

КОНТРОЛЬНАЯ № 2 (МАРТ 2019)

Комплексный анализ

Теория интеграла Коши

Задача 1. (2 points)

Вычислить интеграл

$$\int_{[-i\pi, i\pi]} e^z dz =$$

Ответ:

0.

1. Решение.

$$\int_{\gamma} e^z dz = \int_{-1}^1 e^{\pi ti} \pi i dt = \pi i \int_{-1}^1 e^{\pi ti} dt = \pi i \Big|_{-1}^1 \frac{e^{\pi ti}}{\pi i} = e^{\pi i} - e^{-\pi i} = 2i \sin \pi = 0.$$

Задача 2. (2 points)

Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=2} xy dz =$$

Ответ:

0.

Задача 3. (2 points)

Вычислить длину кривой $\gamma(t) = i \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$

$$l(\gamma) =$$

Ответ:

$$l(\gamma) = 1.$$

Задача 4. (2 points)

Вычислить интеграл

$$\int_{|z-1|=2} (z-3)^4 dz =$$

Ответ:

0.

Задача 5. (4 points)

Мы знаем, что $\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$. Найти

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx =$$

Ответ:

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Задача 6. (2 points)

Вычислить интеграл $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z+2} dz =$

Ответ:

0

Задача 7. (3 points)

Вычислить интеграл $\int_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2+2z} =$

Ответ:

πi .

Задача 8. (4 points)

Вычислить интеграл $\int_{|z|=2} \frac{e^{2iz}}{z^4} dz =$

Ответ:

$\frac{8\pi}{3}$.

Решение. Дифференцирование интеграла типа Коши.

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{2iz}}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \frac{d^3}{dz^3} (e^{2iz})_{z=0} = \frac{\pi i}{3} (-8i) = \frac{8\pi}{3}.$$

Задача 9. (5 points)

Вычислить интеграл $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^{10}(z-3)} =$

Ответ:

$$-2\pi i(2)^{-10}.$$

Задача 10. (4 points)

Пусть $f(z) = \frac{z}{z+9}$. Разложите функцию f в степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Ответ:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{9^k}.$$