ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Лектор — Никита Александрович Евсеев

Программа курса лекций

(3-й семестр, лекции 36 ч., семинары 36 ч., экз.)

1. Аналитические функции комплексного переменного

Комплексные числа. Топология комплексной плоскости. Сфера Римана. Стереографическая проекция. Аналитические функции и условия Коши — Римана. Основные элементарные функции комплексного переменного: многочлены, рациональные функции, экспонента, гиперболические и тригонометрические функции.

2. Геометрические свойства функций

Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения. Дробно-линейные функции. Функция Жуковского. Конформная инвариантность уравнения Лапласа.

3. Интегрирование функций комплексного переменного

Интеграл функции комплексного переменного по ориентированной кривой. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Первообразная аналитической функции. Теорема Мореры. Принцип максимума модуля аналитической функции.

4. Ряды аналитических функций

Ряд Тейлора. Теорема единственности. Теорема о разложении аналитической в кольце функции в ряд Лорана. Единственность разложения в ряд Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Теорема Лиувилля. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Нули аналитической функции. Бесконечно удалённая особая точка.

5. Элементы теории вычетов

Вычет в конечной особой точке. Основная теорема теории вычетов. Формула для нахождения вычета в полюсе. Вычет в бесконечно удалённой точке. Интегрирование рационально-тригонометрических функций. Интегрирование рациональных функций. Преобразование Фурье рациональной функции. Лемма Жордана. Формула обращения преобразования Лапласа. Восстановление оригиналов при помощи теорем разложения. Интегрирование рациональных выражений со степенным «весом». Интегралы типа бета-функции. Вычисление интегралов с логарифмическими особенностями. Вычисление интегралов в смысле главного значения по Коши. Принцип аргумента. Теорема Руше.

6. Асимптотические методы

Метод Лапласа: принцип локализации; лемма Морса; лемма Ватсона. Метод стационарной фазы: лемма Эрдейи; вклад от невырожденной стационарной точки.

Литература

1. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. (Шифр библиотеки НГУ — В16+ Б669.)

2. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2004. (Шифр библиотеки НГУ — В16+ В677.)

3. Евграфов М. А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций. М.: Наука, 1972. (Шифр библиотеки НГУ — В16 С232.)

4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.(Шифр библиотеки НГУ — В16 Л135.)

5. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1967. (Шифр библиотеки НГУ — 517 М278.)

6. Привалов В. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Высш. шк., 1999. (Шифр библиотеки НГУ — В16+ П752.)

7. Романов А. С. Теория функций комплексного переменного. Записки лектора.
(http://phys.nsu.ru/ok03/doc/Tfkp_Romanov_FF_NGU_2007_86s.pdf)

8. Романов А. С. Элементарные асимптотические методы.
(http://phys.nsu.ru/ok03/doc/Elementary_asymptotic_methods_Romanov_FF_NGU_2003_57s.pdf)

План семинаров

1. Комплексные числа, комплексная плоскость. Элементарные функции комплексного переменного: многочлены, экспонента, гиперболические, тригонометрические функции и обратные к ним. Многозначные функции.

2. Комплексная производная. Условия Коши — Римана. Аналитические функции.

3. Конформные отображения. Отображения элементарными функциями.

4. Дробно-линейные функции. Функция Жуковского.

5. Интегрирование функций комплексного переменного. Первообразная аналитической функции. Интегральная теорема Коши и формула Коши.

6. Степенные ряды: круг сходимости, дифференцирование, интегрирование.

7. Ряд Тейлора. Классификация нулей аналитической функции.

8. Ряд Лорана. Особые точки.

9. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

10. Вычисление интегралов от рациональных и рационально-тригонометрических функций.

11. Вычисление интегралов от рациональных выражений со степенным «весом», интегралов типа бета-функции и интегралов с логарифмическим весом.

13. Преобразование Лапласа: восстановление оригинала при помощи теорем разложения. Применение принципа аргумента и теоремы Руше.

14. Асимптотические разложения. Простейшие способы получения асимптотических разложения.

15. Метод Лапласа.

16. Метод стационарной фазы.

Задания по теории функций комплексного переменного

Каждый студент в семестре должен выполнить три задания — это неотъемлемая часть экзамена. За каждую решённую задачу, сданную в срок, указанный в задании, студенту начисляется 5 баллов. Если задача по каким-либо причинам сдается позже указанного срока, то балы за неё не начисляются. Бонусные баллы учитываются при выставлении оценки за экзамен.

Задание 1 (*сдать до 18 октября*)

1. Найти множество решений уравнения $|z^2| + \mathrm{Re}(a \cdot z) + b = 0$, где $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$ — фиксировванные параметры.

2. Исследовать непрерывность и дифференцируемость функции

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}}, & \text{если } z \neq 0, \\ 0, & \text{если } z = 0. \end{cases}$$

3. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция такая, что $\mathrm{Im}(f'(z)) = 6x(2y-1)$, $f(0) = 3-2i$, $f(1) = 6-5i$. Вычислите значение $f(1+i)$.

4. Рассмотрим функции $f(z) = z^2$; $g(z) = e^z$; $h(z) = \ln z$ и кривые $\gamma_1(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$; $\gamma_2(t) = it$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$.

1) Построить образы $f(\gamma_2)$, $g(\gamma_2)$.

2) Доказать, что в верхней полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ f, h — конформные функции, а g — нет.

3) В какой точке и под каким углом пересекаются образы $f(\gamma_1)$ и $f(\gamma_2)$?

5. Найти образ области $|z| > 1$ с выброшенными интервалами $[-2, -1], [1, +\infty)$ действительной оси при отображении функцией Жуковского $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Найдите также $g(i)$, где функция $g(z)$ осуществляет отображение, обратное данному.

6. Используя интегральную формулу Коши, докажите формулу

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{tz}}{z^2+4}\, dz = \pi i \sin 2t.$$

7. Вычислите интеграл

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin z}{z}\, dz,$$

предварительно разложив подынтегральную функцию в степенной ряд.

8. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0

1) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+1)}, \quad z_0 = 1;$ 2) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)^2}, \quad z_0 = 2.$

9. Разложите в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$ функцию $f(z) = (z+1)^2 e^{\frac{z}{z-2}}$, и найдите значение главной части этого разложения при $z = 1$.

Задание 2 (*сдать до 30 ноября*)

1. Для заданной функции $f(z)$ найти особые точки, определить их тип и в изолированных точках вычислить вычеты. Кроме того, исследовать поведение функции на бесконечности.

1) $f(z) = \dfrac{(z+1)^2 \sin 1/z}{(3z+1)^2}$;

2) $f(z) = (z+2)^2 \cos \dfrac{z}{1+z}$;

3) $f(z) = \dfrac{1}{1-\cos z} - \dfrac{2}{z^2}$.

2. Вычислите интегралы, считая, что контуры проходятся против часовой стрелки:

1) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz$; 2) $\displaystyle\int\limits_{|z-1-i|=2} \frac{\cos(1/z)}{iz+1}\,dz$.

3. Вычислите интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \cos(n\varphi - \sin\varphi)\,d\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$; 2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x^3+4x}$; 3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x\,dx}{(x+4)(x+2)}$.

5. Проверить равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x\,dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{e}.$$

6. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\operatorname{Re} z=\alpha} \frac{ze^{zt}\,dz}{z^2+1}, \qquad \alpha, t > 0.$$ (*Формула обращения преобразования Лапласа.*)

7. Используя первую теорему разложения, выразите через функцию Бесселя соответствующего порядка оригинал изображения $F(p) = e^{-\frac{1}{p}} - 1$. (Одно из определений функции Бесселя $J_n(z)$ порядка $n, n \in \mathbb{N} \cup 0$: $J_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{z}{2})^{n+2k}}{(k)!(k+n)!}$).

8. Используя вторую теорему разложения, восстановите оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{1}{p^2 \operatorname{sh} p}$.

9. Используя теорему Руше найдите количество корней уравнения $\dfrac{n(z+1)}{z-4} + 2z^n + 3 = 0$ в круге $|z| < 3$, где $n \in \mathbb{N}$.

10. Вычислите интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x\,dx}{(x+4)(x+2)}.$$

Задание 3 (*сдать до 29 декабря*)

1. Найдите при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int\limits_{-1}^{1} (3 - x - 2x^2)^{\lambda} e^{-x}\, dx.$$

2. Используя лемму Ватсона, найдите при $p \to +\infty$ асимптотическое разложение интеграла Лапласа

$$F(p) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-pt} \cos^2 2t\, dt.$$

3. Найдите при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{(x+1)e^{i\lambda x^2}\, dx}{1 + x^4}.$$

4.

Найдите при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(2x+3)\cos\lambda x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Программу лекций, план семинаров и задания по ТФКП составил

к. ф.-м. н. Н. А. Евсеев