

4 Ряды аналитических функций

4.1 Функциональные последовательности

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ и $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Последовательность функций $\{f_n\}$ **сходится поточечно** к функции $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, если для каждого $z \in \Omega$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z).$$

Последовательность функций $\{f_n\}$ **сходится равномерно** к функции $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ если любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ так, что для любого $z \in \Omega$ и $n > N$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Эквивалентное определение равномерной сходимости

$$\sup_{\Omega} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Заметим, что

равномерная сходимость \Rightarrow поточечная сходимость

и

равномерная сходимость $\not\Leftarrow$ поточечная сходимость

Задача 12. *Показать, что последовательность функций $f_n(z) = z^n$, определенная на $\mathbb{D} = B(0, 1)$ сходится поточечно к 0 при $n \rightarrow \infty$, но не сходится равномерно.*

Лемма 4.1. *Если последовательность непрерывных функций $\{f_n\}$ сходится равномерно на множестве Ω к функции f , то функция f также непрерывна.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in \Omega$, докажем, что f непрерывна в точке z_0 . В силу равномерной сходимости, для $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $z \in \Omega$ и $n \geq N$

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку функция f_n непрерывна, то найдётся $\delta > 0$ такое, что при $|z - z_0| < \delta$

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда, используя неравенство треугольника, получаем

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

□

Лемма 4.2. Пусть $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — последовательность непрерывных функций и $\{f_n\}$ сходится равномерно к f . Тогда для любой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \Omega$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{l(\gamma)}, \quad \text{для всех } z \in \Omega,$$

где $l(\gamma)$ — длина⁵ кривой γ . Используя МЛ оценку (2.5), выводим

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| \cdot l(\gamma) < \varepsilon.$$

□

⁵предполагаем, что $l(\gamma) < \infty$

4.2 Функциональные ряды

Понятия сходимости и равномерной сходимости очевидным образом переносятся на функциональные ряды. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно к $f(z) \Leftrightarrow$ последовательность частичных сумм $S_n(z)$ сходится равномерно к $f(z)$.

Для рядов имеет место аналог леммы 4.2

Лемма 4.3. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на Ω , тогда для любой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \Omega$

$$\int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

Теорема 4.4 (признак Вейерштрасса⁶). Пусть $|f_k(z)| \leq M_k$ для всех $z \in \Omega$ и ряд $\sum M_k$ сходится. Тогда ряд $\sum f_k(z)$ сходится равномерно и абсолютно.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Для любого $z \in \Omega$ и $n \geq N$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

То есть остаток ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)|$ равномерно сходится к нулю, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится абсолютно и равномерно. □

⁶Weierstraßscher M-Test

В качестве *нетривиального* примера рассмотрим функциональный ряд $\sum \frac{1}{kz}$. Область сходимости $\operatorname{Re} z > 1$. Ясно что в $z = 1$ ряд расходится. А что происходит в точках $1 + ti$, $t \neq 0$?

4.3 Степенные ряды

При изучении функций комплексного переменного весьма важное значение имеет их представление в виде суммы некоторого ряда уже хорошо изученных функций. Простейшим классом таких функциональных рядов являются *степенные ряды*.

Итак, ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (4.1)$$

называется **степенным рядом**. Здесь $z_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ — фиксированные комплексные числа.

Ряд (4.1) сходится при одних значениях z и расходится при других. Точно можно сказать, что он сходится при $z = z_0$ (так как $\sum c_n 0^n = 0 + 0 + \dots = 0$).

В качестве примера рассмотрим ряд (геометрическая прогрессия)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (4.2)$$

Заметим, что если $|z| \geq 1$, то в силу необходимого признака сходимости ряд (4.2) расходится. Для частичных сумм можно вывести формулу

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Следовательно при $|z| < 1$ ряд (4.2) сходится и

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

Теорема 4.5 (Теорема Абеля). 1) Если степенной ряд $\sum c_k(z - z_0)^k$ сходится в точке w , то он сходится в любой точке z , такой, что $|z - z_0| < |w - z_0|$.

2) Если степенной ряд $\sum c_k(z - z_0)^k$ расходится в точке w , то он расходится в любой точке z , такой, что $|z - z_0| > |w - z_0|$.

Доказательство. Обозначим $r = |w - z_0|$. Если ряд $\sum c_k(w - z_0)^k$ сходится, то $c_k(w - z_0)^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, поэтому существует такое положительное число $M < \infty$, что

$$|c_k(w - z_0)^k| = |c_k|r^k \leq M.$$

Если $|z - z_0| < |w - z_0| = r$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(z - z_0)^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|r^k \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^k \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^k.$$

Поскольку $\left| \frac{z - z_0}{r} \right| < 1$, то последний ряд сходится⁷, а следовательно, исходный ряд сходится (абсолютно).

Аналогично доказываем пункт 2). □

Более точную информацию о сходимости степенного ряд даёт

Теорема 4.6. Для любого степенного ряда $\sum c_k(z - z_0)^k$ существует число $R \in [0, +\infty]$ такое, что

- 1) ряд $\sum c_k(z - z_0)^k$ сходится абсолютно при $|z - z_0| < R$;
- 2) ряд $\sum c_k(z - z_0)^k$ сходится равномерно при $|z - z_0| \leq r < R$;
- 3) ряд $\sum c_k(z - z_0)^k$ расходится при $|z - z_0| > R$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$S = \{x \geq 0 : \sum |c_k|x^k \text{ сходится} \}.$$

Положим $\sup S = R$.

Если $R = 0$, то по теореме Абеля 4.5 ряд расходится при $|z - z_0| > 0$.

⁷Это геометрическая прогрессия.

Пусть $R > 0$. Пункты 1) и 3) следуют из теоремы Абеля 4.5 ($w = z_0 + x$). Если $|z - z_0| \leq r < R$, то найдется число $x \in S$ такое, что $r < x \leq R$. Тогда $|c_k(z - z_0)^k| \leq |c_k|x^k$, и по теореме Вейерштрасса 4.4 ряд $\sum c_k(z - z_0)^k$ сходится равномерно в круге $B(z_0, r)$. \square

Число R из теоремы 4.6 называется **радиусом сходимости** и может быть найдено по формуле Коши–Адамара:

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}.$$

4.3.1 Аналитичность степенного ряда

Теорема 4.7. Пусть степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k, \quad (4.3)$$

имеет положительный радиус сходимости ($R > 0$). Тогда функция $f(z)$ дифференцируема в круге $B(z_0, R)$.

Доказательство. Для любого $r < R$ ряд (4.3) сходится равномерно в круге $B(z_0, r)$. Следовательно $f(z)$ — непрерывная функция и для любого замкнутого контура $\gamma \subset B(z_0, R)$ имеем

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma} c_k(z - z_0)^k dz = 0.$$

По теореме Морера 3.2 функция f дифференцируема в $B(z_0, R)$. \square

Задача 13. Пусть степенной ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ имеет положительный радиус сходимости ($R > 0$). Тогда

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k(z - z_0)^{k-1}. \quad (4.4)$$

Радиус сходимости ряда (4.4) также равен R .

Задача 14. Если степенной ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ имеет положительный радиус сходимости, то $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

4.4 Ряд Тейлора

В этой части мы увидим, что понятия степенного ряда и дифференцируемой функции определяют один и тот же объект: любой степенной ряд с положительным радиусом сходимости является дифференцируемой функцией и, наоборот, любая дифференцируемая функция может быть представлена степенным рядом.

Теорема 4.8 (Теорема Тейлора). Пусть функция f — дифференцируема в круге $B(z_0, R)$. Тогда f может быть представлена в $B(z_0, R)$ степенным рядом с центром в z_0 (с радиусом сходимости $\geq R$):

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{k+1}}.$$

$\gamma \subset B(z_0, R)$ — простой замкнутый кусочно-гладкий контур, содержащий z_0 внутри.

Доказательство. Пусть $z \in B(z_0, R)$, обозначим $r = \frac{|z - z_0| + R}{2}$. По интегральной формуле Коши (2.6)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w - z_0| = r} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Разложим $\frac{1}{w-z}$ в сумму геометрической прогрессии следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0-(z-z_0)} \\ &= \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ряд (4.5) сходится равномерно⁸ на окружности $|w-z_0|=r$, поэтому сумму и интеграл можно поменять местами.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} f(w) \frac{1}{w-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw \right) (z-z_0)^k. \end{aligned}$$

Получаем требуемое $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$, $c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z_0)^{k+1}}$.

Заметим, что здесь мы использовали равенство

$$\int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{(t-z_0)^{k+1}} = \int_{|t-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw,$$

которое верно в силу интегральной теоремы Коши. \square

Теорема 4.9 (Теорема единственности). Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, множество $E \subset \Omega$ и имеет предельную точку $z_0 \in \Omega$,

⁸По теореме Вейерштрасса.

функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими в области Ω и $f(z) = g(z)$ для всех $z \in E$. Тогда $f(z) = g(z)$ всюду в области Ω .

Доказательство. Множество E содержит последовательность точек $\{z_n\}$, сходящуюся к точке $z_0 \in \Omega$. При этом

$$f(z_n) = g(z_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

По теореме Тейлора 4.8 в круге $B(z_0, r)$ при $r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$ функции $f(z)$ и $g(z)$ представимы степенными рядами

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k.$$

Начиная с некоторого номера, все точки z_n лежат в круге $B(z_0, r)$, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^k = f(z_n) = g(z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z_n - z_0)^k.$$

Переходя в этом равенстве к пределу $z_n \rightarrow z_0$, получаем $a_0 = b_0$. Разделив обе части этой формулы на $(z_n - z_0)$, получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z_n - z_0)^{k-1},$$

переходя к пределу, в котором получаем $a_1 = b_1$.

Продолжая этот процесс, получаем $a_k = b_k$ для всех номеров $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $f(z) = g(z)$ всюду в круге $B(z_0, r)$.

Пусть z^* — произвольная точка области Ω . Соединим точку z_0 с точкой z^* непрерывной кривой $\gamma \subset \Omega$. Фиксируем положительное ρ меньшее, чем расстояние от кривой γ до границы $\partial\Omega$ области Ω .

Передвигая центр круга $B(z, \rho)$ вдоль кривой γ последовательно в точки $w_1, w_2, \dots, w_n = z^*$, $|w_k - w_{k-1}| = \rho$ и повторяя приведенное ранее рассуждение, получим $f(z^*) = g(z^*)$. Поскольку z^* — произвольная точка области Ω , то $f(z) = g(z)$ всюду в области Ω . \square

Задача 15. *Существует ли голоморфная функция такая, что*

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots?$$

4.5 Классификация нулей

Рассмотрим полином степени n

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Нуль порядка m полинома $p(z)$ называется такая точка $z_0 \in \mathbb{C}$, что

$$p(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z),$$

где $g(z)$ — тоже полином и $g(z_0) \neq 0$.

Например, точка $z_0 = 1$ является нулём порядка $m = 2$ для полинома $p(z) = 3z^3 - 6z^2 + 3z$, так как $p(z) = (z - 1)^2 \cdot 3z$ (здесь $g(z) = 3z$).

Определим аналогичное понятие для аналитической функции. Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется **нулём функции $f(z)$** , если $f(z_0) = 0$.

Теорема 4.10 (Классификация нулей). *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция и точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является её нулём ($f(z_0) = 0$).*

Тогда возможны два случая:

1) $f(z) = 0$ для всех $z \in B(z_0, \rho)$ для некоторого $\rho > 0$
либо

2) существует $m \in \mathbb{N}$ и аналитическая функция $g(z)$ такая, что $f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$ и $g(z_0) \neq 0$ для всех $z \in B(z_0, \rho)$ для некоторого $\rho > 0$.

Доказательство. Найдётся круг $B(z_0, \rho)$ такой, что для всех $z \in B(z_0, \rho)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Заметим, что по условию $c_0 = 0$. Если все коэффициенты $c_k = 0$, то приходим к пункту 1). Пусть m — наименьшее число, такое, что $c_m \neq 0$, тогда

$$f(z) = (z - z_0)^m \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k} (z - z_0)^k \right).$$

□

Число m из теоремы называется **порядком нуля**.

Для функции $f(z) = z^2 \sin z$ точка $z = 0$ является нулём порядка 3, а точки $z = \pi k$, $k \neq 1$ — нули порядка 1.

Удобный способ определения порядка нуля аналитической функции приводится в следующем утверждении

Теорема 4.11. Точка z_0 — нуль порядка m аналитической в точке z_0 функции $f(z)$, если

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Так, например, функция $f(z) = \cos z - 1$ имеет нули порядка 2 в точках $z = \pi k$. Действительно, $f(\pi k) = \cos \pi k - 1 = 0$, $f'(\pi k) = -\sin \pi k = 0$, а $f''(\pi k) = -\cos \pi k \neq 0$.