменить на $S_b = \{\operatorname{Re} z \leq b, |z| > R_0 > 0\}$, $a < 0$, $C_R = \{\operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}$ на $C_{R,b} = \{\operatorname{Re} z \leq a, |z| = R\}$, где $b > 0$.

Упражнение 16 Будет ли утверждение леммы Жордана верным если вместо C_R рассматривать окружность целиком? Ответ обосновать.

10.2.1 Вывод общей формулы

Теперь мы можем получить формулу для вычисления интеграла Фурье (10.3) при $\alpha > 0$. Рассмотрим ориентированный в положительном направлении замкнутый контур Γ_R , состоящий из отрезка $[-R, R]$ действительной оси и верхней полуокружности $C_R = \{|z| = R, z \geq 0\}$. Выберем такое значение $0 < R < \infty$, чтобы все конечные особые точки функции $R(z)$ лежали в круге $|z| < R$.

По основной теореме теории вычетов

$$\int_{-R}^R e^{i\alpha x} R(x) dx + \int_{C_R} e^{iaz} R(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ z_k > 0}} \operatorname{Res} (e^{iaz} R(z)). \quad (10.4)$$

Для сходимости интеграла (10.3) необходимо и достаточно, чтобы функция $R(z)$ не имела полюсов на действительной оси и $R(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, т.е. $R(x) \sim Cx^{-k}$ при $x \rightarrow \infty$ и $k \geq 1$. Это означает, что $R(z) \sim Cz^{-k}$ при $z \rightarrow \infty$ и $k \geq 1$, т.е. $M(R) = \max_{z \in C_R} |R(z)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

Согласно лемме Жордана при $R \rightarrow \infty$

$$\int_{C_R} e^{i\alpha x} R(z) dz \rightarrow 0.$$

Переходя к пределу в равенстве (10.4), получаем

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ z_k > 0}} \text{Res} (e^{i\alpha z} R(z)).$$

Замечание. При $\alpha < 0$ заменяя контур Γ_R на симметричный ему относительно действительной оси контур Γ_R^- , получим формулу

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx = -2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ z_k < 0}} \text{Res} (e^{i\alpha z} R(z)).$$