Лекция 13

Преобразование Лапласса

13.1 Функции ограниченного роста (оригинал)

Функция $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ называется функцией ограниченного роста, если существует вещественное число a такое, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at}\, dt < \infty.$$

Точная нижняя граница всех таких a называется показателем роста функции f и обозначается через $a(f)$.

Пример 33. *Проверить являются ли функции*

$$H(x), \quad e^x, \quad \sin x$$

функциями ограниченного роста. Найти показатель роста.

13.2 Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа функции $f(t)$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Функция, называемая ***изображением***, $F(p)$ определена в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > a(f)$. В свою очередь, функция $f(t)$ называется ***оригинал***.

Пример 34. *Пусть $f(t) = H(t)$, тогда*

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} H(t)\, dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = \frac{1}{p}.$$

То есть $\mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{1}{p}$. $\triangle$

Пример 35. *Пусть* $f(t) = t^n$, $t > 0$. *Вычислить преобразование Лапласа* $\{f(t)\}$. *Hint: сначала показать, что* $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{p}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}$.

13.2.1 Аналитичность изображения

Теперь нашей задачей будет исследование регулярности изображения $F(p)$.

Теорема 40 *Если функция* $f(z,\zeta)$ *аналитична по* z *в односвязной области* D, *кусочно-непрерывна по совокупности переменных и интеграл*

$$F(z) = \int\limits_C f(z,\zeta)\,d\zeta$$

сходится равномерно в области D, *то функция* $F(z)$ *является аналитической в области* D.

Доказательство. Пусть Γ — произвольный замкнутый кусочно-гладкий контур в D. Тогда по теореме Коши $\int\limits_\Gamma f(z,\zeta)\,dz = 0$. В силу равномерной сходимости можно переставить интегралы

$$\int\limits_\Gamma F(z)\,dz = \int\limits_\Gamma \int\limits_C f(z,\zeta)\,d\zeta\,dz = \int\limits_\Gamma \int\limits_C f(z,\zeta)\,dz\,d\zeta = 0.$$

По этому по теореме Мореры $F(z)$ — аналитическая функция в D. $\square$

Теорема 41 *Изображение*

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \tag{13.1}$$

является аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > a(f)$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re} p > a(f)$. Тогда

$$|e^{-pt} f(t)| \le M e^{\frac{-\delta t}{2}},$$

где $\delta = a(f) - \operatorname{Re} p$. Поэтому интеграл (13.1) сходится равномерно в круге

$B(p,\delta/2)$. По теореме 40 $F(p)$ аналитична круге $B(p,\delta/2)$. В силу произвольности выбора точки p получаем требуемое. $\square$

Упражнение 19 *Исследовать область сходимости интеграла*

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{zt}\,dt.$$

13.3 Обратное преобразование Лапласа

Обратное преобразование Лапласа задаётся формулой

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}F(s)\,ds.$$

13.4 Теоремы разложения

Теорема 42 (Первая теорема разложения) *Пусть $F(p)$ является аналитической в окрестности бесконечно удаленной точки и её разложение в ряд Лорана имеет вид*

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}.$$

Тогда $F(p)$ служит изображением оригинала

$$f(t) = H(t)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!}t^n.$$

Теорема 43 (Вторая теорема разложения) *Пусть $F(p)$ аналитична во всей плоскости $\mathbb{C}$, за исключением полюсов. Причём в каждой ограниченной области содержится только конечное количество полюсов. Тогда если выполнены условия*

1) существует полуплоскость $\operatorname{Re} p > \alpha$ не содержащая полюсов $F(p)$,

2) найдётся последовательность окружностей $C_n = \{|z| = R_n\}$ так, что

$$R_n \to \infty \text{ и } \max_{C_n} |F(p)| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

3) при любом $a > \alpha$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(a+is)|\,ds < \infty,$$

то $F(p)$ является изображением оригинала

$$f(t) = H(t) \sum_{p_k} \operatorname*{Res}_{p=p_k} F(p) e^{pt}.$$

Упражнение 20 *Определим*

$$f(t) = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{-pt}\, dp.$$

Проверить, что $f(t) = 0$ при всех $t < 0$.