

КОНТРОЛЬНАЯ № 3 (МАРТ 2017)

Комплексный анализ

Ряды Тейлора и Лорана, Вычеты, Интегралы

Задача 1. (4 points)

Разложить функцию $f(z) = z^3 \sin 3z$ в ряд Тейлора в с центром $z_0 = 0$.

Ответ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+4}.$$

Решение.

$$z^3 \sin 3z = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} 3^{2n+1} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+4}$$

Задача 2. (3 points)

Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ в ряд Лорана в с центром $z_0 = 0$.

Ответ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Задача 3. (4 points)

Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z-i}$ в ряд Лорана в кольце $|z| > 1$.

Ответ:

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{1}{z^n}$$

Задача 4. (2 points)

Найти вычет

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^2 - z^3} =$$

Ответ:

0.

Задача 5. (3 points)

Найти вычет

$$\operatorname{Res}_{z=0} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) =$$

Ответ:

$$-1/6$$

Задача 6. (4 points)

Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz =$$

Ответ:

$$0.$$

Задача 7. (5 points)

Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx =$$

Ответ:

$$\pi/4.$$

Задача 8. (6 points)

Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \varphi} \cos(n\varphi - \sin \varphi) d\varphi =$$

$$n \in \mathbb{N}.$$

Ответ:

$$\frac{2\pi}{n!}.$$

Задача 9. (6 points)

Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx =$$

Ответ:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$