14 Γ-функция

При $x > 0$ определена функция

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^t t^{x-1}\, dt.$$

Лемма 14.1. Γ-*функцию можно продолжить до аналитической функции на полуполскости* $\operatorname{Re} z > 0$*:* $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^t t^{z-1}\, dt$.

Доказательство. □

Лемма 14.2. *Если* $\operatorname{Re} z > 0$*, то*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{14.1}$$

Доказательство. □

Теорема 14.3. *Функцию* $\Gamma(z)$ *можно продолжить до аналитической функции на области* $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Доказательство. □

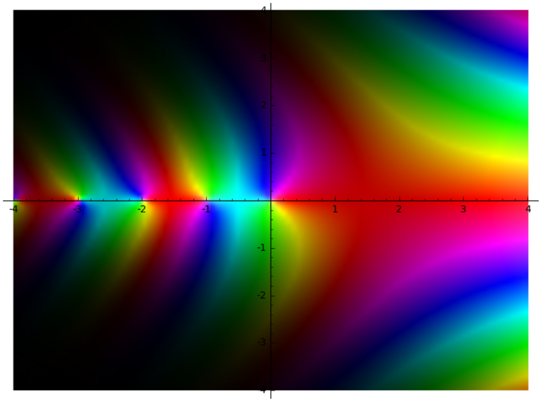

Рис. 13: Функция $\Gamma(z)$.

Задача 33. *Вычислить* $\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z)$, *при* $n = 0, 1, 2, \dots$.

Лемма 14.4. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Доказательство. □

Лемма 14.5. *Для* $z \in \mathbb{C}$ *выполнено равенство*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{14.2}$$

Задача 34. *Вычислить* $|\Gamma(1/2 + iy)|$, $y \in \mathbb{R}$.

Теорема 14.6. *Функця* $\frac{1}{\Gamma(z)}$ *аналитична в* $\mathbb{C}$ *и имеет нули только в* $0, -1, -2, \dots$.

Доказательство. □

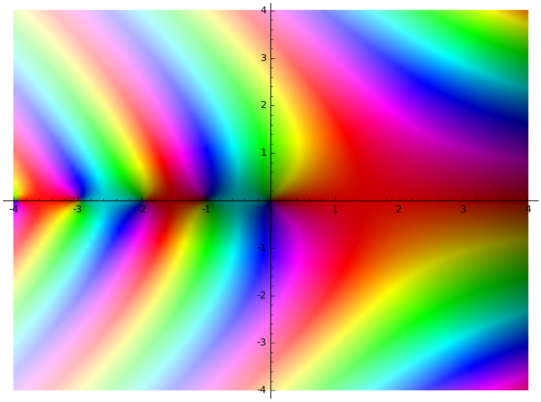

Рис. 14: Функция $1/\Gamma(z)$.

14.1 Асимптотика $\Gamma(z)$ при $|z| \to \infty$

Теорема 14.7. *Если* $|z| \to \infty$ *и* $|\arg z - \pi| > \delta > 0$*, то*

$$\Gamma(z) = e^{z \ln z} e^{-z} \frac{\sqrt{2\pi}}{z^{1/2}} (1 + O(|z|^{-1/2})).$$