3 Следствия теоремы Коши

Дифференцируемость интегралов типа Коши позволяет получить важное следствие:

Теорема 3.1. *Дифференцируемая в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ функция $f(z)$ является бесконечно дифференцируемой в каждой точке области Ω.*

Доказательство. Действительно, пусть точка z_0 — произвольная точка области Ω и $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Тогда в круге $B(z_0, r)$ функция $f(z)$ представима интегралом Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-z_0|=r} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

и, следовательно, является бесконечно дифференцируемой. □

3.1 Гармонические функции

Пусть функция $f = u + iv$ является аналитической в области Ω, следовательно, выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируя первое равенство по переменной x, второе равенство по переменной y, складывая и используя равенство смешанных производных ($\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$), получаем

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференциальный оператор $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ называется оператором Лапласа.

Дважды непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x, y)$ называется ***гармонической*** в области $\Omega \subset \mathbb{C}$,[2] если

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{всюду в области } \Omega.$$

Задача 5. *Гармоническая функция бесконечно дифференцируема.*

Решение. Следует из бесконечной дифференцируемости аналитической функции. △

3.2 Первообразная

Дифференцируемая в области Ω функция $F(z)$ называется ***первообразной*** функции $f(z)$, если $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in \Omega$.

Задача 6. *Если f — аналитическая в области Ω функция, то в качестве первообразной можно взять*

$$F(z) = \int\limits_{\gamma} f(w)\, dw = \int\limits_{z_0}^{z} f(w)\, dw,$$

где $\gamma \subset \Omega$ кусочно-гладкая кривая, соединяющая z_0 и z.

Заметим, что если $F(z)$ первообразная функции $f(z)$, то $F(z) + \mathrm{const}$ также первообразная.

Следующее утверждение является обратным к интегральной теореме Коши.

Теорема 3.2 (Теорема Морера)**.** *Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ и вдоль любого замкнутого*

[2]Приведём примеры гармонических функций: $e^x \cos y$, $x^2 - y^2$, $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$.

кусочно-гладкого контура $\gamma \subset \Omega$

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0,$$

то функция $f(z)$ является голоморфной в области Ω.

Доказательство. Выше было показано, что

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt, \tag{3.1}$$

где z_0 и z — произвольные точки области Ω, а интеграл берётся по любому пути, соединяющему эти точки в области D, является дифференцируемой в этой области функцией, причём $F'(z) = f(z)$. Производная аналитической функции также является аналитической функцией (см. лемму 3.1), то есть существует непрерывная производная функции $F'(z)$, а именно функция $F''(z) = f'(z)$, что и доказывает теорему. □

Задача 7. *Выяснить, какая из приведённых ниже функций является аналитической.*

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-z)^2}\,dt, \qquad G(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-z|^2}\,dt.$$

Решение. 1) Функция $e^{-(t-z)^2}$ аналитична (по z). Интеграл $F(z)$ сходится равномерно, поэтому можно менять порядок интегрирования. Следовательно $F(z)$ — аналитическая.

2) Функция $G(z)$ принимает только действительные значения, поэтому $G(z)$ не может быть аналитической. △

Теорема 3.3 (Теорема Лиувилля)**.** *Пусть на всей комплексной плоскости функция $f(z)$ является аналитической, а её модуль ограничен. Тогда эта функция $f(z)$ тождественно равна постоянной $f(z) \equiv \mathrm{const}$.*

Доказательство. Запишем значение производной $f'(z)$ в произвольной точке z по формуле :

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw,$$

По условию теоремы существует такая константа M, что $|f(w)| \leq M$ независимо от R. Поэтому

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w-z|=R} \frac{|f(w)|}{(w-z)^2}\, dw \leq \frac{M}{R}.$$

Так как радиус R можно выбрать сколь угодно большим, а $f'(z)$ не зависит от R, то $|f'(z)| = 0$. В силу произвольности выбора точки z заключаем, что $|f'(z)| \equiv 0$ на всей комплексной плоскости. Отсюда следует, что $f(z) \equiv \text{const}$. □

3.3 Теорема о среднем

Теорема 3.4 (Теорема о среднем)**.** *Если функция $f(z)$ является аналитической в круге $B(z_0, r)$ и непрерывной в замкнутом круге $\overline{B(z_0, r)}$, то ее значение в центре круга равно среднему значению функции на граничной окружности, то есть*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)|dz| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi.$$

Доказательство. Используя интегральную формулу Коши (2.6) и параметризуя окружность $z = z_0 + re^{i\varphi}$, получаем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)dz}{z-z_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,|dz|.$$

□

3.4 Принцип максимума модуля

Теорема 3.5 (Принцип максимума модуля)**.** *Пусть аналитическая в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ функция $f(z)$ отлична от постоянной и $M = \sup\limits_{z\in\Omega} |f(z)|$.*

Тогда $|f(z)| < M$ для произвольной точки $z \in \Omega$.[3]

Доказательство. Если $M = +\infty$, то утверждение теоремы очевидно, так как функция $f(z)$ является аналитической и, следовательно, конечной во всей области Ω.

Пусть $M < +\infty$. Доказывать будем от противного: предположим, что существует такая точка z_0, что $|f(z_0)| = M$, и покажем, что в этом случае функция $f(z)$ является постоянной во всей области Ω.

Выбирая $r < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$, используя теорему о среднем 3.4 и определение числа M, получаем

$$M = |f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi\right| \leq$$

[3] Иными словами, модуль отличной от постоянной аналитической функции не может достигать своего максимума ни в одной внутренней точке области.

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\varphi})|d\varphi \le \frac{1}{2\pi}M2\pi = M,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\varphi})|d\varphi = M.$$

Поскольку функция $f(z)$ непрерывна и $|f(z)| \le M$, то последнее равенство возможно лишь при $|f(z_0+re^{i\varphi})| = M$ для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$. Таким образом, $|f(z)| \equiv M$ на окружности $|z-z_0| = r$. Так как $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ выбиралось произвольно, то $|f(z)| \equiv M$ в любом круге $B(z_0, R) \subset \Omega$, $R = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

Пусть z^* – произвольная точка области D. Покажем, что $|f(z^*)| = M$. Соединим точки z^* и z_0 кривой $\gamma \subset D$. Учитывая, что расстояние от кривой γ до границы области положительно, фиксируем положительное $r < \operatorname{dist}(\gamma, \partial D)$. Тогда для всякого $z \in \gamma$ замкнутый круг $\overline{B(z,r)} \subset D$.

Если $|z^*-z_0| \le r$, то по уже доказанному $|f(z^*)| = M$.

Пусть $|z^*-z_0| \ge r$. Так как длина кривой γ конечна, то ее можно разбить на конечное число последовательных дуг точками $z_1, z_2, \ldots, z_n = z^*$, такими, что $|z_{k+1}-z_k| \le r$. Поскольку $z_1 \in \overline{B(z_0,r)}$, то по уже доказанному $|f(z_1)| = M$. Повторяя для точки z_1 рассуждения, аналогичные ранее использованным для точки z_0, получаем $|f(z)| \equiv M$ в круге $\overline{B(z_1,r)}$. Поскольку $z_2 \in \overline{B(z_0,r)}$, то $|f(z_2)| = M$. Продолжая процесс, мы за конечное число шагов дойдем до точки $z_n = z^*$ и получим $|f(z^*)| = M$.

Поскольку точка z^* выбиралась произвольным образом, то модуль функции является постоянным во всей области D. Осталось показать, что и сама функция является постоянной.

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, тогда $u^2+v^2 \equiv M^2$. Следовательно,

$$0 = \Delta(u^2+v^2) = 2u\Delta u + 2v\Delta v + 2\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2\Big] =$$

$$2\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2\Big].$$

Последнее равенство является следствием гармоничности функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в области D. Таким образом, все частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\equiv 0,$$

и, следовательно, $f(z)\equiv const$ в области D. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы. □

Задача 8. *Пусть голоморфное (дифференцируемое) отображение $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ единичного круга на себя такое, что $f(0)=0$, тогда*
1) $|f(z)|\le|z|$ для всех $z\in\mathbb{D}$;
2) $|f'(0)|\le 1$.

Следствие 3.6. *Пусть $D\subset\mathbb{C}$ — область, отличная от постоянной функция f является аналитической в области D и $m=\inf\limits_{z\in D}|f(z)|$. Если $f(z)\neq 0$ в области D, то $|f(z)|>m$ для произвольной точки $z\in D$.*

Доказательство. Поскольку $f(z)\neq 0$, то функция $g(z)=1/f(z)$ будет аналитической в области D и

$$\sup_{z\in D}|g(z)|=\frac{1}{\inf\limits_{z\in D}|f(z)|}=\frac{1}{m}.$$

Остаётся воспользоваться принципом максимума модуля для функции $g(z)$. □

Задача 9. *Если $u(x,y)\neq$ const — гармоническая функция в области Ω, то она не может достигать своих минимальных и максимальных значений внутри области Ω.*

Решение. Доказывается также как для голоморфных функций. △

Задача 10. *Пусть u, v — гармонические функции в области Ω и $u(x,y) = v(x,y)$ для $(x,y) \in \partial\Omega$. Тогда $u(x,y) = v(x,y)$ для $(x,y) \in \partial\Omega$.*

Решение. Следует из принципа максимума (и минимума). △

Поиск гармонической функции удовлетворяющей граничным условиям называется задачей Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in \Omega; \\ u(x',y') = f(x',y') & (x',y') \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Задача 10 утверждает, что решение (3.3) единственно. Ниже мы решим задачу для единичного круга.

Часто удобнее использовать полярную систему координат. В полярных координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Задача 11. *Показать, что решение задачи (3.3) в случае когда $\Omega = \mathbb{D}$ — единичный круг можно найти по формуле*

$$u(re^{\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta})P_r(\varphi - \theta)\,d\theta,$$

где $P_r(\varphi) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi + r^2}$.[4]

[4] Ядро Пуассона.