Лекция 11

Вычисление интегралов со степенным и логарифмическим весом

11.1 Интегралы со степенным весом

Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)\, dx, \tag{11.1}$$

где α — нецелое действительное число, а $f(x)$ — рациональная функция.

Без ограничения общности можно считать, что $f(0) \neq 0$ и $f(0) \neq \infty$, поскольку иначе $f(x) = x^m f_1(x)$, $f_1(0) \neq 0$, $f_1(0) \neq \infty$ и $x^{\alpha-1} f(x) = x^{\beta-1} f_1(x)$. Также при $z \to \infty$ выполняется оценка $f(z) \sim Cz^{-k}$, где k — целое число, так как $f(z)$ — рациональная функция.

Для сходимости интеграла необходимо:

1) чтобы функция $f(x)$ не имела полюсов на полуоси $0 < x < \infty$;

2) $\alpha > 0$, поскольку $x^{\alpha-1} f(x) \sim x^{\alpha-1} f(0)$, при $x \to +0$;

3) $\alpha < k$, поскольку $x^{\alpha-1} f(x) \sim Cx^{\alpha-k-1}$, при $x \to +\infty$.

Продолжим подынтегральную функцию $f(x)$ в комплексную плоскость, при этом следует учесть, что функция $z^{\alpha-1}$ является многозначной. Пусть D — плоскость с разрезом $[0, +\infty]$. Фиксируем однозначную в области D ветвь $h(z)$ функции $z^{\alpha-1}$, принимающую положительные значения на верхнем берегу разреза, то есть $h(x+i0) = x^{\alpha-1}$. Тогда на нижнем берегу разреза получаем $h(x-i0) = x^{\alpha-1}e^{i2\pi(\alpha-1)} = x^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}$.

Пусть все конечные особые точки рациональной функции $f(z)$ лежат в кольце $r < |z| < R$. Рассмотрим ориентированный замкнутый контур $\Gamma_{r,R}$, состоящий из окружностей $C_r = \{|z| = r\}$, $C_R = \{|z| = R\}$ и отрезков $[r, R]$, $[R, r]$, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза.

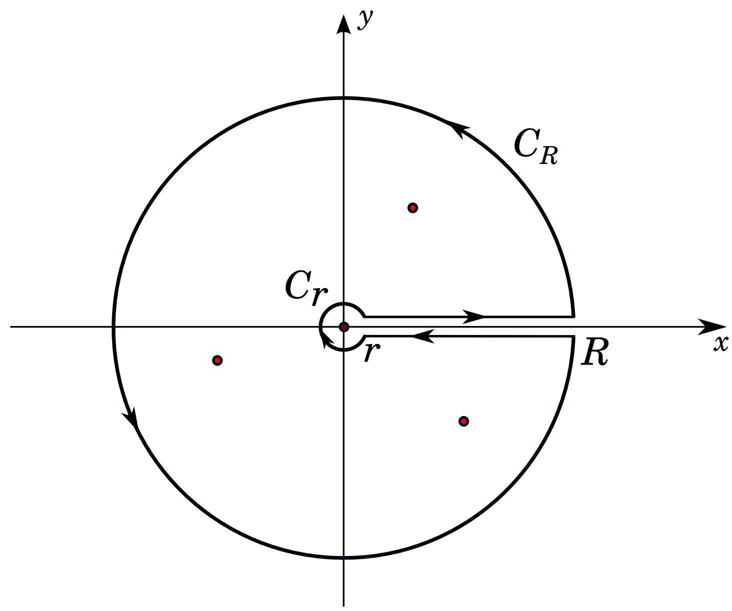

Рис. 11.1. Контур $\Gamma_{r,R}$.

По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\Gamma_{r,R}} h(z)\, f(z)\, d\, z = \int\limits_r^R x^{\alpha-1}\, f(x)\, d\, x + e^{i2\pi\alpha} \int\limits_R^r x^{\alpha-1}\, f(x)\, d\, x +$$

$$+ \int\limits_{C_R} h(z)\, f(z)\, d\, z + \int\limits_{C_r^-} h(z)\, f(z)\, d\, z = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k} (h(z)\, f(z)). \qquad (11.2)$$

Из условий 2) и 3) следует, что

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} h(z)\, f(z)\, d\, z = 0,$$

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{C_r^-} h(z)\, f(z)\, d\, z = 0.$$

Переходя в равенстве (11.2) к пределу при $r \to 0$ и $R \to \infty$, получаем

$$I - e^{i2\pi\alpha} \cdot I = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k} (h(z)\, f(z)).$$

Окончательно, имеем:

$$I = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\, f(x)\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k} (h(z)\, R(z)).$$

Замечание. Достаточно часто встречающиеся интегралы вида

$$\int\limits_0^1 \Big(\frac{x}{1-x}\Big)^\alpha f(x)\, d\, x$$

при помощи замены переменной $y = \frac{x}{1-x}$ сводятся к интегралам со степенным весом вида (11.1).

Пример 30. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2}\, dx, \qquad -1 < p < 1.$$

Решение. Обозначим $I = \int\limits_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2}\, dx$.

Рассмотрим замкнутую кривую $\Gamma_{R,r}$ как на рис. 11.1. Пусть $h(z)$ — однозначная ветвь функции z^p такая, что $h(x + i0) = x^p$ (в области, ограниченной кривой $\Gamma_{R,r}$, $h(z) = e^{p \ln|z| + i \arg z}$). Особыми точками функции $\frac{h(z)}{1+z^2}$ внутри кривой являются $-i, i$ — полюса первого порядка. Найдём вычеты в этих точках

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{h(z)}{1+z^2} = \frac{e^{ip\frac{\pi}{2}}}{i}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=-i} \frac{h(z)}{1+z^2} = -\frac{e^{ip\frac{3\pi}{2}}}{i}.$$

Устремляя $R \to \infty$ и $r \to 0$, приходим к уравнению

$$I - e^{pi2\pi} I = 2\pi i \left(\frac{e^{ip\frac{\pi}{2}}}{i} - \frac{e^{ip\frac{3\pi}{2}}}{i} \right) = \pi(e^{ip\frac{\pi}{2}} - e^{ip\frac{3\pi}{2}}),$$

откуда находим

$$I = \frac{\pi}{2\cos(\pi p/2)}. \qquad \triangle$$

11.2 Интегралы с логарифмическим весом

Рассмотрим интеграл вида

$$I_m = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\, (\ln x)^m R(x)\, dx, \tag{11.3}$$

где α – действительное число, $m \in \mathbb{N}$, а $R(x)$ – рациональная функция.

Как и в предыдущем параграфе будем считать, что $R(0) \neq 0$ и $R(0) \neq \infty$, и $R(z) \sim Cz^{-k}$ при $z \to \infty$.

Условия сходимости интеграла (11.3) оказываются такими же как и для интегралов со степенным весом в пункте 11.1:

1) функция $R(x)$ должна не иметь полюсов на полуоси $0 < x < \infty$;

2) $0 < \alpha < k$.

Продолжим подынтегральную функцию в комплексную плоскость. Пусть D — плоскость с разрезом $[0, +\infty]$. Фиксируем однозначную в области D ветвь $h(z)$ функции $z^{\alpha-1}$, принимающую положительные значения на верхнем берегу разреза, то есть $h(x+i0) = x^{\alpha-1}$, и однозначную ветвь функции $\ln z$, принимающую действительные значения на верхнем берегу разреза, то есть $\ln(x+i0) = \ln x$. Тогда на нижнем берегу разреза получаем $h(x-i0) = x^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}$, $\ln(x-i0) = \ln x + 2\pi i$.

Пусть все конечные особые точки рациональной функции $R(z)$ лежат в кольце $r < |z| < R$. Рассмотрим ориентированный замкнутый контур $\Gamma_{r,R}$, состоящий из окружностей $C_r = \{|z| = r\}$, $C_R = \{|z| = R\}$ и отрезков $[r, R]$, $[R, r]$, лежащих соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза (см. рис. 11.1).

Упражнение 17 *Доказать, что функция $h(z) = e^{\alpha(\ln|z| + i\arg z)}$ является аналитической в области ограниченной кривой $\Gamma_{r,R}$.*

По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\Gamma_{r,R}} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,dz = \int\limits_r^R x^{\alpha-1}\,(\ln x)^m R(x)\,dx +$$
$$+ \int\limits_{C_R} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,dz + e^{i2\pi\alpha}\int\limits_R^r x^{\alpha-1}\,(\ln x + 2\pi i)^m R(x)\,dx +$$
$$+ \int\limits_{C_r^-} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(h(z)\,(\ln z)^m R(z)). \quad (11.4)$$

Из условия 2) следует, что

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,d\,z = 0,$$

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{C_r^-} h(z)\,(\ln z)^m R(z)\,d\,z = 0.$$

Переходя в равенстве (11.4) к пределу при $r \to 0$ и $R \to \infty$, получаем

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\,(\ln x)^m R(x)\,dx - e^{i2\pi\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1}\,(\ln x + 2\pi i)^m R(x)\,d\,x =$$
$$= 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}\big(h(z)\,(\ln z)^m R(z)\big). \quad (11.5)$$

Возможны два различных случая.

1. **Число α является нецелым.** В этом случае множитель $e^{i2\pi\alpha}$ перед вторым интегралом в формуле (11.5) отличен от единицы. Наиболее простой вид формула (11.5) имеет при $m = 1$

$$(1 - e^{i2\pi\alpha})I_1 - 2\pi i\int_0^\infty x^{\alpha-1}\,R(x)\,d\,x = 2\pi i\sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}\big(h(z)\;\ln z\,R(z)\big). \quad (11.6)$$

Если ввести обозначение

$$J = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\,R(x)\,d\,x,$$

и выделить в формуле (11.6) действительную и мнимую части, то мы получим линейную систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_1 I_1 + a_2 J = A \\ b_1 I_1 + b_2 J = B, \end{cases}$$

из которой можно найти значение интеграла I_1. Зная значение I_1, по формуле (11.5) можно последовательно найти значение интегралов $I_2,\ I_3,\ \ldots\ I_m$.

2. **Число α является целым.** В этом случае мы имеем интеграл вида

$$I_m \;=\; \int_0^\infty (\ln x)^m R(x)\,dx,$$

формула (11.5) принимает вид

$$\int_0^\infty (\ln x)^m R(x)\,dx - \int_0^\infty (\ln x + 2\pi i)^m R(x)\,dx = 2\pi i\sum \operatorname*{Res}_{z=z_k}(\ln z)^m R(z) \quad (11.7)$$

и не позволяет найти интеграл I_m.

Для нахождения интеграла I_m в формуле (11.7) в качестве подынтегральной функции следует взять функцию $(\ln z)^{m+1}R(z)$.

Если рациональная функция функция $R(x)$ является чётной, то для вычисления интеграла I_m можно использовать контур $\gamma_{r,R}$, состоящий из отрезков действительной оси $[-R, -r],\ [r, R]$ и верхних полуокружностей $C_r^+,\ C_R^+$.