Лекция 7

Ряды Тейлора и Лорана

7.1 Ряд Тейлора

В этой части мы увидим, что понятия степенного ряда и аналитической функции определяют один и тот же объект: любой степенной ряд с положительным радиусом сходимости является аналитической функцией и, наоборот, любая аналитическая функция может быть представлена степенным рядом.

Теорема 20 *Пусть степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{7.1}$$

имеет положительный радиус сходимости ($R > 0$). Тогда функция $f(z)$ является аналитической функцией в $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$.

Доказательство. 1. $f(z)$ — непрерывная функция.

2. Для любого замкнутого контура $\gamma \subset B(z_0, R)$, в силу равномерной сходимости имеем

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\gamma} c_k (z - z_0)^k\,dz = 0.$$

По теореме Морера 18 функция f является аналитической в $B(z_0, R)$. $\square$

Упражнение 7 *Пусть степенной ряд $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ имеет положительный радиус сходимости ($R > 0$). Тогда*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}. \tag{7.2}$$

Радиус сходимости ряда (7.2) *также равен* R.

Упражнение 8 *Если степенной ряд* $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ *имеет положительный радиус сходимости, то* $c_k = \frac{f'(z_0)}{k!}$.

Теперь уже можно доказать, что аналитическая функция может быть представлена в виде степенного ряда.

Теорема 21 (Теорема Тейлора) *Пусть функция* f *— аналитична в круге* $B(z_0,R)$. *Тогда* f *может быть представлена в* $B(z_0,R)$ *степенным рядом с центром в* z_0 *(с радиусом сходимости* $\geq R$*):*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, \qquad c_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{k+1}}.$$

$\gamma\subset B(z_0,R)$ *— простой кусочно-гладкий контур, содержащий* z_0 *внутри.*

Доказательство. Пусть $z\in B(z_0,R)$, обозначим $r=\frac{|z-z_0|+R}{2}$. По интегральной формуле Коши 10

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-z_0|=r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Разложим $\frac{1}{w-z}$ в сумму геометрической прогрессии следующим образом:

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}=\frac{1}{w-z_0}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k. \quad (7.3)$$

Ряд (7.3) сходится равномерно[a] на окружности $|w-z_0|=r$, поэтому сумму и интеграл можно поменять местами.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-z_0|=r}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-z_0|=r} f(w)\frac{1}{w-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-z_0|=r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\right)(z-z_0)^k.$$

Получаем требуемое $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$, $c_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{k+1}}$. Заметим, что здесь мы использовали равенство

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{k+1}} = \int\limits_{|t-z_0|=r} \frac{f(w)}{(t-z_0)^{k+1}}\,dw,$$

которое верно в силу интегральной теоремы Коши. □

[a]почему равномерно?

Как уже известно разложение экспоненты e^z в степенной ряд (а, значит, и в ряд Тейлора) имеет вид

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{7.4}$$

Ряд (7.4) сходится на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то есть радиус сходимости $R = \infty$. С помощью (7.4) получить можно получить разложения в степенные ряды тригонометрических функций:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Напомним, что радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ вычисляется по формуле

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}}.$$

Ряд сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$. На границе круга сходимости $|z| = R$ требуется дополнительное исследование.

Пример 13. *Разложить функцию $f(z) = \operatorname{sh} z$ в ряд Тейлора с центром $z_0 = 0$ и найти радиус сходимости R.*

Решение. Имеем $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Поэтому записывая разложение (7.4) для каждой экспоненты в отдельности и складывая два ряда получаем

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Отсюда, находим радиус сходимости по формуле

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{(2k+1)!}}} = \infty.$$ △

Пример 14. *Разложить функцию* $f(z) = \cos^2 z$ *в ряд Тейлора в окрестности точки* $z_0 = 0$.

Решение. Вспомним, что $\cos^2 z = (1 + \cos 2z)/2$.

Используя разложение $\cos w = 1 - \frac{w^2}{2!} + \cdots$, получаем

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1 + 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \cdots) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}.$$

△

Пример 15. *Разложить функцию* $\dfrac{z}{z+2}$ *по степеням* $(z-1)$ *и найти радиус сходимости* R *полученного ряда.*

Решение. Перепишем функцию в виде

$$\frac{z}{z+2} = \frac{z-1+1}{z+2} = ((z-1)+1)\frac{1}{3+(z-1)} = ((z-1)+1)\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{(z-1)}{3}}.$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$\frac{1}{1+\frac{(z-1)}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{(z-1)}{3}\right)^k.$$

Далее имеем

$$\frac{z}{z+2} = ((z-1)+1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} + \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^{k+1}\frac{(z-1)^k}{3^{k+1}}.$$

Найдём радиус сходимости

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{2}{3^{k+1}}}} = 3.$$

△

7.1.1 Теорема единственности

Теорема 22 *Пусть* $D \subset \mathbb{C}$ *— область, множество* $E \subset D$ *и имеет предельную точку* $z_0 \in D$, *функции* $f(z)$ *и* $g(z)$ *являются аналитическими в области* D *и* $f(z) = g(z)$ *для всех* $z \in E$. *Тогда* $f(z) = g(z)$ *всюду в области* D.

Доказательство. Множество E содержит последовательность точек $\{z_n\}$, сходящуюся к точке $z_0 \in D$. При этом

$$f(z_n) = g(z_n), \quad n \in N.$$

По теореме Тейлора 21 в круге $B(z_0, r)$ при $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ функции $f(z)$ и $g(z)$ представимы степенными рядами

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k.$$

Начиная с некоторого номера, все точки z_n лежат в круге $B(z_0, r)$, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^k = f(z_n) = g(z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z_n - z_0)^k.$$

Переходя в этом равенстве к пределу $x_n \to z_0$, получаем $a_0 = b_0$. Разделив обе части этой формулы на $(z_n - z_0)$, получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z_n - z_0)^{k-1},$$

переходя к пределу, в котором получаем $a_1 = b_1$.

Продолжая этот процесс, получаем $a_k = b_k$ для всех номеров $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $f(z) = g(z)$ всюду в круге $B(z_0, r)$.

Пусть z^*– произвольная точка области D. Соединим точку z_0 с точкой z^* непрерывной кривой γ, лежащей в области D. Фиксируем положительное ρ меньшее, чем расстояние от кривой γ до границы в области D.

Передвигая центр круга $B(z, \rho)$ вдоль кривой γ последовательно в точки $w_1, w_2, \ldots, w_n = z^*$, $|w_k - w_{k-1}| = \rho$ и повторяя приведенное ранее рассуждение, получим $f(z^*) = g(z^*)$. Поскольку z^*– произвольная точка области D, то $f(z) = g(z)$ всюду в области D. □

Пример 16. *Существует ли голоморфная функция такая, что*

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots?$$

Решение. Предположим, что такая функция существует. Обозначим $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$. Точка $z_0 = 0$ является предельной для множества E. Функция $f(z)$ совпадает с функцией $g(z) = z$ на множестве E. По теореме единственности $f(z) = z$ всюду на $\mathbb{C}$. Но тогда $f\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}$, что противоречит условию. Следовательно, такой функции не существует. △

7.1.2 Классификация нулей аналитической функции

Рассмотрим полином степени n

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad a_n \neq 0.$$

Нулём порядка m ***полинома*** $p(z)$ называется такая точка $z_0 \in \mathbb{C}$, что

$$p(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z),$$

где $g(z)$ — тоже полином и $g(z_0) \neq 0$.

Например, точка $z_0 = 1$ является нулём порядка $m = 2$ для полинома $p(z) = 3z^3 - 6z^2 + 3z$, так как $p(z) = (z-1)^2 \cdot 3z$ (здесь $g(z) = 3z$).

Определим аналогичное понятие для аналитической функции.

Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется ***нулём функции*** $f(z)$, если $f(z_0) = 0$.

Теорема 23 (Классификация нулей) *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция и точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является её нулём ($f(z_0) = 0$). Тогда возможны два случая:*
1) $f(z) = 0$ для всех $z \in B(z_0, \rho)$ для некоторого $\rho > 0$
либо
2) существует $m \in \mathbb{N}$ и аналитическая функция $g(z)$ такая, что $f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$ и $g(z_0) \neq 0$.

Число m из теоремы называется ***порядком нуля***.

Пример 17. *Для функции $f(z) = z^2 \sin z$ точка $z = 0$ является нулём. Найдём порядок этого нуля.*

Решение. Имеем

$$z^2 \sin z = z^2\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = z^3\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots\right).$$

Функция $h(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$ аналитична (в силу теоремы 20) и $h(0) \neq 0$. Таким образом, исходная функция имеет вид

$$f(z) = z^3 h(z),$$

значит, по теореме 23, порядок нуля равен 3. △

Удобный способ определения кратности нуля аналитической функции приводится в следующем утверждении

Теорема 24 *Точка z_0 — нуль порядка m аналитической в точке z_0 функции $f(z)$, если*
$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \ f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Так, например, функция $f(z) = \cos z - 1$ имеет нули порядка 2 в точках $z = \pi k$. Действительно, $f(\pi k) = \cos \pi k - 1 = 0$, $f'(\pi k) = -\sin \pi k = 0$, а $f''(\pi k) = -\cos \pi k \neq 0$.

7.2 Ряд Лорана

Теорема 21 предоставляет мощный инструмент описания аналитических функций. Однако, не все функции являются аналитическими. Далее мы увидим, что некоторые не аналитические функции можно представлять в виде суммы рядов с целыми степенями. Например, для функции $e^{\frac{1}{z}}$ вполне естественной была бы запись в виде ряда с отрицательными степенями
$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}.$$

Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}.$$

Обозначим
$$S_1(z) + S_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}.$$

Пусть радиус сходимости ряда
$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$
равен R. Тогда функция $S_1(z)$ будет аналитической в круге $B(z_0, R)$.

Делая во втором ряде замену переменной $w = \dfrac{1}{z-z_0}$, получим обычный степенной ряд по переменной w
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n.$$
Пусть радиус сходимости этого ряда равен ρ, тогда его сумма (как функция переменной w) будет аналитической функцией в круге $|w| < \rho$, и, следовательно, функция $S_2(z)$ будет голоморфной при $|z - z_0| > r$ (здесь $r = 1/\rho$).

Если $r < R$, то функция

$$f(z) = S_1(z) + S_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

будет аналитической в кольце $r < |z - z_0| < R$.

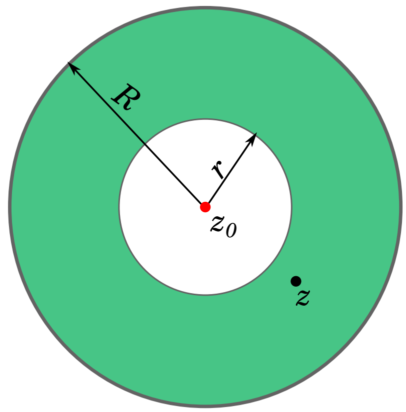

Рис. 7.1. Кольцо K.

Теорема 25 (Теорема Лорана) *Аналитическая в кольце $K = \{r < |z - z_0| < R\}$ функция $f(z)$ в каждой точке $z \in K$ представима в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)\, dw}{(w - z_0)^{k+1}},$$

$\gamma \subset K$ — простой кусочно-гладкий контур, обходящий точку z_0.

Полученный в теореме 25 ряд называют ***рядом Лорана***.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad \textit{правильная часть ряда Лорана}$$

и

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad \textit{главная часть ряда Лорана.}$$

Доказательство. Положим $g(z) = f(z + z_0)$, тогда функция g голоморфна в кольце $\tilde{K} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$. Фиксируем точку $z \in \tilde{K}$, тогда найдутся радиусы r_1, r_2 такие, что $r < r_1 < |z| < r_2 < R$. Рассмотрим замкнутый контур Γ из двух окружностей $|z| = r_1$, $|z| = r_2$ и соединяющего их отрезка (см. рис. 7.2). Обозначим эти окружности γ_1, γ_2.

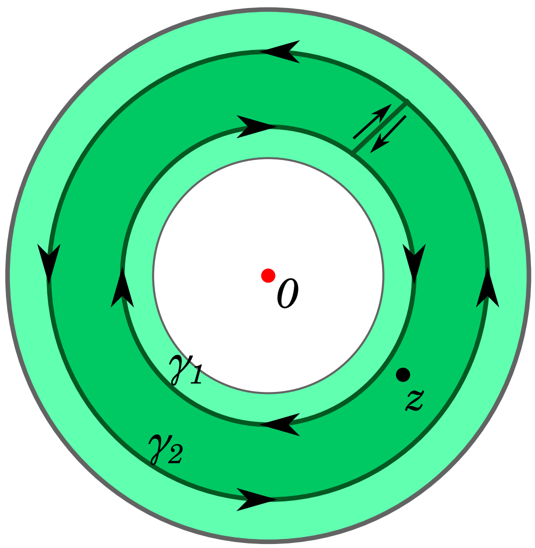

Рис. 7.2. Кольцо $\tilde{K}$.

По интегральной форме Коши

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(w)}{w - z}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{\gamma_2} \frac{g(w)}{w - z}\, dw - \int\limits_{\gamma_1} \frac{g(w)}{w - z}\, dw \right). \quad (7.5)$$

1. Сначала преобразуем интеграл по γ_2. Разложим $\frac{1}{w-z}$ в сумму геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \frac{1}{w} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k. \quad (7.6)$$

Ряд (7.6) сходится равномерно на окружности γ_2 (поскольку $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$), поэтому сумму и интеграл можно поменять местами.

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{g(w)}{w-z}\,dw = \int\limits_{\gamma_2} g(w)\frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^k dw = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int\limits_{\gamma_2}\frac{g(w)}{w^{k+1}}\,dw\right) z^k.$$

2. Перейдём к интегралу по γ_1. В этом случае используем следующее разложение

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{w}{z}} = -\frac{1}{z}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^k.$$

Тогда

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{g(w)}{w-z}\,dw = -\int\limits_{\gamma_1} g(w)\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^k dw =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int\limits_{\gamma_1} g(w)w^k\,dw\right) z^{-(k+1)} = -\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\int\limits_{\gamma_1}\frac{g(w)}{w^{k+1}}\,dw\right) z^k.$$

Подставляя полученные интеграл в (7.5) имеем

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int\limits_{\gamma_2}\frac{g(w)}{w^{k+1}}\,dw\right) z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\int\limits_{\gamma_1}\frac{g(w)}{w^{k+1}}\,dw\right) z^k\right).$$

По интегральной теореме Коши интегралы по γ_1 и γ_2 можно свести к интегралу по кривой γ. Поэтому

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{g(w)}{w^{k+1}}\,dw\right) z^k.$$

Возвращаясь к функции $f(z) = g(z-z_0)$ и делая замену в интеграле, получаем требуемое. □

Пример 18. *Разложить функцию* $\frac{1}{z^2+1}$ *в ряд Лорана в кольце* $0 < |z-i| < 1$.

Решение. Используя формулу суммы геометрической прогрессии выводим

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{2i+z-i} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{2i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} =$$

$$= \frac{1}{z-i}\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-i)^k}{(2i)^k} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-i)^k}{(2i)^k}. \qquad \triangle$$

Пример 19. *Разложить функцию* $\frac{z^4}{(z-2)^2}$ *в ряд Лорана по степеням* $z-2$.

Решение. Положим $z-2=t$. Тогда

$$f(z) = \frac{z^4}{(z-2)^2} = \frac{(t+2)^4}{t^2} = \frac{t^4+8t^3+24t^2+32t+16}{t^2} =$$

$$= \frac{16}{t^2} + \frac{32}{t} + 24 + 8t + t^2,$$

то есть

$$f(z) = \frac{16}{(z-2)^2} + \frac{32}{z-2} + 24 + 8(z-2) + (z-2)^2. \tag{7.7}$$

△

Пример 20. *Разложить функцию*

$$f(z) = \frac{1+2z}{z^3+z^2}$$

в ряд Лорана с центром в $z_0 = 0$.

Решение. Представим функцию в следующем виде, используя метод неопределённых коэффициентов:

$$\frac{1+2z}{z^3+z^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+1}.$$

И найдём числа A, B и C.

$$\frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+1} = \frac{Az(z+1)}{z^2(z+1)} + \frac{B(z+1)}{z^2(z+1)} + \frac{Cz^2}{z^2(z+1)}.$$

Тогда

$$1 + 2z = B + (A+B)z + (A+C)z^2,$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} 1 = B, \\ 2 = A + B, \\ 0 = A + C. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A=1$, $B=1$, $C=-1$. Таким образом,

$$\frac{1+2z}{z^3+z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z+1}.$$

Первые два слагаемых $\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$ — это уже часть ряда Лорана. Для третьего получаем

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \cdots$$

Таким образом, разложение в ряд Лорана для функции $\frac{1+2z}{z^3+z^2}$ имеет вид

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \cdots$$

△

7.2.1 Ряд Лорана в бесконечно удалённой точке

Пусть функция $f(z)$ является голоморфной в окрестности бесконечно удалённой точки, то есть существует такое $R < \infty$, что функция $f(z)$ является голоморфной при $R < |z| < \infty$.

Тогда функция $f(1/t)$ является голоморфной в кольце $0 < |t| < 1/R$ и допускает разложение в ряд Лорана в окрестности точки $t = 0$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} t^{-n}.$$

Делая замену переменной $t = \frac{1}{z}$ и полагая $c_n = b_{-n}$, получаем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

При этом в окрестности бесконечно удалённой точки ***правильной частью*** ряда Лорана называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^{-n},$$

а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

называется ***главной частью*** ряда Лорана.

Пример 21. *Разложим функцию $\frac{1}{z-2}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки.*

Решение. Воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии следующим образом

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k.$$

Полученный ряд сходится при $|z| > 2$ (то есть сходится в окрестности точки $z = \infty$). Таким образом, искомый ряд Лорана имеет вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{z^k}$. △