Лекция 5

Интеграл типа Коши

5.1 Интеграл типа Коши

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – ориентированная кусочно-гладкая кривая, f — определённая на кривой Γ непрерывная функция. Для любой точки $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ функция $\dfrac{f(t)}{t-z}$ непрерывна по переменной t на кривой Γ. Поэтому существует интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \tag{5.1}$$

называемый ***интегралом типа Коши*** и являющийся однозначной функцией переменного z.

Теорема 11 *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – ориентированная кусочно-гладкая кривая, функция f непрерывна на Γ. Тогда интеграл типа Коши, определяемый равенством (5.1), является аналитической функцией в области $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Более того, функция $F(z)$ бесконечно дифференцируема и при этом*

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Ограничимся вычислением первой производной (т. е. $F'(z)$). Фиксируем произвольную точку $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ и пусть $2d = \mathrm{dist}(z, \Gamma)$, а $|\Delta z| < d$. Тогда для любого $t \in \Gamma$ выполняются неравенства $|t - z| > d$ и $|t - z - \Delta z| > d$.

Оценим разность

$$\Big|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}\Big| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big|\int\limits_{\Gamma} \frac{\Delta z f(t)\,dt}{(t-z)^2(t-z-\Delta z)}\Big| \leq \frac{|\Delta z|LM}{2\pi d^3},$$

где L – длина кривой Γ, а M – максимум модуля функции $f(t)$ на кривой Γ (см. лемму 7).

Таким образом,

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}.$$

Дифференцируемость интегралов типа Коши позволяет получить важное следствие:

Теорема 12 *Аналитическая в области $D \subset \mathbb{C}$ функция $f(z)$ является бесконечно дифференцируемой в каждой точке области D.*

Доказательство. Действительно, пусть точка z_0 — произвольная точка области D и $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда в круге $B(z_0, r)$ функция $f(z)$ представима интегралом Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t-z_0|=r} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

и, следовательно, является бесконечно дифференцируемой. □

5.2 Гармонические функции

Дифференциальный оператор $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ называется оператором Лапласа.

Дважды непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x, y)$ называется ***гармонической*** в области $D \subset C$, если

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{всюду в области } D.$$

Приведём примеры гармонических функций: $e^x \cos y$, $x^2 - y^2$, $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$.

5.2.1 Связь аналитических и гармонических функций

Далее будет доказано, что аналитическая в области функция, а, следовательно, и её действительная и мнимая части, будут бесконечно дифференцируемы (см. теорему 17). А пока воспользуемся этим фактом.

Пусть функция $f = u + iv$ является аналитической в области D, следовательно, выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируя первое равенство по переменной x, второе равенство по переменной y, складывая и используя равенство смешанных производных ($\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$), получаем

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

То есть функция u является гармонической в области D. Аналогично доказывается гармоничность функции v.

Гармонические в области D функции называются ***сопряженными***, если они связаны условиями Коши–Римана.

Теорема 13 *Чтобы функция $f = u + iv$ была аналитична в области D необходимо и достаточно, чтобы ее действительная часть u и мнимая часть v были сопряженными гармоническими функциями.*

Необходимость условий теоремы уже показана, а достаточность следует из того, что гармонические функции дифференцируемы (как функции двух действительных переменных), и их сопряженность влечет выполнение условий Коши–Римана.

5.3 Теорема о среднем и принцип максимума модуля

Теорема 14 (Теорема о среднем) *Если функция $f(z)$ является аналитической в круге $B(z_0, r)$ и непрерывной в замкнутом круге $\overline{B(z_0, r)}$, то ее значение в центре круга равно среднему значению функции на граничной окружности, то есть*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|w-z_0|=r} f(w)dl = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi.$$

Доказательство. Используя интегральную формулу Коши и делая замену переменной $w = z_0 + re^{i\varphi}$, получаем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)d\,w}{w-z_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|t-z_0|=r} f(t)dl.$$

Теорема 15 (Принцип максимума модуля)
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область, а отличная от постоянной функция f является аналитической в области D и $M = \sup\limits_{z\in D} |f(z)|$.
Тогда $|f(z)| < M$ для произвольной точки $z \in D$.
Иными словами, модуль отличной от постоянной аналитической функции не может достигать своего максимума ни в одной внутренней точке области.

Доказательство. Если $M = +\infty$, то утверждение теоремы очевидно, так как функция $f(z)$ является аналитической и, следовательно, конечной во всей области D.

Пусть $M < +\infty$. Доказывать будем от противного: предположим, что существует такая точка z_0, что $|f(z_0)| = M$, и покажем, что в этом случае функция $f(z)$ является постоянной во всей области D.

Выбирая $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, используя теорему о среднем и определение числа M, получаем

$$M = |f(z_0)| = \Big| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi \Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} M 2\pi = M,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|d\varphi = M.$$

Поскольку функция $f(z)$ непрерывна и $|f(z)| \leq M$, то последнее равенство возможно лишь при $|f(z_0 + re^{i\varphi})| = M$ для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$. Таким образом, $|f(z)| \equiv M$ на окружности $|z - z_0| = r$. Так как $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ выбиралось произвольно, то $|f(z)| \equiv M$ в любом замкнутом круге $\overline{B(z_0, R)} \subset D$.

Пусть z^* – произвольная точка области D. Покажем, что $|f(z^*)| = M$. Соединим точки z^* и z_0 кривой $\gamma \subset D$. Учитывая, что расстояние от кривой γ до границы области положительно, фиксируем положительное $r < \operatorname{dist}(\gamma, \partial D)$. Тогда для всякого $z \in \gamma$ замкнутый круг $\overline{B(z,r)} \subset D$.

Если $|z^* - z_0| \le r$, то по уже доказанному $|f(z^*)| = M$.

Пусть $|z^* - z_0| \ge r$. Так как длина кривой γ конечна, то ее можно разбить на конечное число последовательных дуг точками $z_1, z_2, \ldots, z_n = z^*$, такими, что $|z_{k+1} - z_k| \le r$. Поскольку $z_1 \in \overline{B(z_0, r)}$, то по уже доказанному $|f(z_1)| = M$. Повторяя для точки z_1 рассуждения, аналогичные ранее использованным для точки z_0, получаем $|f(z)| \equiv M$ в круге $\overline{B(z_1, r)}$. Поскольку $z_2 \in \overline{B(z_0, r)}$, то $|f(z_2)| = M$. Продолжая процесс, мы за конечное число шагов дойдем до точки $z_n = z^*$ и получим $|f(z^*)| = M$.

Поскольку точка z^* выбиралась произвольным образом, то модуль функции является постоянным во всей области D. Осталось показать, что и сама функция является постоянной.

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, тогда $u^2 + v^2 \equiv M^2$. Следовательно,

$$0 = \Delta(u^2 + v^2) = 2u\Delta u + 2v\Delta v + 2\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 \Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2\Big] =$$

$$2\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2\Big].$$

Последнее равенство является следствием гармоничности функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в области D. Таким образом, все частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0,$$

и, следовательно, $f(z) \equiv const$ в области D. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы. □

Следствие 16 *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область, отличная от постоянной функция f является аналитической в области D и $m = \inf\limits_{z \in D} |f(z)|$. Если $f(z) \ne 0$ в области D, то $|f(z)| > m$ для произвольной точки $z \in D$.*

Доказательство. Поскольку $f(z) \ne 0$, то функция $g(z) = 1/f(z)$ будет аналитической в области D и

$$\sup_{z \in D} |g(z)| = \frac{1}{\inf\limits_{z \in D} |f(z)|} = \frac{1}{m}.$$

Остаётся воспользоваться принципом максимума модуля для функции $g(z)$.

□

Следствие 17 *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область. Если отличная от постоянной функция f является аналитической в области D, непрерывной в $\overline{D}$ и $f(z) \neq 0$ в области D, то модуль функции достигает своего наибольшего и наименьшего значения только на границе области.*

Доказательство. Поскольку $\overline{D}$ является компактным множеством, то по теореме Вейерштрасса непрерывная функция $|f(z)|$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения в $\overline{D}$. При этом по принципу максимума модуля и следствию 14 эти значения не могут достигаться во внутренних точках области D. □

5.4 Первообразная

Дифференцируемая в области D функция $F(z)$ называется ***первообразной*** функции $f(z)$, если $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in D$.

Таким образом, f — аналитическая функция и в качестве первообразной можно взять

$$F(z) = \int\limits_{\gamma} f(w)\,dw = \int\limits_{z_0}^{z} f(w)\,dw,$$

где $\gamma \subset D$ кусочно-гладкая кривая, соединяющая z_0 и z.

Действительно, пусть отрезок $[z, z+\Delta z] \subset D$. Поскольку интеграл не зависит от пути интегрирования, то

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)\,d\,t = \int\limits_{[z,z+\Delta z]} f(t)\,d\,t. \tag{5.2}$$

Далее будем считать, что в формуле (5.2) интегрирование происходит по отрезку $[z, z+\Delta z]$.

В силу непрерывности функции $f(t)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(t) - f(z)| < \varepsilon$ для всех точек t, удовлетворяющих неравенству $|t - z| < \delta$. Пусть $|\Delta z| < \delta$, тогда

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{[z,z+\Delta z]} (f(t) - f(z))\,dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|}\,\varepsilon\,|\Delta z| = \varepsilon.$$

Из полученной оценки непосредственно следует, что

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Заметим, что если $F(z)$ первообразная функции $f(z)$, то $F(z) + C$ также первообразная $f(z)$ (здесь $C = \text{const}$).

Следующее утверждение является обратным к интегральной теореме Коши.

Теорема 18 (Теорема Морера) *Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и вдоль любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\gamma \subset D$*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0,$$

то функция $f(z)$ является голоморфной в области D.

Доказательство. Выше было показано, что

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt, \tag{5.3}$$

где z_0 и z — произвольные точки области D, а интеграл берётся по любому пути, соединяющему эти точки в области D , является голоморфной в этой области функцией, причём $F'(z) = f(z)$. Производная аналитической функции также является аналитической функцией (см. лемму 17), то есть существует непрерывная производная функции $F'(z)$, а именно функция $F''(z) = f'(z)$, что и доказывает теорему. □

Теорема 19 (Теорема Лиувилля) *Пусть на всей комплексной плоскости функция $f(z)$ является аналитической, а её модуль ограничен. Тогда эта функция $f(z)$ тождественно равна постоянной $f(z) \equiv \text{const}$.*

Доказательство. Запишем значение производной $f'(z)$ в произвольной точке z по формуле :

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(t)}{(\omega - z)^2}\,dt,$$

причём интегрирование будем вести по окружности некоторого радиуса R с центром в точке z, то есть $|t - z| = R$. По условию теоремы существует такая константа M, что $|f(t)| \leq M$ независимо от R. Поэтому

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_R} \frac{|f(t)|}{(t-z)^2}\, dt \leq \frac{M}{R}.$$

Так как радиус R можно выбрать сколь угодно большим, а $f'(z)$ не зависит от R, то $|f'(z)| = 0$. В силу произвольности выбора точки z заключаем, что $|f'(z)| \equiv 0$ на всей комплексной плоскости. Отсюда следует, что $f(z) \equiv \text{const}$. $\square$

Тригонометрические функции комплексного переменного являются аналитическими функциями на всей комплексной плоскости. В силу только что доказанной теоремы эти функции не могут быть ограниченными на всей комплексной плоскости. Отсюда, в частности, следует, что найдутся такие значения комплексной переменной z, для которых

$$|\sin z| > 1.$$

Этим тригонометрические функции комплексного переменного существенно отличаются от соответствующих функций действительного переменного.