

ЭКЗАМЕН (МАРТ 2017)

Комплексный анализ

Имя _____

Дата _____

Задача 1. (2 points)

Вычислить значение функции

$$\sin(\pi/2 + i \ln 2) =$$

Ответ:

$$\frac{5}{4}$$

Задача 2. (2 points)

Пусть $t \in \mathbb{R}$, вычислить значение интеграл

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{tz} dz}{z^2 + 1} =$$

Ответ:

$$2\pi i \sin t$$

Задача 3. (2 points)

Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{z} =$$

Ответ:

$$2\pi i$$

Задача 4. (3 points)

Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^k$, найти значение в точке $z = \frac{1}{2}$

$$f(1/2) =$$

Ответ:

2

Задача 5. (4 points)

Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2} =$$

Ответ:

$\pi/\sqrt{2}$

Задача 6. (2 points)

Вычислить преобразование Лапласа функции $f(t) = e^{-t} \cos 2t$.

$$\mathcal{L}(e^{-t} \cos 2t) =$$

Ответ:

$$\frac{p+1}{(p+1)^2+4}$$

Задача 7. (3 points)

Используя преобразование Лапласа решить уравнение $y(t) = \int_0^t y(s) ds + 2$

$$y(t) =$$

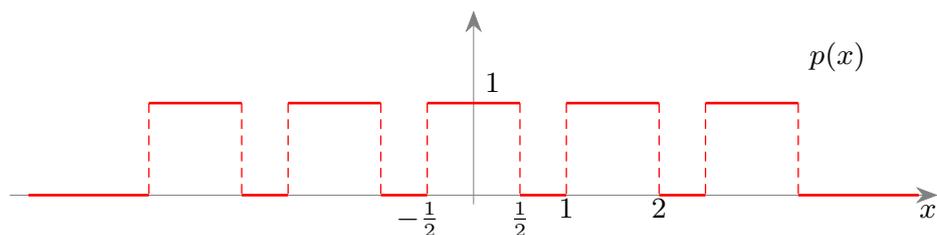
Ответ:

$2e^t$.

Задача 8. (5 points)

Задача 9. (5 points)

Найти преобразование Фурье функции, состоящей из 5 одинаковых импульсов.



$$\mathcal{F}(p(x)) =$$

Ответ:

$$\sum_{k=-3}^3 P_{l/2}(x + kL) \text{ Поэтому } \mathcal{F}(p(x)) = \sum_{k=-3}^3 \frac{\sin \pi l \xi}{\pi \xi} e^{2\pi i k L \xi}$$

Задача 10. (10 points)

Используя разложение в ряд Фурье решить задачу

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & x \in (0, \pi), t > 0; \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0; \\ u(0, x) = \frac{\pi}{2} - |x - \frac{\pi}{2}|, & x \in (0, \pi); \\ u_t(0, x) = 0, & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

$$u(t, x) =$$

Ответ:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)t) \sin((2k-1)x).$$

Задача 11. (10 points)

Используя преобразование Фурье решить задачу

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0; \\ u(0, x) = e^{-x^2}; \\ u_t(0, x) = 0. \end{cases}$$

$$u(t, x) =$$

Ответ:

$$u(t, x) = 0.5(\exp(-(x+t)^2) + \exp(-(x-t)^2)).$$