

1 Комплексные функции

1.1 Комплексные числа

Напомним, что комплексные числа можно определить как множество упорядоченных пар вещественных чисел

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad z = x + iy,$$

где i — мнимая единица ($i^2 = -1$). Действительная часть $\operatorname{Re} z = x$, мнимая часть $\operatorname{Im} z = y$.

Множество \mathbb{C} снабжено операцией сложения

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

и операцией умножения

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Для каждого числа $z \in \mathbb{C}$ существует противоположное по сложению число $-z$ такое, что $z + (-z) = 0$. Для каждого числа $z \neq 0$ существует обратное по умножению число $\frac{1}{z}$ такое, что $z \cdot \frac{1}{z} = 1$. Имеет место формула

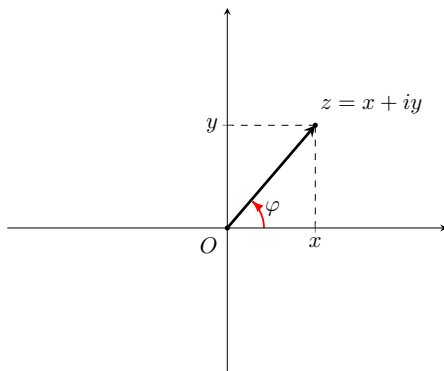
$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Модуль числа $z = x + iy$ определяется как $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряжённым числом.

1.2 Полярные координаты

Каждому комплексному числу $z = x + iy$ взаимно однозначно сопоставлен вектор на плоскости с координатами (x, y) . Любой двумерный вектор полностью определяется своей длиной

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и углом φ с положительным направлением оси Ox :
 $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.



Отсюда выводим тригонометрическую запись комплексного числа

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.1)$$

Определим **аргумент комплексного числа** $\text{Arg } z$ как такой угол φ , что выполнено равенство (1.1). Заметим, что также $\text{Arg } z = \varphi + 2\pi k$, т. е. аргумент определён неоднозначно. В общем виде аргумент можно записать как

$$\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z},$$

где $0 \leq \arg z < 2\pi$ — **главное значение** аргумента. В свою очередь, главное значение аргумента комплексного числа определено однозначно (и принимает значения в промежутке $[0, 2\pi)$).

Пусть $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, а $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ — два комплексных числа, тогда несложно проверить, что

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (1.2)$$

Другими словами, модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения.

Задача 1. Вывести формулу произведения (1.2).

Для любого целого числа k верно

$$z^k = \rho^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi). \quad (1.3)$$

При $\rho = 1$ из выражения (1.3) выводится **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi. \quad (1.4)$$

Эту формулу можно использовать для нахождения синусов и косинусов кратных углов.

Также напомним, что

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

1.2.1 Бесконечно удалённая точка

Введём понятие *расширенной комплексной плоскости*, состоящей из обычной комплексной плоскости и единственного бесконечно удалённого элемента — **бесконечно удалённой точки** $z = \infty$. Аргумент комплексного числа ∞ не определён, так же как и его действительная и мнимая части.

Для комплексного числа ∞ полагают следующие алгебраические свойства:

$$\frac{1}{\infty} = 0; \quad \frac{1}{0} = \infty;$$

$$z + \infty = \infty, \quad z - \infty = \infty;$$

$$z \cdot \infty = \infty, \quad \text{при } z \neq 0;$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, \quad \text{при } z \neq \infty, \quad \text{а операции}$$

$\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ — лишены смысла.

Геометрический смысл ∞ можно увидеть при представлении расширенной комплексной плоскости сферой Римана.

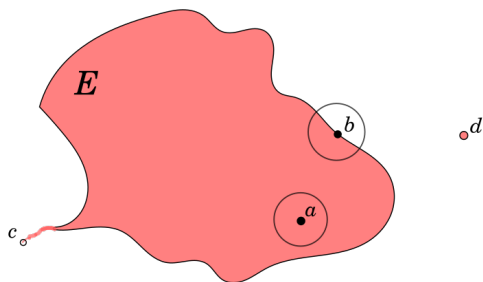
1.3 Топология комплексной плоскости

Топология комплексной плоскости \mathbb{C} ничем не отличается от топологии \mathbb{R}^2 . Напомним понятия, которые потребуются в данном курсе.

Множество $B(a, r)$ называют **окрестностью** точки a (или r -окрестностью). Однако r -окрестностью бесконечно удалённой точки называют множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(a, r)}$, то есть внешность круга.

Пусть $E \subset \mathbb{C}$.

1. Точка a называется **внутренней точкой** множества E , если найдётся окрестность $B(a, r) \subset E$.
2. Точка b называется **граничной точкой** множества E , если всякая окрестность $B(b, r)$ содержит точки из E и из $\mathbb{C} \setminus E$.
3. Точка c называется **предельной точкой** множества E , если всякая окрестность $B(c, r)$ содержит точки из E , отличные от c .
4. Точка d называется **изолированной точкой** множества E , если $d \in E$ и найдётся окрестность $B(d, r)$, которая не содержит других точек из E .



Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется *открытым*, если все его точки внутренние. Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки.

Пример 1.1. Пусть $R > 0$ и $z_0 \in \mathbb{C}$, тогда множества $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ и $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\}$ открыты, в то время как множество $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ — замкнуто.

Пример 1.2. \mathbb{C} и пустое множество \emptyset — открытые множества (и в то же время замкнутые).

Множество всех граничных точек множества E называется *границей* и обозначается ∂E .

Множество всех внутренних точек множества E называется *внутренностью* и обозначается $\text{int } E$.

Объединение множества и его границы $\partial E \cup E$ называется *замыканием* и обозначается \bar{E} .

Открытое множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ называется *связным*, если любые две его точки можно соединить ломаной, целиком лежащей в данном множестве.

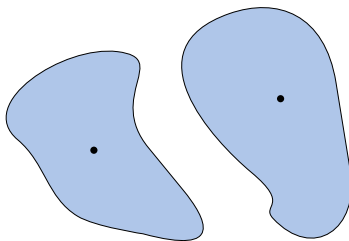
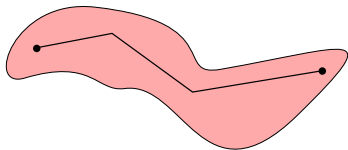


Рис. 1: Связное множество

Рис. 2: Не связное множество (две компоненты)

Область — это открытое связное множество.

Число компонент границы данной области называется *порядком связности* этой области. Далее рассматриваются только области с конечным порядком связности, иными словами, *конечносвязные* области.

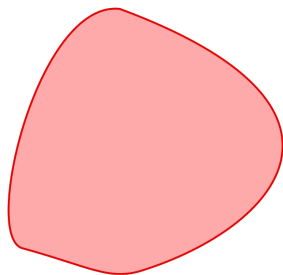


Рис. 3: Односвязная область

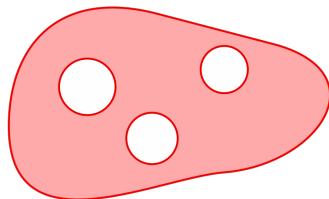


Рис. 4: Конечносвязная область (4-связная)

1.4 Функции комплексного переменного

Если каждому числу z из некоторого множества $E \subset \mathbb{C}$ поставлены в соответствие одно или несколько комплексных чисел w , то говорят, что на множестве E задана **функция** $f(z) = w$ комплексного переменного.

Пример 1.3. $f(z) = z$, $f(z) = z^n$, $f(z) = |z|$, $f(z) = \bar{z}$, $f(z) = \arg z$, $f(z) = \sqrt[n]{z}$ и т. п.

Любая комплексная функция может быть записана в виде

$$f(z) = u(z) + iv(z) \quad \text{или} \quad f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — действительнoзначные функции.

Пример 1.4.

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

1.4.1 Многозначные функции

Как видим не все функции являются однозначными. Так $f(z) = \sqrt[n]{z}$ в каждой точке $z \neq 0$ принимает n значений. Многозначность иногда не удобна, например, $\sqrt[n]{z} + \sqrt[n]{z} \neq 2\sqrt[n]{z}$. В некоторых случаях удаётся выделить однозначную ветвь многозначной функции.

1.5 Комплексная производная

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $z_0 \in \Omega$. Функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ называется **дифференцируемой в точке** z_0 , если существует предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0). \quad (1.5)$$

Эквивалентное определение дифференцируемости в точке z_0 : *существует константа $\lambda \in \mathbb{C}$ такая, что*

$$f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + o(|z - z_0|).$$

Задача 2. 1. Функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не дифференцируема.

2. Функция $f(z) = \bar{z}^2$ дифференцируема при $z_0 = 0$ и не дифференцируема при $z_0 \neq 0$.

Сравним понятие комплексной производной с дифференцируемостью отображения $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дифференцируемо в точке (x_0, y_0) если существует такое линейное преобразование Df , что

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + Df(x - x_0, y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}),$$

при этом

$$Df = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix}.$$

Оказывается дифференцируемость отображения f не влечёт существование комплексной производной.

1.5.1 Необходимые и достаточные условия существования комплексной производной

Теорема 1.5. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $z_0 \in \Omega$. Функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда 1) функции u, v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и 2) выполнены равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.6)$$

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема в точке z_0 , обозначим $f'(z_0) = \lambda = a + ib$, тогда

$$f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + o(|z - z_0|).$$

Выделяя действительную и мнимую части в последнем неравенстве, получаем

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$$

и

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + b(x - x_0) + a(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}).$$

Эти равенства означают, что функции u, v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и

$$u'_x(x_0, y_0) = a, \quad u'_y(x_0, y_0) = -b,$$

$$v'_x(x_0, y_0) = b, \quad v'_y(x_0, y_0) = a.$$

Таким образом необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть функции u и v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и выполняются равенства (1.6). Тогда

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + u'_x(x - x_0) + u'_y(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$$

и

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) - u'_y(x - x_0) + u'_x(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}).$$

Из этих равенств получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + u'_x(x - x_0) + u'_y(y - y_0) + i(-u'_y(x - x_0) + u'_x(y - y_0)) + o(|z - z_0|) = \\ &= f(z_0) + (u'_x - iu'_y)(z - z_0) + o(|z - z_0|). \end{aligned}$$

Следовательно функция f дифференцируема в точке z_0 и значение производной $f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) - iu'_y(x_0, y_0)$. \square

Следствие 1.6. Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке z_0 , то значение производной можно вычислять следующими способами

$$f' = u'_x + iv'_x, \quad f' = u'_x - iu'_y, \quad f' = v'_y - iu'_y, \quad f' = v'_y + iv'_x.$$

1.6 Комплексная экспонента

Определим функцию $\exp(z)$ как решение задачи Коши

$$\begin{cases} f'(z) = f(z), \\ f(0) = 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Это неявное определение комплексной экспоненты и не совсем ясно как вычислить конкретное значение функции, например $\exp(i)$. В следующей теореме мы докажем корректность определения и найдём явное выражение для функции $\exp(z)$.

Теорема 1.7. 1) Существует и единственно решение задачи (1.7).

2) $\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Доказательство. По следствию 1.6 $f(z) = u'_x + iv'_x$. Поэтому из 1.7 получаем две задачи на действительную и мнимую части

функции:

$$\begin{cases} u'_x(x, y) = u(x, y), \\ u(0, 0) = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} v'_x(x, y) = v(x, y), \\ v(0, 0) = 0. \end{cases}$$

Решения этих задач имеют вид

$$u(x, y) = \lambda(y)e^x \quad v(x, y) = \mu(y)e^x, \quad (1.8)$$

где λ, μ — такие функции, что $\lambda(0) = 1, \mu(0) = 0$.

По следствию 1.6 также верно, что $f(z) = v'_y - iu'_y$, а из 1.7 следует, что $u'_y = -v, v'_y = u$. Из равенств (1.8) получаем

$$\lambda'(y) = -\mu(y) \quad \mu'(y) = \lambda(y).$$

Заметим, что функции λ, μ удовлетворяют уравнению¹ $\psi'' + \psi = 0$, общее решение которого, имеет вид

$$C_1 \cos y + C_2 \sin y.$$

Используя начальные данные, получаем

$$\lambda(y) = \cos y, \quad \mu(y) = \sin y.$$

□

Следствие 1.8. *Комплексная экспонента обладает следующими свойствами.*

- 1) $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ — формула Эйлера.
- 2) $\exp(z + 2\pi ik) = \exp(z)$ периодичность экспоненты.
- 3) $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ для всех $z, w \in \mathbb{C}$.

Задача 3. *Доказать, что*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

¹уравнение гармонического осциллятора