Лекция 3

3.1 Замечание об аналитических функциях

3.2 Степенная функция

Степенная функция

$$w = z^n, \tag{3.1}$$

где $n > 1$ – натуральное число, является аналитической во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Ее производная $w' = nz^{n-1}$ Используя показательную форму записи комплексных чисел $z = re^{i\varphi}$. получаем

$$w = r^n e^{in\varphi}.$$

Найдем области однозначности степенной функции (3.1). Пусть $z_1^n = z_2^n$, тогда $|z_1|^n = |z_2|^n$ и, следовательно, $|z_1| = |z_2|$. Из условия arg (z_1^n) = arg (z_2^n) следует, что $|\arg(z_1) - \arg(z_2)| = \frac{2\pi k}{n}$ при некотором $0 \leq k \leq n-1$. Таким образом область, в которой степенная функция (3.1) является взаимно однозначной, не должна содержать точек, у которых модули равны, а разность аргументов кратна $\frac{2\pi}{n}$.

Примерами таких областей являются секторы

$$D_k = \{z \in C \mid 0 < |z|,\ \frac{2\pi k}{n} < \arg z < \frac{2\pi(k+1)}{n}\},\quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Несложно заметить, что функция $w = z^n$ отображает каждый из секторов D_k на одну и ту же область E_0 – на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль неотрицательной части действительной оси.

Таким образом всякой точке $w \in E_0$ соответствуют ровно n прообразов – по одному в каждой области D_k. Следовательно, если мы стандартным образом определим значение $t = \sqrt[n]{w}$ условием: $t^n = w$, то мы получим n решений

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i\frac{\arg\, w + 2\pi k}{n}},\quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

При стандартном определении понятия функции, вообще говоря, обратное соответствие

$$\sqrt[n]{w} : E_0 \to C$$

функцией не является, поскольку одной точке $w \in E_0$ ставится в соответствие множество различных точек $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$.

В данном случае мы должны говорить либо о «многозначной функции» либо о наборе однозначных функций $\{f_k : E_0 \to D_k\}$, каждая из которых осуществляет конформное отображение области E_0 на область D_k. Функции f_k называют *ветвями* многозначной функции $z = \sqrt[n]{w}$. Далее говоря о значениях многозначной функции, мы всякий раз должны знать – с какой конкретно однозначной ветвью функции мы имеет дело в данном случае.

В нашем определении ветвей функции $z = \sqrt[n]{w}$ имеется существенный недостаток – ни одна из ветвей не определена на положительной действительной полуоси. При этом ни одну из ветвей нельзя продолжить на положительную действительную полуось так, чтобы получаемая функция была аналитической во все комплексной плоскости $\mathbb{C}$. К примеру, доопределяя ветвь f_0 по непрерывности изнутри области в точке $w = 1$, с одной стороны, при стремлении w к точке $w_0 = 1$ «сверху» получаем

$$\lim_{w \to 1+i0} f_0(w) = 1,$$

с другой стороны, при стремлении w к точке $w_0 = 1$ «снизу» получаем

$$\lim_{w \to 1-i0} f_0(w) = e^{i\frac{2\pi}{n}}.$$

Таким образом функцию f_0 нельзя доопределить на положительной полуоси даже с сохранением непрерывности, не говоря уже об аналитичности.

Но тем не менее можно утверждать, что в окрестности каждой точки $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ можно выделить найти такую аналитическию функцию $h(w)$, что $(h(w))^n = w$.

3.3 Конформное отображение

Пусть $U, V \subset \mathbb{C}$ — области. Взаимно однозначная аналитическая функция $f : U \to V$ называется ***конформным отображением***.

Обычно, конформное отображение определяют иначе. В следуюей теореме содержится эквивалентное описание.

Теорема 3 *Взаимно однозначчное отображение $f : U \to V$ является конформным тогда и толко тогда, когда если в каждой точке $z \in U$ f обладает свойствами:*

1. *постоянства растяжения по всем направлениям;*
2. *сохранения углов меду кривыми.*

Доказательство. Сначала докажем, что $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in U$. Пусть $f'(z_0) = 0$ для некоторой точки $z_0 \in U$. Тогда наша цель — найти две разные точки z_1, z_2 так, что $f(z_1) = f(z_2)$. Для упрощения записи, предположим[a] $z_0 = f(z_0) = 0$.

Поскольку f аналитична в $z = 0$ и $f'(0) = f(0) = 0$, то имеем разложении

$$f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots$$

где $k > 1$. Вынося z^k за скобки, имеем

$$f(z) = z^k (a_k + a_{k+1} z + \dots) = z^k g(z)$$

где g аналитическая и $g(0) \neq 0$. Поскольку g отлична от нуля в некоторой окрестности нуля, мы можем выбрать аналитическую ветвь функции $\sqrt[k]{\cdot}$. Обозначим эту ветвь h, так, что h аналитическая и $h(z)^k = g(z)$ в окрестности нуля. Поэтому

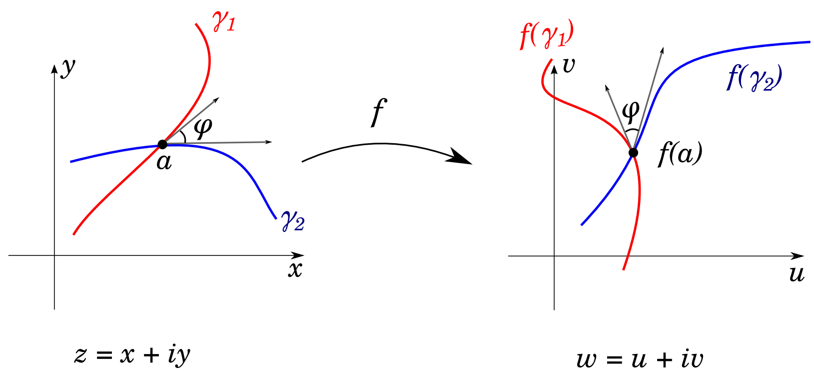
$$f(z) = (zh(z))^k .$$

Заметим, что функция $\phi(z) = zh(z)$ аналитична в окрестности $z = 0$. Следовательно, для $\epsilon > 0$, $\phi(B(0, \epsilon))$ — открытое множество[b] , а значит, содержит некоторый круг $B(0, 2\delta)$. В частности, найдутся точки $z_1, z_2 \in B(0, \epsilon)$ такие, что $\phi(z_1) = \delta$ и $\phi(z_2) = \delta \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right)$. Откуда

$$f(z_2) = \delta^k \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right)^k = \delta^k = f(z_1)$$

. Поскольку по условию f — инъективное отображение, заключаем, что $f'(z_0) \neq 0$ для всех $z \in C$.

Докажем свойства 1 и 2. Пусть γ_1, γ_2 — две гладкие кривые, пересекающиеся в точке $a \in \mathbb{C}$ под углом φ.



Выберем такие параметризации $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, что $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$. Тогда $\gamma_1'(0)$, $\gamma_2'(0)$ — касательные векторы к кривым γ_1, γ_2 в точке a. И, по условию, угол между этим векторами есть φ.

Вычислим касательные векторы в образе:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma_1(t))|_{t=0} = f'(\gamma_1(0)) \cdot \gamma_1'(0) = f'(a) \cdot \gamma'(0),$$

аналогично $(f(\gamma_2(t)))'_{t=0} = f'(a)\gamma_2'(0)$. Другими словами, касательные векторы умножаются на одно и тоже комплексное число $f'(a)$. В свою очередь это означает, что длина каждого вектора умножается на $|f'(a)|$ и оба вектора поворачиваются на угол $\arg f'(a)$. Таким образом, угол между касательными векторами не меняется, а растяжение не зависит от направления. □

[a]Также можно использовать функцию $f(z+z_0) - f(z_0)$.

[b]В силу теоремы об открытом отображении (которую мы пока не доказали).

3.3.1 Дробно-линейное отображение

Рассомотрим отображнеие

$$f(z) = \frac{i-z}{i+z}.$$

Оказывается, что f конформно отображает верхнюю полуплоскость на единичный круг.

> ***Дробно-линейной*** называется функция вида
>
> $$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{3.2}$$
>
> где $a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0$.

Далее считаем, что $c \neq 0$ (иначе получаем линейную функцию). Особыми точками являются $-d/c$ и ∞. Функцию (3.2) можно доопределить в этих точках: $w(-d/c) = \infty$, $w(\infty) = a/c$.

Доопределённая таким образом дробно-линейная функция будет взаимно однозначно и непрерывно отображать всю расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. Обратная функция имеет вид

$$z = \frac{dw-b}{a-cw}.$$

Теорема 4 *Дробно-линейное отображение* (3.2) *является конформным.*

Теорема 5 (круговое свойство) *Всякая окружность или прямая на комплексной плоскости дробно-линейной функцией отображается в окружность либо в прямую.*

3.3.2 Функция Жуковского

Функция

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{3.3}$$

называется ***функцией Жуковского.***

Очевидно, что эта функция является голоморфной на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Производная $w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$ существует и отлична от нуля во всех точках, кроме $z = 0, \pm 1$. Следовательно, функция Жуковского является конформным отображением в окрестности каждой точки, отличной от $z = 0, \pm 1$. Однако функция Жуковского не является взаимно-однозначной на всей комплексной плоскости. В качестве областей, на которых функция Жуковского является взаимно-однозначной, можно выбрать внутренность единичного круга $|z| < 1$ или его внешность $|z| > 1$.

Пример 11. *Найти преобразование полярной сетки* $|z| = R, \arg z = \alpha$ *с помощью функции Жуковского* (**??**).

Решение. Используя тригонометрическое представление $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, отображение (**??**) можно записать в виде

$$w = \frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\right).$$

Тогда

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{3.4}$$

1. Найдём образ окружности $|z| = R < 1$. Из (**??**) имеем

$$u = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)\cos\varphi, \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - R\right)\sin\varphi, \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

— параметрическое уравнение эллипса с полуосями $a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$ и $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - R\right)$. Отметим, что если точка z пробегает окружность $|z| = R$ против часовой стрелки, то точка $w = u + iv$ пробегает этот эллипс по часовой стрелке. При $R \to 1$ эллипс стягивается в отрезок $[-1, 1]$.

2. Аналогично получаем, что окружность $|z| = R > 1$ преобразуется в эллипс с полуосями $a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$ и $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - R\right)$. Но на этот раз эллипс ориентирован против часовой стрелки.

3. Лучи $\arg z = \alpha$ ($\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$) переходят ветви гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1.$$

Итак, окружностям $|z| = R$ соответствуют софокусные эллипсы

$$\frac{4u^2}{(R+1/R)^2} + \frac{4v^2}{(R-1/R)^2} = 1$$

(окружности $|z| = 1$ - отрезок $v = 0, -1 \leq u \leq 1$). Лучам соответствуют софокусные гиперболы (лучу $\arg z = 0$ - луч $v = 0, u \geq 1$, лучу $\arg z = \pi$ - луч $v = 0, u \leq -1$; лучам $\arg z = \pm\pi/2$ - ось $u = 0$).