2 Комплексный интеграл

В этой части курса нам потребуется следующее утверждение

Теорема 2.1 (формула Грина). *Пусть γ — ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая без самопересечений и пусть Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega = \gamma$. Если функции $u(x, y), v(x, y)$ дифференцируемы и имеют непрерывные частные производные на Ω, тогда*

$$\int\limits_{\gamma} u(x, y)\, dx + v(x, y)\, dy = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy. \tag{2.1}$$

На комплексной плоскости можно определить несколько различных интегралов. Начнём с самого распространенного. Пусть $\gamma \subset \mathbb{C}$ — спрямляемая кривая и $f(z)$ — функция определённая на этой кривой. Выберем разбиение этой кривой $\{z_0, z_1, \ldots, z_N\}$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(z_k^*) \cdot (z_{k+1} - z_k), \tag{2.2}$$

где точка z_k принадлежит кривой и находится между z_k, z_{k+1}. Если при стремлении диаметра разбиения к нулю последовательность сумм (2.2) сходится, то определен интеграл от функции $f(z)$ по кривой γ:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz.$$

Обратите внимание, что это понятие совпадает с криволинейным интегралом второго рода на плоскости.

Мы будем использовать следующее определение. Пусть γ — ориентированная кусочно-гладкая кривая, $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ такая, что $\gamma'(t) \neq 0$. Интеграл от непрерывной функции $f : \gamma \to \mathbb{C}$ вдоль кривой γ определяется равенством

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt. \tag{2.3}$$

Приведём основные свойства интеграла:

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g)\,dz = \alpha \int_{\gamma} f\,dz + \beta \int_{\gamma} g\,dz \quad \text{линейность,}$$

$$\int_{\gamma} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz \quad \text{аддитивность,}$$

$$\int_{\gamma^-} f\,dz = -\int_{\gamma} f\,dz \quad \text{зависимость от ориентации.}$$

Задача 4. *Доказать, что*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 1, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1, \end{cases}$$

считая, что $n \in \mathbb{Z}$, а окружность $|z - z_0| = R$ ориентирована против хода часовой стрелки.

Полезно помнить, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{d\,z}{z - z_0} = 1. \tag{2.4}$$

2.1 Интеграл по длине

Вместо интегральной суммы (2.2) рассмотрим сумму

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(z_k^*) \cdot |z_{k+1} - z_k|.$$

Это приведёт нас к понятию интеграла

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,|dz| \quad \Big(\int\limits_{\gamma} f(z)\,dl\Big),$$

где $dl = |dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ – элемент длины кривой γ. В свою очередь это понятие соответствует криволинейному интегралу первого рода.

Пусть γ — кусочно-гладкая кривая, $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ такая, что $\gamma'(t) \neq 0$. Интеграл по длине от непрерывной функции $f : \gamma \to \mathbb{C}$ вдоль кривой γ можно определить равенством

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt.$$

2.1.1 Оценка интеграла

Следующее утверждение описывает связь введёных выше интегралов. Для всякой непрерывной на кривой γ функции f выполняются неравенства

$$\Big|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\Big| \leq \int\limits_{\gamma} |f(z)|\,|dz| \leq \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot l(\gamma). \tag{2.5}$$

Доказательство. Обозначим

$$I = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Воспользуемся показательной формой записи комплексных чисел: $I = |I|e^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$. Тогда

$$|I| = \int\limits_{\gamma} e^{-i\varphi} f(z)d\,z = \int\limits_{a}^{b} e^{-i\varphi} f(z(t))z'(t)\,dt.$$

Поскольку последний интеграл является действительным числом, то

$$|I| = \int_a^b Re(e^{-i\varphi} f(z(t)) z'(t))\, dt \leq \int_a^b |f(z(t))|\, |z'(t))|\, dt =$$

$$= \int_\gamma |f(z)|\, |dz| \leq \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot \int_\gamma |dz| = \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot l(\gamma).$$

□

2.2 Интегральная теорема Коши

Мы подошли к одной из самых значимых теорем комплексного анализа.

Теорема 2.2 (Интегральная теорема Коши)**.** *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{C}$ — *ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой ориентированной границей* γ, *функция* f *является аналитической в области* Ω *и непрерывной в замыкании* $\overline{\Omega}$. *Тогда*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Теорему можно доказывать следующим образом.

Имеем $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ и $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b (ux' - vy')\, dt + i \int_a^b (vx' + uy')\, dt =$$

$$= \int_\gamma u\, dx - v\, dy + i \int_\gamma v\, dx + u\, dy.$$

Воспользуемся формулой Грина (2.1)

$$\int\limits_{\gamma} f(z)d\,z = \int\limits_{\gamma} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\gamma} v\,dx + u\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \Big(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big) dx\,dy + i\iint\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) dx\,dy = 0.$$

Равенство нулю двойных интегралов является следствием условий Коши-Римана. $\triangle$

Замечание 2.3. Теорема 2.2 верна и для конечносвязных областей.

Доказательство. Граница γ состоит из n связных компонент $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$. Проведем непересекающиеся гладкие разрезы $l_k, k = 1, \ldots, l_{n-1}$, соединяющие компоненту границы γ_0 с компонентой γ_k соответственно. Тогда область $\Omega^* = \Omega \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} l_k$ будет односвязной, и, следовательно, выполнены условия теоремы 2.2. Исходная ориентация границы области Ω естественным образом определяет ориентацию разрезов l_k, проходимых дважды, и которые следует понимать как объединение двух различных кривых l_k^+ и l_k^-, совпадающих как множества точек комплексной плоскости, но имеющих противоположные ориентации.

Пусть γ^* — ориентированная граница односвязной области Ω^*, тогда

$$\gamma^* = \gamma \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} l_k^+\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} l_k^-\Big).$$

Учитывая аддитивность интеграла и равенство

$$\int\limits_{l^+} f(z)\,dz + \int\limits_{l^-} f(z)\,dz = 0,$$

получаем

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\gamma_k^+} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\gamma_k^-} f(z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{\gamma^*} f(z)\,dz = 0.$$

$\square$

2.3 Интегральная формула Коши

Теорема 2.4 (Интегральная формула Коши)**.** *Пусть Ω — ограниченная конечносвязная область с ориентированной в положительном направлении кусочно-гладкой границей γ, функция f является аналитической в области Ω и непрерывной в $\overline{\Omega}$. Тогда для произвольной точки $z \in \Omega$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)d\,w}{w-z}.$$

Доказательство. 1. Пусть точка $z \in \Omega$ и $d = \operatorname{dist}(z, \gamma)$. Поскольку функция f непрерывна в точке z, то, по определению непрерывности, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из выполнения неравенства $|w - z| < \delta$ следует выполнение неравенства $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$.

2. Пусть $r < \min(d, \delta)$. Рассмотрим круг $B(z, r)$, ориентированную против хода часовой стрелки окружность $C_r = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| = r\}$ и обозначим через C_r^- окружность с противоположной ориентацией.

3. Функция $\dfrac{f(w)}{w-z}$ является аналитической по переменной w в области $\Omega^* = \Omega \setminus \overline{B(z, r)}$, и по интегральной теореме Коши

$$\int\limits_{\partial\Omega^*} \frac{f(w)d\,w}{w-z} = \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)d\,w}{w-z} + \int\limits_{C_r^-} \frac{f(w)d\,w}{w-z} = 0$$

или
$$\int\limits_{\gamma} \frac{f(w)d\,w}{w-z} = \int\limits_{C_r} \frac{f(w)d\,w}{w-z}.$$

4. Учитывая,что
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} \frac{d\,w}{w-z} = 1,$$

получаем
$$\Big| f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(w)d\,w}{w-z}\Big| = \Big|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} \frac{f(z)d\,w}{w-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} \frac{f(w)d\,w}{w-z}\Big| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_r} \frac{|f(z)-f(w)|\,|d\,w|}{|w-z|} \leq \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r}2\pi r = \varepsilon.$$

5. Из произвольности выбора числа ε следует, что
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(w)d\,w}{w-z}.$$

□

Если выполнены условия теоремы и $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, то функция $\dfrac{f(w)}{w-z}$ оказывается аналитической по переменной w в области D и, учитывая интегральную теорему Коши, получаем
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)d\,t}{w-z} = \begin{cases} f(z), & z \in D; \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

2.4 Интеграл типа Коши

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – ориентированная кусочно-гладкая кривая, f — определённая на кривой Γ непрерывная функция. Для любой точки $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ функция $\dfrac{f(t)}{t-z}$ непрерывна по переменной t на кривой Γ. Поэтому существует интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \tag{2.6}$$

называемый ***интегралом типа Коши*** и являющийся однозначной функцией переменного z.

Теорема 2.5. *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – ориентированная кусочно-гладкая кривая, функция f непрерывна на Γ. Тогда интеграл типа Коши, определяемый равенством (2.6), является аналитической функцией в области $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Более того, функция $F(z)$ бесконечно дифференцируема и при этом*

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Ограничимся вычислением первой производной (т. е. $F'(z)$). Фиксируем произвольную точку $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ и пусть $2d = \operatorname{dist}(z, \Gamma)$, а $|\Delta z| < d$. Тогда для любого $t \in \Gamma$ выполняются неравенства $|t - z| > d$ и $|t - z - \Delta z| > d$.

Оценим разность

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\Gamma} \frac{\Delta z f(t)\,dt}{(t-z)^2 (t-z-\Delta z)} \right| \le \frac{|\Delta z| L M}{2\pi d^3},$$

где L – длина кривой Γ, а M – максимум модуля функции $f(t)$ на кривой Γ (см. лемму 2.1.1).

Таким образом,

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}.$$

□

Дифференцируемость интегралов типа Коши позволяет получить важное следствие:

Теорема 2.6. *Аналитическая в области $D \subset \mathbb{C}$ функция $f(z)$ является бесконечно дифференцируемой в каждой точке области D.*

Доказательство. Действительно, пусть точка z_0 — произвольная точка области D и $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда в круге $B(z_0, r)$ функция $f(z)$ представима интегралом Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-z_0|=r} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

и, следовательно, является бесконечно дифференцируемой. □