

# КОНТРОЛЬНАЯ № 3 (МАРТ 2019)

## Комплексный анализ

*Ряд Лорана, Особые точки, Вычеты, Интегралы*

**Задача 1.** (3 points)

Разложить функцию  $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$  в ряд Лорана в с центром  $z_0 = 0$ .

**Ответ:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

**Задача 2.** (4 points)

Разложить функцию  $f(z) = \frac{1}{z-i}$  в ряд Лорана в кольце  $|z| > 1$  ( $z_0 = \infty$ ).

**Ответ:**

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{1}{z^n}$$

**Задача 3.** (2 points)

Найти особые точки функции  $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$ .

**Ответ:**

0 - полюс 2.  $\infty$  - существенно особая

**Задача 4.** (2 points)

Найти вычет

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^2 - z^3} =$$

**Ответ:**

2.

**Задача 5.** (3 points)

Найти вычет

$$\operatorname{Res}_{z=0} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) =$$

**Ответ:**

$-1/6$

**Задача 6.** (4 points)

Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz =$$

**Ответ:**

0.

**Задача 7.** (5 points)

Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx =$$

**Ответ:**

$\pi/4$ .

**Задача 8.** (6 points)

Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \varphi} \cos(3\varphi - \sin \varphi) d\varphi =$$

**Ответ:**

$\frac{2\pi}{3!}$ .

**Задача 9.** (5 points)

Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(1+x^2)^2} =$$

**Ответ:**

$$\pi\sqrt{2}/8.$$